Intervalles de confiance

Hypothèse nécessaire : normalité de la distribution du caractère dans la population → `shapiro.test(echantillon)` mesure le "défaut de normalité". Il doit donner une p-valeur ≥ 0.05 (proche de 1 c'est mieux !).

estimation de μ, σ connu	estimation de μ, σ inconnu
statistique : $N_n = \sqrt{n}\frac{\mu - \overline{X}}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ **intervalle de confiance :** $$IC_\alpha = \left[\overline{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$ où le **quantile** u_ν de niveau ν est défini par : $$\mathbb{P}(N_n < u_\nu) = \nu$$ par symétrie de la densité de $\mathcal{N}(0,1)$, on a $u_\nu = -u_{1-\nu}$	**statistique** : $T_{n-1} = \sqrt{n}\frac{\mu - \overline{X}}{S_{n,c}} \sim t(n-1)$ **intervalle de confiance :** $$IC_\alpha = \left[\overline{X} - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S_{n,c}}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{X} + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S_{n,c}}{\sqrt{n}}\right]$$ où le **quantile** $t_{n-1,\nu}$ de niveau ν est défini par : $$\mathbb{P}(T_{n-1} < t_{n-1,\nu}) = \nu$$ par symétrie de $t(n-1)$, on a $t_{n-1,\nu} = -t_{n-1,1-\nu}$

estimation de σ^2, μ connue	estimation de σ^2, μ inconnue
statistique : $K_n = \frac{n\widehat{\sigma_n^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ **intervalle de confiance :** $$IC_\alpha = \left[\frac{n\widehat{\sigma_n^2}}{k_{n,1-\alpha/2}} \ ; \ \frac{n\widehat{\sigma_n^2}}{k_{n,\alpha/2}}\right]$$ où le **quantile** $k_{n,\nu}$ de niveau ν à n degrés de liberté est défini par : $$\mathbb{P}(K_n < k_{n,\nu}) = \nu$$	**statistique** : $L_{n-1} = \frac{(n-1)S_{n,c}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ **intervalle de confiance :** $$IC_\alpha = \left[\frac{(n-1)S_{n,c}^2}{l_{n-1,1-\alpha/2}} \ ; \ \frac{(n-1)S_{n,c}^2}{l_{n-1,\alpha/2}}\right]$$ où le **quantile** $l_{n-1,\nu}$ de niveau ν à $n-1$ degrés de liberté est défini par : $$\mathbb{P}(L_{n-1} < l_{n-1,\nu}) = \nu$$

estimation de π, méthode de Wald	estimation de π, méthode de Wilson
statistique : $A_n = n\hat{\pi}_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ **intervalle de confiance :** $$IC_\alpha = \left[\hat{\pi}_n - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}_n(1-\hat{\pi}_n)}{n}} \ ; \ \hat{\pi}_n + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}_n(1-\hat{\pi}_n)}{n}}\right]$$ où u est le quantile de la loi normale **ATTENTION :** la méthode de Wald utilise une approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$. Celle-ci n'est acceptable que dans le cas où : $$\begin{cases} n & \geq & 30 \\ np & \geq & 15 \\ np(1-p) & > & 5 \end{cases}$$	**statistique** : $A_n = n\hat{\pi}_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ **intervalle de confiance :** $$IC_\alpha = \left[\frac{\hat{\pi}_n + \frac{1}{2n}u_{1-\alpha/2}^2 - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}_n(1-\hat{\pi}_n)}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2} \ ; \ \frac{\hat{\pi}_n + \frac{1}{2n}u_{1-\alpha/2}^2 + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}_n(1-\hat{\pi}_n)}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{1}{n}u_{1-\alpha/2}^2}\right]$$ où u est le quantile de la loi normale

Propriété des intervalles de confiance : $\mathbb{P}(\mu \in IC_\alpha) = 1 - \alpha$

Tests statistiques

Dans chacune des six situations décrites précédemment, on dispose d'une **statistique**. C'est une fonction ayant certaines propriétés (qui ne sont pas détaillées ici) dont les arguments sont les **paramètres** de la loi sous-jacente ainsi que l'**échantillon** observé. Bien choisie, la statistique suit une loi connue fixée, ce qui permet de formuler des inégalités (en se basant sur la théorie des probabilités).

Ainsi, la statistique N_n décrite dans la première case aura *toujours* une probabilité de 0.95 de se trouver *en-dessous* de son quantile au niveau 0.95, c'est à dire $u_{0.95}$, ou `qnorm(0.95,0,1)` en `R`.

À partir de ces considérations, on peut construire deux types de tests : les **test bilatéral** ou test d'adéquation, et les **test unilatéral** ou test de supériorité ou d'infériorité. Dans les deux cas, on va vérifier si l'estimateur tombe dans une **région d'acceptation** ou une **région de rejet**.

La démarche est naturelle :

— **adéquation** : "Avec un niveau de confiance α, est-ce que je peux dire que mon paramètre θ vaut la valeur connue θ_0 ?"
Autrement dit, on se demande si l'écart entre un **estimateur** $\hat{\theta}_n$ basé sur un échantillon de taille n et la valeur supposée est assez petit pour conclure que $\theta = \theta_0$. Les hypothèses sont les suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{H_0} : \theta = \theta_0 \\ \mathbf{H_1} : \theta \neq \theta_0 \end{array} \right.$$

On **accepte** l'hypothèse nulle $\mathbf{H_0}$ au niveau de confiance α si la statistique se trouve dans l'intervalle :

$$\left] q_{\alpha/2} ; q_{1-\alpha/2} \right[$$

où q désigne le quantile de la loi de probabilité $\mathcal{L}$. En jouant avec cet encadrement, on retrouve la définition d'un intervalle de confiance (très bon exercice !).
Sinon, on **rejette** l'hypothèse $\mathbf{H_0}$ au profit de $\mathbf{H_1}$.

— **supériorité** : "Avec un niveau de confiance α, est-ce que je peux dire que mon paramètre θ est plus grand que la valeur connue θ_0 ?" (pour l'**infériorité**, on change le sens de l'inégalité).
Autrement dit, on se demande si un **estimateur** $\hat{\theta}_n$ basé sur un échantillon de taille n est "suffisamment" supérieur à θ_0 pour conclure que $\theta > \theta_0$. Les hypothèses sont les suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{H_0} : \theta \geqslant \theta_0 \\ \mathbf{H_1} : \theta < \theta_0 \end{array} \right.$$

On **accepte** l'hypothèse nulle $\mathbf{H_0}$ au niveau de confiance α si la statistique se trouve dans la demi-droite :

$$]q_\alpha ; +\infty[$$

Sinon, on **rejette** l'hypothèse $\mathbf{H_0}$ au profit de $\mathbf{H_1}$. La borne finie est appelée la *valeur critique* du test.