TD1

Exercice 1 Soit f une fonction de classe C^2 sur Ω et l'équation $f(x) = 0$ que l'on cherche à résoudre.

1. Rappeler la méthode du point fixe.
2. On suppose que la méthode du point fixe converge vers $\overline{x}$. A l'aide d'un développement limité, montrer que cette méthode est d'ordre 1.

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ et l'équation $f(x) = 0$ que l'on cherche à résoudre.

1. Rappeler la méthode de Newton.
2. On suppose que la méthode de Newton converge vers $\overline{x}$. A l'aide d'un développement limité, montrer que cette méthode est d'ordre 2.

Exercice 3 Soit la fonction définie par $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} - x$.

1. Étudier cette fonction f et tracer son graphe. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution notée s. Trouver I intervalle de la forme $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ qui contient s.
2. On définit la méthode itérative :
$$\begin{cases} x_0 & \in & I \\ x_{n+1} & = & g(x_n) = 1 + \mathrm{e}^{-x_n} \end{cases}$$
Cette méthode converge-t-elle vers s ?
3. Déterminer le nombre d'itérations assurant que l'erreur $e_n = x_n - s$ vérifie $|e_n| \leq 5.10^{-4}$.
4. Étudier la convergence de la méthode définie par :
$$\begin{cases} x_0 & \in & I \\ x_{n+1} & = & h(x_n) = -\ln(x-1) \end{cases}$$
5. Ecrire la méthode de Newton relative à la fonction f. Quelles sont les valeurs de x_0 qui assurent la convergence de la méthode ?
6. Effectuer numériquement deux itérations de la méthode de Newton pour $x_0 = 1$. Puis par la méthode définie en 2, effectuer les itérations jusqu'à l'obtention d'un résultat voisin à 5.10^{-4} près de celui de Newton. Conclure.

Exercice 4 Calculer une itération de la méthode de Newton pour le système

$$\begin{aligned} &\sin(2x - y) - x = 1 \\ &2x^2 - y^2 = 5 \end{aligned}$$

Exercice 5 Soit f de classe $C^2([a,b])$. On suppose que f est convexe sur $[a,b]$ et telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et $f'(a) > 0$. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$.

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[a,b]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$ et $\alpha < x_0$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0, \alpha \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.
4. Montrer que $x_n \to \alpha$.
5. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$:

$$|g(x) - \alpha| \leqslant M|x-a|^2 \text{ où } M = \frac{\|f''\|_{C([a,b])}}{2f'(a)}.$$

6. Conclure que pour tout $n \geqslant 1$, $(x_n)_n$ converge et qu'il existe une constante M telle que :

$$0 \leqslant x_n - \alpha \leqslant (b-a)(M|x_0-\alpha|)^{2^n}.$$

7. Que faire si $M|x_0 - \alpha| > 1$?