Année 2018-2019

Mathématiques L3 (S5) – Méthodes d'analyse numérique. Mis à jour le 27 septembre 2018.

Exercice 1. Soit A une matrice carrée.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset D'(a_{ii}, \rho_i)$, avec $\rho_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}$, $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de la matrice A et $D'((a_{ii}, \rho_i)$ est le disque de Gerschgorin associé à la ligne i.
2. montrer que $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.
3. Trouver D diagonale telle que DBD^{-1} soit symétrique. Retrouver l'inversibilité de B.
4. Déterminer $\mathrm{Sp}(B)$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$.

1. Que peut-on dire sur ${}^tAA$, notamment sur ses valeurs propres ?
2. Pour λ valeur propre strictement positive de ${}^tAA$, on pose $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Soit alors Σ la matrice diagonale Diag$(\sigma_1, ..., \sigma_r)$. Montrer que $A = V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tU$ avec U et V des matrices orthogonales.

Exercice 3. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle, et b un vecteur non nul de $\mathbb{R}^N$.

1. Que vaut xb^T ?
2. Montrer que $x \longmapsto \| xb^T \|$ est une norme vectorielle compatible avec la norme matricielle.

Exercice 4. Soit A une matrice carrée quelconque. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle.

1. Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$.
2. Supposons A inversible. Montrer que $\mathrm{Cond}(A) \geq \dfrac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}$ où $\lambda_{\max}(A)$ et $\lambda_{\min}(A)$ désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de A, en module.

Exercice 5. Calculer numériquement les puissances de chacune de n ampoules alignées sur le plafond afin que l'éclairage du plancher juste en-dessous de chaque ampoule soit le même.

Exercice 6. En utilisant la factorisation LU, résoudre le système $Ax = b$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $b = (2, 1, 1)^T$.