Exercice 3 :

1. En notant $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\{1,\ldots,,\}}$ et $\mathbf{b} = (b_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, on trouve que $\mathbf{x}\mathbf{b}^T$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$ dont les coefficients m_{ij} sont définis par :
$$m_{ij} = x_i b_j$$

2. Notons $\varphi : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\mathbf{b}^T\|$. On veut montrer que :
   (a) φ est une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^N$,
   (b) cette norme est subordonnée à la norme matricielle $\|\cdot\|$, c'est à dire :
$$\forall A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \ ; \ \varphi(A\mathbf{x}) \leq \|A\|\varphi(\mathbf{x})$$

   (a) Puisque $\mathbf{b}$ est non nul et que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle :
$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\mathbf{b}^T\| = 0 \Leftrightarrow \forall i,j \ m_{ij} = x_i b_j = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$
   De plus, puisque $\|\cdot\|$ est une norme, on a l'absolut homogénéité :
$$\varphi(\lambda\mathbf{x}) = \|\lambda\mathbf{x}\mathbf{b}^T\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\mathbf{b}^T\| = |\lambda|\varphi(\mathbf{x})$$
   Finalement, puisque $\|\cdot\|$ est une norme, on a l'inégalité triangulaire :
$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{b}^T\| = \|\mathbf{x}\mathbf{b}^T + \mathbf{y}\mathbf{b}^T\| \leq \|\mathbf{x}\mathbf{b}^T\| + \|\mathbf{y}\mathbf{b}^T\| = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$$
   On en conclut que φ est une norme sur $\mathbb{R}^N$.

   (b) On rappelle une propriété des normes matricielles : $\forall A, B \ ; \ \|A\cdot B\| \leq \|A\| \ \|B\|$. Soient maintenant une matrice A et un vecteur $\mathbf{x}$ arbitraires.
$$\begin{aligned}\varphi(A\mathbf{x}) = & \ \|(A\mathbf{x})\mathbf{b}^T\| \\ = & \ \|A\cdot(\mathbf{x}\mathbf{b}^T)\| \\ = & \ \|A\cdot M\| \\ \leq & \ \|A\| \ \|M\| \\ = & \ \|A\|\varphi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

d'où la subordination.

Exercice 4 :

1. Notons λ_i les valeurs propres de A et $\mathbf{x}_i$ leurs vecteurs propres associés. On rappelle que le rayon spectral de A est défini de la façon suivante :
$$\rho(A) = \max_i\{|\lambda_i|\}$$
   On a $\|A\mathbf{x}_i\| \leq \|A\| \ \|\mathbf{x}\|$ puisque la norme matricielle est subordonnée à une norme vectorielle qu'on s'est permis de noter abusivement $\|\cdot\|$ pour des alléger les notations. En particulier :
$$\|A\mathbf{x}_i\| = \|\lambda_i\mathbf{x}_i\| = |\lambda_i| \ \|\mathbf{x}_i\| \leq \|A\| \ \|\mathbf{x}_i\|$$
   d'où on conclut que pour tout i, $|\lambda_i\| \leq \|A\|$; cette inégalité vaut en particulier pour la valeur propre ayant la plus grande valeur absolue, d'où :
$$\rho(A) \leq \|A\|$$

2. Si A est inversible, son conditionnement est bien défini :
$$\text{Cond}(A) = \|A\| \ \|A^{-1}\|$$
   Observons maintenant que $\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{x}_i = \frac{1}{\lambda_i}A^{-1}A\mathbf{x}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i}A^{-1}\mathbf{x}_i = A^{-1}\mathbf{x}_i$. Ceci signifie que les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A, et que les vecteurs propres associés sont les mêmes. en particulier, on peut observer que :
$$\rho(A^{-1}) = \frac{1}{\min_i\{|\lambda_i|\}}$$
   Concluons :
$$\text{Cond}(A) = \|A\| \ \|A^{-1}\| \geq \rho(A)\rho(A^{-1}) = \frac{\max\limits_i\{|\lambda_i|\}}{\min\limits_i\{|\lambda_i|\}}$$

Exercice 6 : Pour commencer, écrivons :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par identification, on trouve rapidement :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, on écrit $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = L\mathbf{y}$ et on résoud $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ puis $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

On laisse à l'élève le soin d'inverser les matrices :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{y} = L^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{x} = U^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$