Exercice 1.

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Même question pour la matrice $\tilde{A}$:
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+10^{-6} & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Donner la factorisation de Cholesky des deux matrices suivantes :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer deux itérations de Jacobi et une itération de Gauss-Seidel pour le système :
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a les itérations de Gauss et de Jacobi convergent-t-elles ?

Exercice 5. On souhaite résoudre un système de N équations $Ax = b$ par une méthode itérative, avec :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\overline{x}$ la solution exacte.

1. Calculer les valeurs propres de la matrice A.
2. Les méthodes de Gauss-Seidel et Jacobi convergent-elles ?
3. Calculer J, la matrice d'itération de la méthode de Jacobi (matrice qui vérifie $x_{n+1} - \overline{x} = J(x_n - \overline{x})$ à la n-ième itération de la méthode).

4. Que vaut le rayon spectral de J (noté $\rho(J)$) ?
5. Exprimer G, la matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel.
6. On peut montrer que

$$\rho(G) = 1 - \frac{\pi^2}{(N+1)^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

   Quelle méthode convergera le plus rapidement ?
7. On considère une méthode de relaxation, dont la matrice d'itération s'écrit :

$$(D - \omega E)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega F\right),$$

   avec $\omega \neq 0$

$$D = 2\mathrm{Id}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

   Pour $\omega = 1$, quelle autre méthode retrouve-t-on ?
8. L'idée des méthodes de relaxation est d'améliorer le taux de convergence en choisissant "bien" la valeur de ω. On note ω^* cette valeur optimale, qui, pour la matrice A s'écrit :

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}.$$

   Pour $\omega = \omega^*$, que vaut la matrice d'itération L_{ω^*} de la méthode de relaxation ?
9. On peut également montrer que

$$\rho(L_{\omega^*}) = 1 - \frac{2\pi}{N+1} + o(\frac{1}{N}).$$

   Conclure sur le taux de convergence des trois méthodes.