Correction TD3

Exercice 1 :

1. On peut remarquer que la matrice A est inversible, puisque son déterminant vaut -6. On rappelle qu'une matrice inversible admet une décomposition LU si et seulement si ses mineures principales dominantes ne sont pas nulles. Calculons la première mineure dominante principale :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

   d'où on conclut que la matrice A n'admet pas de décomposition LU. On peut éventuellement s'en convaincre en essayant de la décomposer à la main, c'est un bon exercice.

2. Notons $\alpha = 2 + 10^{-6}$. On vérifie que les mineures principales dominantes ne sont pas nulles :

$$1 > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 2 > 0$$

   d'où l'existence de la décomposition LU, qu'on s'empresse de calculer :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On trouve aisément, par identification :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10^{-6} & 0 \\ 4 & 2 & -6 \times 10^{6} + 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \times 10^{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Les matrices A_1 et A_2 étant toutes deux symétriques, il suffit de montrer qu'elles sont définies positives pour pouvoir affirmer que la décomposition de Cholesky existe. À cette fin, il suffit de calculer les mineures principales dominantes de chacune d'elles. Commençons par A_1 :

$$1 > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0 \quad ; \quad |A_1| = 64 > 0$$

La décomposition existe. Calculons-la :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = L_1 L_1^T$$

Par identification, on trouve :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Procédant de la même façon pour A_2, on trouve :

$$L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Décomposons la matrice A en la somme de sa partie diagonale et de ses parties triangulaires inférieure et supérieure : $A = L + D + U$, avec :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \; ; \; U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappelons brièvement les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi avec ces notations :

$$\text{Gauss-Seidel : } x^{k+1} = -(L+D)^{-1}Ux^k + (L+D)^{-1}b$$

$$\text{Jacobi : } x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^K + D^{-1}b$$

Nous avons par conséquent besoin de calculer deux inverses :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{pmatrix} \; ; \; (L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 1/15 & 1/9 & 0 \\ 1/21 & -1/63 & -1/7 \end{pmatrix}$$

De simples calculs matriciels, laissés à l'étudiant, donnent les résultats.

Exercice 4 : Rappelons les conditions de convergence pour chacune des méthodes :

Gauss-Seidel : $A > 0$ (définie positive)

Jacobi : $\rho(D^{-1}(L+U)) < 1$

On écrit : $A = D + L + U$, et on note $B = D^{-1}(L+U)$. Dans notre cas, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$\chi_B(\lambda) = |B - \lambda Id| = \begin{vmatrix} -\lambda & a & a \\ a & -\lambda & a \\ a & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda a^2 + 2a^3 = (\lambda + a)^2(\lambda - 2a)$$

Ses racines sont $-a$ et $2a$; ce sont les valeurs propres de B, par conséquent $\rho(B) = \max\{|-a|, |2a|\}$. Les valeurs de a pour lesquelles $\rho(B) < 1$ sont évidemment $a \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$. On peut noter que ce résultat coïncide avec celui résultant du critère concernant la diagonale strictement dominante.