

TD4 - TAN

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), n \leq m$.

1. Montrez que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A)$.
2. Que peut on en déduire sur la relation entre les rangs de A et de $A^T A$?
3. Montrez que la solution à l'équation :

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

est unique si et seulement si le rang de A est n .

4. Dans ce cas, donnez une expression de \mathbf{x} .
5. Supposons que $m = n$. Quelle est la relation entre $\text{Cond}(A)$ et $\text{Cond}(A^T A)$? Commentez.

Exercice 2 : Soit le système linéaire :

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculez la solution des moindres carrés de cette équation.
2. La décomposition LU ou la décomposition de Cholesky sont-elles pertinentes? Pourquoi?
3. Calculez l'erreur commise.