Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1981-1982 - exposé n° 23

RATIONALITÉ DE VALEURS SPÉCIALES DE CERTAINES FONCTIONS L

par

Norbert SCHAPPACHER

-:-.-:-

La situation, le but

Soient K un corps de type CM, $\varkappa$ son sous-corps maximal totalement réel. On notera $\rho : K \to K$ la conjugaison complexe sur K, et n le degré $[\varkappa : \mathbb{Q}]$. Pour la plupart des arguments qui suivent, on va supposer que $n > 1$, ce qui n'exclut qu'un cas bien connu, cf. [GS]. Soit T un CM-type de K. Pour faciliter quelques arguments algébriques à la fin de l'exposé, on va le supposer primitif (i. e., les variétés abéliennes à multiplication complexe du type (K, T) sont toutes simples).

On se donne un caractère de Hecke φ de K de type T, c'est-à-dire, que pour tout $\alpha \in K^*$ congru à 1 mod. le conducteur $\mathfrak{F}$ de φ, on a $\varphi(\alpha . \mathcal{O}_K) = \prod_{\tau \in T} \alpha^{\tau}$. On étudiera, pour tout entier positif k, la série L suivante

$$L(\bar{\varphi}^k, s) = \sum_{\substack{(\mathfrak{A}, \mathfrak{F})=1 \\ \mathfrak{A} \text{ entier}}} \bar{\varphi}^k(\mathfrak{A}) . N\mathfrak{A}^{-s} = \prod_{\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{F}} (1 - \bar{\varphi}^k(\mathfrak{P}) . N\mathfrak{P}^{-s})^{-1} ,$$

où $Re(s) > 1 + \frac{k}{2}$, et $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{P}$) décrit les idéaux entiers (resp. premiers) de K, premiers à $\mathfrak{F}$. Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle de ces séries L sont bien connus. On dit qu'un entier j est critique pour $\bar{\varphi}^k$, si les facteurs gamma intervenant aux deux côtés de l'équation fonctionnelle de $L(\bar{\varphi}^k, s)$ n'ont pas de pôle en $s = j$; (cf. [D], 1.3). On trouve que ce sont précisément les j avec $1 \leq j \leq k$, c'est-à-dire les points entiers dans ce qu'on appelle souvent la bande critique de notre fonction L : $0 < \mathrm{Re}(s) < 1+k$.

Une conjecture de Deligne exprime les valeurs $L(\bar{\varphi}^k, j)$ aux points critiques en termes de certaines périodes, à un facteur dans le corps des valeurs de $\bar{\varphi}^k$ près : (voir [D], 2.8). On va se rapprocher de cette conjecture en utilisant la décomposition des valeurs $L(\bar{\varphi}^k, j)$ en séries d'Eisenstein, valeurs de formes modulaires de Hilbert relatives à $\varkappa$, et en s'appuyant sur l'étude de ces séries dans le cadre de Katz, voir [K]. Les résultats qu'on obtient ici sont encore loin de la conjecture. Ceci est dû, en grande partie, au fait qu'on utilise des séries d'Eisenstein très classiques dont la traduction, en langage de [K], est un peu lourde. J'espère revenir sur ce point ailleurs.

Par l'équation fonctionnelle et l'application de certains opérateurs différentiels, on se ramène au

CAS CLÉ. - Etude des $L(\bar{\varphi}^k, k)$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$.

<u>La décomposition en séries d'Eisenstein</u>

Soit $\mathfrak{B}$ un idéal entier de K premier à $\mathfrak{F}$. Au lieu de $L(\bar{\varphi}^k, k)$, nous allons en fait étudier la série partielle

$$L(\bar{\varphi}^k, \mathfrak{B}, s) = \sum_{\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}^{-1}} \bar{\varphi}^k(\mathfrak{A}) . N\mathfrak{A}^{-s} ,$$

prise en $s = k$ (par prolongement analytique, si $k < 3$), où $\mathfrak{A}$ décrit les idéaux entiers dans le rayon de $\mathfrak{B}^{-1}$ mod. $\mathfrak{F}$.

Choisissons un élément w de K tel que :

$$K = \varkappa(w) ;$$

$$\mathrm{Im}(w^{\tau}) > 0 , \text{ pour chaque plongement } \tau : K \hookrightarrow \mathbb{C} \text{ appartenant à } T .$$

Avec ce choix de w, soient $\mathfrak{a}$ un idéal fractionnaire et $\mathfrak{g}$ un idéal entier de $\varkappa$, tels qu'on ait ces inclusions de $\mathfrak{O}_{\varkappa}$-réseaux dans K :

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{g}.w \subset \mathfrak{J}.\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{a}.w \;.$$

En particulier, $\mathfrak{J}$ divise $\mathfrak{g}.\mathfrak{O}_K$.

On notera z la variable sur le demi-plan supérieur généralisé attaché à $\varkappa$,

$$\mathfrak{H} = \{x \in \varkappa \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(x) \gg 0\} \;.$$

$K = \varkappa(w)$ est plongé dans $\mathfrak{H}$ par T. On écrit

$$\mathfrak{N} : (\varkappa \otimes \mathbb{C})^{*} \longrightarrow \mathbb{C}^{*}$$

l'application déduite de la norme absolue de $\varkappa$, i.e., le "produit des conjugués".

Etant donnés $a, b \in \mathfrak{A}$ et $z \in \mathfrak{H}$, écrivons $X_z^{(a,b)}$ la fonction caractéristique du sous-ensemble

$$(a+bz) + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{g}.z)$$

de $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}.z$.

Avec ces notations, les séries d'Eisenstein introduites par Hecke et Kloostermann dans les années vingt s'écrivent :

$$E_k^{(a,b)}(z) = \sum_{(\alpha)_{\mathfrak{g}}^{+} \in 2\pi i(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\,z)} X_z^{(a,b)}\left(\frac{\alpha}{2\pi i}\right).\mathfrak{N}\alpha^{-k}.\left|\mathfrak{N}\alpha\right|^{-s}\Big|_{s=0} \;,$$

la somme étant prise sur les éléments du réseau indiqué, modulo l'action des unités de $\varkappa$ totalement positives et congrues à 1 modulo $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{O}_{\varkappa,\mathfrak{g}}^{*,+}$.

Alors on trouve sans difficulté (cf. [S 2], § 3) la décomposition :

$$\frac{[\mathfrak{O}_{K,\mathfrak{J}}^{*} : \mathfrak{O}_{\varkappa,\mathfrak{g}}^{*,+}]}{\varphi^k(\mathfrak{B})} \cdot L(\bar{\varphi}^k, \mathfrak{B}, k) = \sum_{\substack{(a+b\,w)_{\mathfrak{g}}^{+} \in \mathfrak{B} \\ a+b\,w \equiv 1\ (\mathfrak{J})}} (2\pi i)^{kn}\, E_k^{(a,b)}(w) \;.$$

Propriétés des $E_k^{(a,b)}$

Les séries d'Eisenstein de Hecke et Kloostermann sont des formes modulaires de Hilbert de poids k sur

$$\Gamma(\mathfrak{g}) = \{ \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{g} & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} & 1+\mathfrak{g} \end{pmatrix} \} \cap SL_2(\varkappa) .$$

(Elles sont toutes holomorphes à cause de notre hypothèse que $\varkappa \neq \mathbb{Q}$.)

En fait, on trouve pour une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}_\varkappa)$,

$$E_k^{(a,b)}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = E_k^{A.\binom{a}{b}}(z) \, . \, \mathfrak{N}(\gamma z + \delta)^k .$$

En plus, Hecke et Kloostermann ont explicitement calculé les coefficients du "q-développement"

$$E_k^{(a,b)}(z) = a_o(k\,;a,b) + \sum_{\substack{\alpha \in (\mathfrak{g}\mathfrak{d})^{-1} \\ \alpha \gg 0}} a_\alpha(k\,;a,b)\, \mathbf{e}(\operatorname{tr} \alpha z) ,$$

où $\mathfrak{d}$ est la différente de $\varkappa$ sur $\mathbb{Q}$.

Les propriétés de rationalité des $a_\alpha(k\,;a,b)$, pour $\alpha \gg 0$, sont évidentes à partir de leurs expressions explicites. D'autre part, c'est un fait non-trivial que le terme constant se comporte de la même façon :

THÉORÈME (Klingen et Siegel). - Pour tout α ,

$$\sqrt{d} \, . \, a_\alpha(k\,;a,b) \in \mathbb{Q}(\mu_g) ,$$

où d est le discriminant de $\varkappa$, et g est le plus petit entier positif contenu dans $\mathfrak{g}$.

Traduction dans le cadre de Katz

Pour une exposition de la théorie des formes modulaires de Hilbert selon Katz, nous renvoyons au premier chapitre de [K] , et au § 5 de [DR] . Nous allons considérer des formes sur $\Gamma_{oo}(f)$ au sens de [DR], p. 266/267.

En fixant le triplet $((\mathfrak{a}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{b})^{-1}, \mathfrak{a}, \varepsilon)$ comme paramètre d'une "pointe", où ε est un isomorphisme quelconque de $\mathfrak{g}^{-2}/\mathcal{O}_{\varkappa}$ sur $\mathfrak{g}^{-2}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{b})$, on trouve alors (par une proposition analogue à [DR], 5.7) un élément $\widetilde{E}_k^{(a,b)}$ de $\mathfrak{M}_k(\Gamma_{oo}(\mathfrak{g}^2), \mathbb{C})$, dont la valeur prise en le réseau $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,.\,w)$, muni d'une polarisation λ et d'une structure de niveau $i(\varepsilon)$ adaptées à la pointe donnée, est précisément le nombre

$$(2\pi i)^{kn}\, E_k^{(a,b)}(w)\ .$$

Or, d'après le théorème de Klingen et Siegel, joint au "principe du q-développement", $E_k^{(a,b)}$ appartient en fait à $\mathfrak{M}_k(\Gamma_{oo}(\mathfrak{g}^2), \mathbb{Q}(\mu_g))$. Pour déduire des renseignements de rationalité sur sa valeur en $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,.\,w)$, il s'agit donc de trouver une variété abélienne de Hilbert-Blumenthal (i.e., dont l'anneau d'endomorphismes contient $\mathcal{O}_{\varkappa}$) définie sur un "petit" corps de nombres, et qui est isomorphe à $\mathbb{C}^T/(\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,.\,w)$ sur $\mathbb{C}$. Pour cela, on va puiser dans la théorie des variétés abéliennes à multiplication complexe :

Comment algébrifier le réseau $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,.\,w)$?

Soit $F' \subset \mathbb{C}$ le corps de modules d'une variété abélienne polarisée à multiplication complexe, de type $(K, T, \mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,.\,w, \lambda)$. (Voir, par exemple, [S1], § 3.) C'est une extension finie du corps réflex K' de (K,T). Avec un peu de chance, on trouve la variété abélienne souhaitée définie sur F'. Plus précisément, parfois la condition (5.2) de [S1] est satisfaite par $(\mathfrak{a}\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,.\,w) \subset K$: voir, par exemple, [S1], proposition 7 et la remarque suivante. Et elle permet de construire une variété abélienne A sur F', de type CM (K, T), qui est isomorphe à $\mathbb{C}^T/(\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} + \mathfrak{a}\,.\,w)$ sur $\mathbb{C}$, et telle que la polarisation λ provienne d'une polarisation rationnelle sur F'.

Si la situation n'est pas aussi favorable et que la condition (5.2) de [S1] ne peut pas être vérifiée, il faut se contenter d'un corps F'' plus large que F' comme corps de définition de A. Celui-ci peut être construit, par exemple, en utilisant le théorème de Casselman ([S1], th. 6) avec, comme point de départ, un caractère de la forme $\varphi' \circ N_{F''/K'}$, où φ' est un caractère de Hecke (pris au hasard) de type (K', T'), réflex de (K,T).

En tout cas, étant donnée une variété abélienne de type $(K, T, \mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{a}.w, \lambda)$ définie sur une extension convenable F de K', fixons une forme différentielle ω définie sur F qui est une base de $H^0(A, \Omega^1_{/F})$ sur $\mathfrak{O}_\varkappa \otimes F$. F étant plongé dans $\mathbb{C}$, le couple (A, ω) correspond à un réseau bien déterminé $\Omega(\mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{a}.w) \subset \mathbb{C}^T$, avec $\Omega \in (\varkappa \otimes \mathbb{C})^*$.

Alors on voit finalement, qu'on a obtenu le

THÉORÈME :

$$\frac{1}{\sqrt{d}.\mathfrak{N}\,\Omega^k} \cdot L(\bar{\varphi}^k, \mathfrak{B}, k) \in F(A_{\mathfrak{g}^2}, \varphi^k) .$$

Ici on a ajouté à F les coordonnées des points de $\mathfrak{g}^2$-torsion de A, pour garantir la rationalité de la structure de niveau $i(\varepsilon)$ attachée à $(\mathfrak{a}\mathfrak{g}+\mathfrak{a}.w)$, et les valeurs de φ^k, dont une apparaît dans la décomposition en séries d'Eisenstein de la fonction L partielle. Le corps de rationalité des séries d'Eisenstein, $\mathbb{Q}(\mu_g)$, est déjà contenu dans $F(A_{\mathfrak{g}^2})$.

Si l'on fait la comparaison entre ce théorème dans le cas de dimension 1 (i.e., $\varkappa = \mathbb{Q}$: le cas exclu pour la démonstration présentée ici) et les résultats précis connus dans ce cas -voir [GS]-, on voit qu'on a attrapé le bon corps de rationalité des séries partielles, à ceci près que $\mathfrak{g}^2$ peut être remplacé par $\mathfrak{g}$: ce carré, nous l'avons perdu ici dans la traduction des séries d'Eisenstein classiques dans le cadre de Katz. D'autre part, nous ne connaissons pas suffisamment bien les $\tilde{E}_k^{(a,b)}$ -de nouveau : parce qu'ils ont été construits dans un cadre différent- pour étudier le comportement sous Galois des nombres dont nous venons de construire un corps de rationalité.

Pour conclure, écrivons le résultat qu'on obtient du théorème en appliquant les opérateurs différentiels étudiés en [S 2] et [K], ch. II.

COROLLAIRE. - Si $0 < \frac{k}{2} < j \leq k$, alors

$$\frac{(2\pi i)^{k-j}}{\sqrt{d}.\,\mathfrak{N}\,\Omega^k}\, L(\bar{\varphi}^k, \mathfrak{B}, j) \in K^{gal}.\, F(A_{\mathfrak{g}^2}, \varphi^k) ,$$

où K^{gal} est la clôture normale sur $\mathbb{Q}$ de K.

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[D] P. DELIGNE, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales ; Proc. Symp. Pure Math., vol. 33 (1979), part 2, 313-346.

[DR] P. DELIGNE et K. RIBET, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields ; Inventiones math. 59 (1980), 227-286.

[GS] C. GOLDSTEIN et N. SCHAPPACHER, Séries d'Eisenstein et fonctions L de courbes elliptiques à multiplication complexe, Crelle 327 (1981), 184-218.

[K] N. KATZ, p-adic L-functions for CM-fields, Inventiones math. 49 (1978), 199-297.

[S1] G. SHIMURA, On the zeta-function of an abelian variety with complex multiplication, Ann. of Math. 94 (1971), 504-533.

[S2] G. SHIMURA, On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables, Ann. of Math. 102 (1975), 783-804.

(texte reçu le 23 août 1982)

-:-:-:-:

Norbert SCHAPPACHER
Mathematisches Institut der
Universität
Bunsenstr. 3-5
D-3400 GÖTTINGEN
R.F.A.