

PROPRIÉTÉS DE RATIONALITÉ DE VALEURS SPÉCIALES
DE FONCTIONS L ATTACHÉES AUX CORPS CM

N. SCHAPPACHER

Soit (K, T) un "type CM", c'est-à-dire que K est un corps de nombres totalement imaginaire, extension quadratique d'un corps totalement réel k , et que T est un ensemble de $n = [k:\mathbb{Q}]$ plongements de K dans $\mathbb{C}$ qui induisent tous les plongements différents de k dans $\mathbb{R}$.

Soit φ un caractère de Hecke de K , "de type T " : Si $\mathfrak{f}$ est le conducteur de φ , et que $\alpha \in K^*$ est congru à 1 modulo $\mathfrak{f}$, alors $\varphi(\alpha \mathfrak{O}_K) = \prod_{\tau \in T} \alpha^\tau$.

Pour les entiers $j \geq 1$ nous allons étudier la fonction L donnée pour $\text{Re}(s) > 1 + \frac{j}{2}$ par

$$L(\bar{\varphi}^j, s) = \sum_{(\mathfrak{u}, \mathfrak{f})=1} \bar{\varphi}^j(\mathfrak{u}) \cdot N\mathfrak{u}^{-s} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\bar{\varphi}^j(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1},$$

où $\mathfrak{u}$ (resp. $\mathfrak{p}$) décrit les idéaux entiers (resp. premiers) de K , premiers à $\mathfrak{f}$. (On considère le conjugué complexe de φ^j pour des raisons de normalisation qui n'apparaîtront que plus tard, en particulier dans la décomposition de la fonction L en séries d'Eisenstein). Rappelons que $L(\bar{\varphi}^j, s)$ peut être prolongée à tout le plan complexe en satisfaisant à une équation fonctionnelle reliant les valeurs en s et en $j+1-s$.

D'après Deligne [D], les points $s=i$ pour lesquels on attend un résultat de rationalité pour la valeur $L(\bar{\varphi}^j, i)$, divisée par une "période" convenable, sont les entiers i (appelés "critiques") tels que les facteurs gamma des deux

côtés de l'équation fonctionnelle n'aient pas de pôles en $s=i$. Mis à part le cas $i = \frac{j+1}{2}$ (la coordonnée de l'axe de symétrie de l'équation fonctionnelle), si c'est un entier, il s'agit d'entiers i tels qu'on ait nécessairement

$$L(\bar{\varphi}^j, i) \neq 0 \neq L(\bar{\varphi}^j, j+1-i).$$

On trouve facilement que les entiers critiques pour $\bar{\varphi}^j$ sont les i tels que $1 \leq i \leq j$. Grâce à l'équation fonctionnelle, il suffit d'en étudier la moitié : $j/2 < i \leq j$.

Dans ce cas, Deligne précise une période $c \in \mathbb{C}^*$ attachée à $\bar{\varphi}$, telle que la relation suivante soit conjecturée (en fait, simultanément pour tous les caractères $\bar{\varphi}^\sigma$, pour $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$) - voir [D], 2.8 et [GS], §9):

$$\text{Si } 0 < j/2 < i \leq j, \text{ alors } \frac{(2\pi i)^{j-i}}{\sqrt{d_k} \cdot c^j} L(\bar{\varphi}^j, i) \in \mathbb{Q}(\varphi^j).$$

Ici, d_k est le discriminant de k sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\varphi^j)$ est le corps de nombres engendré par les valeurs de φ^j .

Le but de cet exposé est de présenter une technique de démonstration pour cette conjecture. Toutefois je ne la démontre pas ici, voir le §4, où je donne des rapprochements successifs. Les difficultés qui subsistent sont probablement liées au fait, qu'on ne sait pas encore raffiner de façon adéquate les calculs faits (à $\bar{\mathbb{Q}}^*$ près) dans [D], aux alentours de la proposition 8.20.

Pendant tout ce qui suit, on ne considère que le cas clé : $j=i \gg 1$. La conjecture que je viens d'esquisser se déduit formellement de ce cas particulier ; et la théorie de certains opérateurs différentiels algébriques permet d'étendre les résultats obtenus par la méthode suivie ici aux i tels que $j/2 < i \leq j$: [K2], chap. II.

Mentionnons que Harder a récemment développé une méthode très générale et puissante pour la démonstration de résultats de rationalité de valeurs spéciales de fonctions L . Voir par exemple sa contribution dans ce volume. Il serait inté-

ressant de mieux comprendre les analogies de ces deux voies d'accès à certaines valeurs spéciales de fonctions L .

Je remercie N. Katz et K. Ribet de m'avoir expliqué quelques points de la théorie algébrique des formes modulaires de Hilbert.

Table des matières

- §1. FORMES MODULAIRES DE HILBERT
- §2. SERIES D'EISENSTEIN
- §3. DECOMPOSITION DES $L(\bar{\varphi}^j, j)$ EN SERIES D'EISENSTEIN
- §4. DES VARIETES ABELIENNES A MULTIPLICATION COMPLEXE

§1. FORMES MODULAIRES DE HILBERT.

On aura besoin d'une variante de la théorie algébrique des formes modulaires de Hilbert, assez analogue à celle exposée au premier chapitre de [K2] et au §5 de [DR]. Pendant tout ce paragraphe, je fais tacitement appel à ces deux articles.

1.0. Soient k un corps de nombres totalement réel, $\mathbb{O}$ son anneau d'entiers, $n = [k:\mathbb{Q}]$ son degré et $\mathfrak{d}$ sa différentielle sur $\mathbb{Q}$. On suppose que $k \neq \mathbb{Q}$.

1.1. Soient R une $\mathbb{Q}$ -algèbre et A une variété abélienne de dimension n sur R , à multiplication réelle par $\mathbb{O}$. L'espace tangent $\text{Lie}(A/R)$ est donc un $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{Z}} R$ -module libre de rang 1 (cf. [R], §1). On notera ω une base choisie du $\mathbb{O} \otimes R$ -module des différentielles de première espèce de A définies sur R .

Soit N un entier positif. Une structure arithmétique de niveau N de A/R est un isomorphisme $\mathbb{O}$ -linéaire

$$\eta : (N^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1})(1) \times N^{-1}\mathbb{O}/\mathbb{O} \xrightarrow{\sim} A(R)_N,$$

où $A(R)_N$ est le $\mathbb{O}$ -module des points de N -torsion de A rationnels sur R . La notation $(N^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1})(1)$ signifie le "twist à la Tate" : $(N^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1})(1) = \mathfrak{d}^{-1} \otimes \mu_N$. J'appellerai η simplement une $\Gamma(N)$ -structure de A (sur R) - cf. [K1], Chap. II.

Les composantes connexes de l'espace grossier de modules des variétés abéliennes (polarisées) à multiplication par $\mathbb{Q}$ correspondent de façon biunivoque aux classes restreintes d'idéaux de k . Cette correspondance est fournie par le $\mathbb{Q}$ -module projectif de rang 1, $P(A)$, des homomorphismes $\mathbb{Q}$ -linéaires symétriques de A à sa variété duale $\hat{A}$, muni de la notion de positivité définie par le cône des polarisations, $P_+(A)$ (voir [R], §1). Ceci amène à considérer les polarisations de nos variétés abéliennes "à l'action de $\mathbb{Q}$ près". Plus précisément, étant donné un idéal fractionnaire c de k , on appelle c -polarisation de A un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ -modules avec positivité

$$\alpha : (P(A), P_+(A)) \xrightarrow{\sim} (c, \{c \in c \mid c \gg 0\}) .$$

La classe restreinte de c est donc bien déterminée par A .— Quoi qu'il en soit, les polarisations ne joueront aucun rôle essentiel dans nos constructions.

1.2. Une forme modulaire de Hilbert f de type c sur $\Gamma(N)$ de poids j définie sur R_0 (qui, dans cet exposé, sera toujours un corps de caractéristique zéro) associe à chaque quadruplet $(A, \alpha, \omega, \eta)$ défini sur une R_0 -algèbre R une valeur $f(A, \alpha, \omega, \eta)$, telle que :

- cette valeur ne dépende de $(A, \alpha, \omega, \eta)$ qu'à R -isomorphisme près ;

- l'évaluation en $(A, \alpha, \omega, \eta)$ commute avec des homomorphismes arbitraires de R_0 -algèbres, $R \longrightarrow R'$, et l'extension des scalaires correspondante ;

- pour tout $\lambda \in (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} R)^*$ on ait :

$$f(A, \alpha, \lambda^{-1}\omega, \eta) = (\mathcal{P}\lambda)^j f(A, \alpha, \omega, \eta) .$$

Ici, $\mathcal{P} : (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} R)^* \longrightarrow R^*$ est l'application déduite de la norme $k^* \longrightarrow \mathbb{Q}^*$.

1.3. Voici l'interprétation analytique de ce cadre sur $\mathbb{C}$: un couple (A, ω) se traduit comme un $\mathbb{Q}$ -réseau $\mathcal{L}$ dans $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, de sorte que $\mathcal{L}$ soit l'image par

$\omega : \text{Lie}(A^{\text{an}}) \longrightarrow k \otimes \mathbb{C}$ du groupe fondamental $\pi_1(A^{\text{an}})$ du tore complexe A^{an} donné par A . Une c -polarisation α devient alors une forme alternée $\mathbb{Q}$ -bilineaire $\beta : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathfrak{d}^{-1}c^{-1}$ identifiant $\mathcal{L}_{\mathfrak{G}}^2$ avec $\mathfrak{d}^{-1}c^{-1}$. Enfin, comme l'exponentielle nous donne un isomorphisme privilégié sur $\mathbb{C}$ entre $N^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ et μ_N , une $\Gamma(N)$ -structure arithmétique sur $\mathcal{L}$ devient simplement un isomorphisme $\mathbb{Q}$ -linéaire

$$\eta : N^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \times N^{-1}\mathfrak{G}/\mathfrak{G} \xrightarrow{\sim} N^{-1}\mathcal{L}/\mathcal{L}.$$

De ce point de vue, une forme modulaire de Hilbert f de poids j sur $\Gamma(N)$ définie sur $\mathbb{C}$ est une fonction analytique de triplets $(\mathcal{L}, \beta, \eta)$ telle que, pour $\lambda \in (k \otimes \mathbb{C})^*$, on ait

$$f(\lambda^{-1}\mathcal{L}, \lambda\bar{\lambda}.\beta, \lambda^{-1}\eta) = \lambda^j.f(\mathcal{L}, \beta, \eta).$$

1.4. Chaque réseau muni d'une c -polarisation, $(\mathcal{L}, \beta)$, est isomorphe à un réseau de la forme

$$\mathcal{L}_{a,b}(z) = 2\pi i(\mathfrak{d}^{-1}a^{-1} + bz)$$

muni de la polarisation canonique

$$\beta_{a,b}(2\pi i(a+bz), 2\pi i(c+dz)) = ad-bc,$$

où a, b sont des idéaux fractionnaires de k tels que $ab^{-1} = c$, et z est un élément du demi plan supérieur attaché à k :

$$\mathfrak{H} = \{z \in k \otimes \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \gg 0\}.$$

De plus, chaque isomorphisme

$$\varepsilon : (N^{-1}\mathfrak{G}/\mathfrak{G})^2 \xrightarrow{\sim} N^{-1}a^{-1}/a^{-1} \times N^{-1}b/b$$

induit (en tensorisant par $\mathfrak{d}^{-1}$ dans la première composante) une $\Gamma(N)$ -structure de $\mathcal{L}_{a,b}(z)$, notée $\eta(\varepsilon)$.

Les paramètres a, b et ε étant fixés, une forme modulaire f de poids j sur $\Gamma(N)$ définie sur $\mathbb{C}$ fournit une

fonction holomorphe $f_{a,b,\varepsilon}$ sur $\mathfrak{H}$, invariante par l'opération

$$(f_{a,b,\varepsilon} | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(z) = \mathcal{N}(cz+d)^{-j} f_{a,b,\varepsilon} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right),$$

si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $\Gamma(N; a, b) = \text{SL}_2(k) \cap \begin{pmatrix} 1+N\mathfrak{O} & N(ab\mathfrak{d})^{-1} \\ N(ab\mathfrak{d}) & 1+N\mathfrak{O} \end{pmatrix}$.

Il s'agit là, en fait, d'une correspondance biunivoque

$$f \mapsto f_{a,b,\varepsilon}.$$

1.5. Cette observation entraîne en particulier l'existence, sur $\mathbb{C}$, d'un développement de Fourier de f (ou de $f_{a,b,\varepsilon}$), de la forme bien connue depuis les travaux de Blumenthal, Hecke et Kloostermann :

$$f(\mathcal{L}_{a,b}(z), \beta_{a,b}, \eta(\varepsilon)) = f_{a,b,\varepsilon}(z) = a_0(f; a, b, \varepsilon) +$$

$$\sum_{\substack{v \in \mathfrak{a}_b \\ v > 0}} a_v(f; a, b, \varepsilon) e(\text{tr}(\frac{vz}{N})),$$

où $e(\tau) = \exp(2\pi i \tau)$. On écrit parfois q_N^v au lieu de $e(\text{tr}(\frac{vz}{N}))$.

Rappelons que les réseaux $\mathcal{L}_{a,b}(z)$ et, par conséquence, les "développements de Fourier" peuvent être algébrisés par des variétés abéliennes $A_{a,b}(q)$ sur un anneau de séries formelles en q_N , analogues à la courbe de Tate du cas elliptique. Après extension de scalaires par une $\mathbb{Q}$ -algèbre on trouve une base canonique $\omega_{a,b}$ des différentielles sur $A_{a,b}(q)$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow a^{-1}b^{-1} \otimes \mu_N \longrightarrow (A_{a,b}(q))_N \longrightarrow N^{-1}b/b \longrightarrow 0$$

permet de tirer une $\Gamma(N)$ -structure $\eta(\varepsilon)$ sur $A_{a,b}(q)$ de chaque isomorphisme ε comme avant.

Terminons ce paragraphe par le théorème qui justifie en quelque sorte la construction esquissée d'une théorie algébrique des formes modulaires de Hilbert :

1.6. "Principe du développement de Fourier".

(i) Si le développement de Fourier attaché à un triplet de paramètres (a, b, ε) d'une forme modulaire f de type $c = ab^{-1}$ sur $\Gamma(N)$ définie sur la $\mathbb{Q}$ -algèbre R_0 est zéro, alors $f = 0$.

(ii) Si, avec les mêmes notations, les coefficients du développement de f en (a, b, ε) appartiennent tous à une sous-algèbre R_{00} de R_0 , alors f provient, par extension de scalaires, d'une forme définie sur R_{00} .

(iii) Dans (ii), il suffit de supposer que les coefficients non-constants appartiennent à R_{00} . Alors le terme constant, lui aussi, appartient à R_{00} .

La partie (iii) se déduit du premier théorème de [K1].
- Pour (i) et (ii), cf. [R], 6.7.

§2. SÉRIES D'EISENSTEIN.

Fixons un idéal c de k (comme module de polarisation), et deux entiers positifs N et j . Notons d_k le discriminant de k sur $\mathbb{Q}$.

2.1. THÉORÈME. Soit $F : N^{-1}b^{-1}/b^{-1} \times N^{-1}\mathfrak{O}/\mathfrak{O} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction "de parité $(-1)^j$ ", c'est-à-dire que, pour toute unité $e \in \mathfrak{O}^*$, on a $F(ex, ey) = (de)^j F(x, y) = (de)^{-j} F(x, y)$. Alors la formule (cf. 1.3)

$$E_{j,F}(s, \beta, \eta) = \sum_{\substack{a \in N^{-1}\mathfrak{O} \\ a \bmod \mathfrak{O}^*}} \frac{F(\eta^{-1}(a+s))}{d^j a^j |da|^{2s}} \Big|_{s=0}$$

(où la valeur à droite est calculée par prolongement analytique en s , si $j=1$ ou 2) définit une forme modulaire du type c de poids j sur $\Gamma(N)$ définie sur $\mathbb{C}$.

En fait, son développement de Fourier en (a, b, ε) [cf. 1.5] vaut :

$$E_{j,F}(\mathcal{L}_{a,b}(z), \beta_{a,b}, \eta(\varepsilon)) = \frac{d^a \sqrt{d_k} (-1)^{jn}}{(j-1)!^n} \left\{ a_0(a, b, \varepsilon) + \sum_{\substack{v \in a, b \\ v \gg 0}} a_v(a, b, \varepsilon) a_N^v \right\},$$

où, pour $v \gg 0$,

$$a_v(a, b, \varepsilon) = \sum_{\substack{v = \lambda \mu \\ \lambda \in a, \mu \in b \\ \mu \bmod \mathfrak{G}^*}} \text{sgn}(\mathcal{M}\lambda) (\mathcal{M}\lambda)^{j-1} \hat{F}_\varepsilon(\lambda, \mu),$$

avec

$$\hat{F}_\varepsilon(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^{-1} a^{-1} b^{-1} \\ a^{-1} b^{-1}}} F(\eta(\varepsilon)^{-1} (a + \frac{\mu}{N} z)) e(\text{tr}(\lambda a)).$$

(Nous n'explicitons pas ici le terme constant, bien que ceci ne soit pas difficile).

La démonstration de ce théorème peut être laissée au lecteur, car elle ne présente aucune nouveauté essentielle par rapport à [K], (3.2) et [DR], §6. - Rappelons que les calculs remontent à Hecke.

Les formules explicites des coefficients de Fourier, jointes à la version la plus forte du principe du développement de Fourier, 1.5 (iii), donnent immédiatement le

2.2. THÉORÈME. Pour tout F , $\sqrt{d_k} E_{j,F}$ "est" une forme modulaire définie sur le corps $\mathbb{Q}(\mu_N, F)$, le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant les valeurs de F et les N -ièmes racines de l'unité.

2.3. Remarque. Les valeurs des séries d'Eisenstein construites ci-dessus ne dépendent pas, en fait, de la c -polarisation β . La construction est donc "la même" pour toutes les composantes connexes de l'espace de modules de nos variétés abéliennes.

§3. DÉCOMPOSITION DES $L(\bar{\varphi}^j, j)$ EN SÉRIES D'EISENSTEIN.

Nous revenons aux notations de l'introduction.

Soit N le plus petit entier positif contenu dans le conducteur $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{o}_K$ du caractère de Hecke φ .

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble d'idéaux entiers de K premiers à N représentant les classes d'idéaux de K .

Alors on trouve pour $\text{Re}(s)$ assez grand :

$$L(\bar{\varphi}^j, s) = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{C}} \frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{u})^s}{\bar{\varphi}^j(\mathfrak{u})} \sum_{\substack{a \in \mathfrak{u} \\ a \bmod \mathfrak{o}_K^*}} \frac{\bar{\varphi}^j(a \mathfrak{o}_K)}{N_{K/\mathbb{Q}}(a)^s}.$$

Posons $\chi(a) = \frac{\bar{\varphi}(a \mathfrak{o}_K)}{\mathcal{N}\bar{a}}$, pour $a \in K$ (avec $\chi(a) = 0$, si $(a, N) \neq 1$). Ici, K est plongé dans $k \otimes \mathbb{C}$ par T , le type CM de φ , de sorte que $\mathcal{N}\bar{a} = \prod_{\tau \in T} \bar{a}^\tau = \prod_{\tau \notin T} a^\tau$. On obtient alors, en considérant le caractère $\bar{\varphi}^j$ comme étant défini modulo N :

$$\begin{aligned} L(\bar{\varphi}^j, s) &= \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{C}} \frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{u})^s}{\bar{\varphi}^j(\mathfrak{u})} \sum_{\substack{a \in \mathfrak{u} \\ a \bmod \mathfrak{o}_K^*}} \frac{\chi^j(a)}{\mathcal{N}a^j |\mathcal{N}a|^{2(s-j)}} \\ &= \frac{N^{n(j-2s)}}{[\mathfrak{o}_K^* : \mathfrak{o}^*]} \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{C}} \frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{u})^s}{\bar{\varphi}^j(\mathfrak{u})} \sum_{\substack{a \in N^{-1}\mathfrak{u} \\ a \bmod \mathfrak{o}^*}} \frac{\chi^j(Na)}{\mathcal{N}a^j |\mathcal{N}a|^{2(s-j)}} \end{aligned}$$

Or, $a \mapsto \chi(Na)$ induit une fonction sur $N^{-1}\mathfrak{u}/\mathfrak{u}$. Etant donnée une $\Gamma(N)$ -structure η sur $\mathfrak{u}$, on peut donc poser, pour tout $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{u}, \eta) : N^{-1}\mathfrak{b}^{-1}/\mathfrak{b}^{-1} \times N^{-1}\mathfrak{o}/\mathfrak{o} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \chi^j(N \cdot \eta(x, y)). \end{aligned}$$

Ceci donne finalement, dans les notations du §2 :

$$(3.1) \quad \frac{[\mathfrak{O}_K^* : \mathfrak{O}^*] N^{jn}}{\sqrt{d}_k} L(\bar{\varphi}^j, j) = \sum_{\mathfrak{u} \in \mathbb{C}} \frac{\varphi^j(\mathfrak{u}) E_{j, F(\mathfrak{u}, \eta)}(\mathfrak{u}, \beta, \eta)}{\sqrt{d}_k},$$

où β est n'importe quelle polarisation du réseau $\mathfrak{u}$.

Les numérateurs des termes de la somme à droite sont les valeurs en $s=j$ des fonctions L partielles de $\bar{\varphi}^j$ relatives aux classes des $\mathfrak{u}^{-1}$, pour $\mathfrak{u} \in \mathbb{C}$.

§4. DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES A MULTIPLICATION COMPLEXE.

La théorie des variétés abéliennes à multiplication complexe nous permet d'algébriser les réseaux $\mathfrak{u} \in \mathbb{C}$ qui apparaissent dans 3.1 et ensuite, d'étudier le comportement sous Galois des variétés qu'on a obtenues. Je présente dans ce paragraphe une suite de résultats de plus en plus précis.

4.1. Soit $\mathfrak{u}$ un idéal de K . On note $H(\mathfrak{u}) \subset \mathbb{C}$ le corps des modules de n'importe quelle variété abélienne polarisée de type CM (K, T) définie sur $\mathbb{C}$, isomorphe à $\mathbb{C}^T/\mathfrak{u}$: voir [S1], §3. C'est une extension abélienne non-ramifiée du corps réflex de (K, T) (mais nous allons utiliser très peu ce côté de la théorie). Partant d'un certain caractère de Hecke du corps réflex de (K, T) , on démontre qu'il existe une variété abélienne $A(\mathfrak{u})$ sur $H(\mathfrak{u})$ de type CM (K, T) qui, après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, est isomorphe sur $\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}^T/\mathfrak{u}$: voir [S1], §5, en particulier la phrase suivant la proposition 7.

Choisissons une forme différentielle $\omega(\mathfrak{u})$ sur $A(\mathfrak{u})$ définie sur $H(\mathfrak{u})$, base du $\mathfrak{O} \otimes H(\mathfrak{u})$ -module $H^0(A(\mathfrak{u}), \Omega^1)$. Soit $\alpha(\mathfrak{u})$ une polarisation sur $A(\mathfrak{u})$ dans le sens de 1.1 : c'est une $(N_{K/k} \mathfrak{u}) \cdot b$ -polarisation, pour un idéal b de k dont la classe restreinte est un invariant de l'extension K/k .

Alors

$$(A(\mathfrak{U}), \omega(\mathfrak{U}), \alpha(\mathfrak{U})) \cong (\mathbb{C}^T / \Omega(\mathfrak{U})\mathfrak{U}, \beta(\mathfrak{U})) , \\ / \mathbb{C}$$

pour un élément $\Omega(\mathfrak{U}) \in (k \otimes \mathbb{C})^*$ et une $(N_{K/k}\mathfrak{U})b$ -polarisation $\beta(\mathfrak{U})$ du réseau $\Omega(\mathfrak{U})\mathfrak{U}$. Fixons $\Omega(\mathfrak{U})$ ainsi qu'un tel isomorphisme.

Notons $H_N(\mathfrak{U}) \supset H(\mathfrak{U})$ le corps de rationalité des points de N -torsion de $A(\mathfrak{U})$. (Par suite de la construction citée de $A(\mathfrak{U}) - [S1]$, §5 -, $H_N(\mathfrak{U})$ est toujours une extension abélienne du corps réflex de (K, T)). Chaque $\Gamma(N)$ -structure $\Omega(\mathfrak{U})\eta$ de $\Omega(\mathfrak{U})\mathfrak{U}$ provient évidemment d'une $\Gamma(N)$ -structure $\zeta(\mathfrak{U})$ de $A(\mathfrak{U})$ définie sur $H_N(\mathfrak{U})$.

D'après 2.2, on a donc immédiatement (dans les notations de 3.1) l'énoncé suivant concernant la rationalité des valeurs des fonctions L partielles de $\bar{\varphi}^j$:

$$\frac{\varphi^j(\mathfrak{U})}{\sqrt{d_K} \Omega(\mathfrak{U})^j} E_{j, F(\mathfrak{U}, \eta)}(\mathfrak{U}, \beta, \eta) \in H_N(\mathfrak{U})(\mu_N, \varphi^j)$$

En fait, on pourrait supprimer μ_N de cet énoncé, car on a automatiquement que $\mu_N \subset H_N(\mathfrak{U})$.

4.2. Considérons de plus près les constructions des $A(\mathfrak{U})$ sur $H(\mathfrak{U})$. D'abord, il est clair que $H(\mathfrak{U})$ ne dépend que de la classe de l'idéal $\mathfrak{U}$. Appelons F (resp. F_N) le composé dans $\mathbb{C}$ des corps $H(\mathfrak{U})$ (resp. $H_N(\mathfrak{U})$), pour $\mathfrak{U} \in \mathbb{C}$ (un système de représentants des classes d'idéaux de K comme au §3). F est donc toujours contenu dans le corps de classes de Hilbert du corps réflex de (K, T) .

Considérons toutes les variétés abéliennes $A(\mathfrak{U})$ sur F . Supposons que, dans les constructions des différentes $A(\mathfrak{U})$, on a toujours employé le même caractère de Hecke du corps réflex. Alors les caractères de Hecke de F attachés aux $A(\mathfrak{U})$ par la théorie de la multiplication complexe sont tous égaux. Notons

$$\psi : F_{\mathbb{A}}^*/F^* \longrightarrow K_{\infty}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^T)^* = (k \otimes \mathbb{C})^*$$

cet unique vecteur de caractères de Hecke (indexé par les places à l'infini de K , ou bien les éléments de T) - cf. [ST], la fin du §7.

Il s'ensuit que les $A(\mathfrak{U})$ sont toutes isogènes entre elles sur F . Par conséquent, les $\Omega(\mathfrak{U})$ sont tous égaux, à des facteurs dans $(k \otimes F)^* \subset (k \otimes \mathbb{C})^*$ près, - disons à Ω .

L'action de $\text{Gal}(F_N/F)$ sur les points de N -torsion des $A(\mathfrak{U})$, donc aussi sur les $\Gamma(N)$ -structures $\zeta(\mathfrak{U})$, est décrite par ψ . On obtient donc de 3.1 (joint au fait que l'évaluation des séries d'Eisenstein commute avec cette action par la définition même des formes modulaires) :

$$\frac{\sqrt{d_K}}{(\xi \cdot d_K \Omega)^j} L(\bar{\varphi}^j, j) \in F(\mu_N, \varphi^j)$$

où $\xi \in F^*$ est tel que, pour un idèle $x \in F_{\mathbb{A}}^*$ de symbole d'Artin $\sigma \in \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$, on ait

$$\xi^{\sigma} = \frac{d^j \overline{\psi(x)}}{\bar{\varphi}(\psi(x))} \xi,$$

où $\bar{\varphi}$ est interprété comme quasi-caractère continu sur $K_{\mathbb{A}}^*/K^*$.

4.3. Conservons les notations précédentes. Voici un cadre permettant une analyse plus fine du comportement par Galois des valeurs des séries L partielles.

Soit $S \subset \mathcal{O}_K$ tel que $\{a\mathcal{O}_K \mid a \in S\}$ ait le même cardinal que S et soit un système de représentants des classes de rayon modulo N des idéaux principaux de K premiers à N . Supposons que $1 \in S$. Pour chaque idéal $a\mathfrak{U}$, avec $a \in S$ et $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$, choisissons une $\Gamma(N)$ -structure $\eta(a\mathfrak{U})$ telle que, si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ sont deux idéaux de cette forme, on ait pour tout $b \in \mathfrak{B}$: $\eta(\mathfrak{B}') \eta(\mathfrak{B})^{-1}(b) \equiv b \pmod{N\mathcal{O}_K}$. (C'est un exercice facile de voir que ceci est possible).

Pour tout $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$, fixons $(A(\mathfrak{U}), \omega(\mathfrak{U}), \alpha(\mathfrak{U}))$ sur F comme avant, 4.1. On a donc un isomorphisme fixé

$$(A(\mathfrak{U}), \omega(\mathfrak{U}), \alpha(\mathfrak{U})) \xrightarrow[\mathbb{C}]{\theta(\mathfrak{U})} (\mathbb{C}^T / \Omega(\mathfrak{U})\mathfrak{U}, \beta(\mathfrak{U})),$$

avec une certaine polarisation $\beta(\mathfrak{U})$ de $\Omega(\mathfrak{U})\mathfrak{U}$.

Pour $a \in S$, posons $\Omega(a\mathfrak{U}) = a^{-1}\Omega(\mathfrak{U})$ et écrivons $\zeta(a\mathfrak{U})$ la $\Gamma(N)$ -structure de $A(\mathfrak{U})$ (définie sur F_N) telle que

$$(A(\mathfrak{U}), \omega(\mathfrak{U}), \alpha(\mathfrak{U}), \zeta(a\mathfrak{U})) \xrightarrow{\theta(a\mathfrak{U}) = \theta(\mathfrak{U})} (\mathbb{C}^T / \Omega(a\mathfrak{U})a\mathfrak{U}, \beta(a\mathfrak{U}), \Omega(a\mathfrak{U})\eta(a\mathfrak{U})).$$

Si maintenant $\mathfrak{B}$ est un idéal quelconque de K premier à N , alors on écrit $\mathfrak{B} = \varepsilon \cdot a\mathfrak{U}$ pour $a \in S$, $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon \equiv 1 \pmod{N\mathfrak{O}_K}$, on pose $\Omega(\mathfrak{B}) = \Omega(a\mathfrak{U})$, $\eta(\mathfrak{B}) = \varepsilon\eta(a\mathfrak{U})$ et on fixe l'algébrisation

$$(A(\mathfrak{U}), \omega(\mathfrak{U}), \alpha(\mathfrak{U}), \zeta(a\mathfrak{U})) \xrightarrow{\theta(\mathfrak{B}) = \varepsilon\theta(\mathfrak{U})} (\mathbb{C}^T / \Omega(\mathfrak{B})\mathfrak{B}, \beta(\mathfrak{B}), \Omega(\mathfrak{B})\eta(\mathfrak{B})).$$

Etant donné $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, notons $V_T(\sigma) \in \text{Gal}(K^{ab}/K)$ le "demi-transfert" attaché à T :

$$V_T(\sigma) = \prod_{\tau \in T} w_{\sigma\tau}^{-1} \sigma w_{\tau} \pmod{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K^{ab})},$$

où w_t , pour un plongement $t: K \hookrightarrow \mathbb{C}$, est un prolongement choisi de t à $\bar{\mathbb{Q}}$ tel que $w_{\bar{t}} = \bar{w}_t$. Soit $x \in K_A^*$ un idèle de K tel que

$$(x, K)^{-1} = V_T(\sigma) \text{ et } x\bar{x} \in \tilde{\chi}(\sigma) \cdot K^*,$$

où $\tilde{\chi}: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$ est le caractère cyclotomique: $\varepsilon^\sigma = \varepsilon \tilde{\chi}(\sigma)$, pour chaque racine de l'unité dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Le théorème de Tate et Deligne sur la conjugaison des variétés abéliennes à multiplication complexe implique alors, pour $\mathfrak{U} \in \mathcal{C}$, l'isomorphisme suivant (cf. [T] et [L], chap. 7):

$$(A(\mathfrak{U}), \omega(\mathfrak{U}), \alpha(\mathfrak{U}), \zeta(\mathfrak{U}))^\sigma \xrightarrow[\mathbb{C}]{\theta(x\mathfrak{U})} (\mathbb{C}^{\sigma T} / \Lambda(\mathfrak{U}, \sigma) \Omega(x\mathfrak{U})x\mathfrak{U}, \beta, \Lambda(\mathfrak{U}, \sigma) \Omega(x\mathfrak{U})\eta(x\mathfrak{U})),$$

pour une polarisation β convenable et un élément

$$\Lambda(\mathcal{U}, \sigma) \in (k \otimes F)^* \subset (k \otimes \mathbb{C})^*,$$

bien déterminé à multiplication près par une unité de K congrue à 1 modulo N .

Vu le choix des $\Gamma(N)$ -structures $\eta(\mathcal{U})$, $\eta(x\mathcal{U})$, ceci entraîne, pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, la relation (dans les notations du §3) :

$$\left[\frac{(\varphi^j(\mathcal{U})) \cdot E_{j, F(\mathcal{U}, \eta(\mathcal{U}))}(\mathcal{U}, \beta(\mathcal{U}), \eta(\mathcal{U}))}{\sqrt{d_K} \cdot d^\Lambda(\mathcal{U})^j} \right]^\sigma = \frac{(\varphi^\sigma)^j(x\mathcal{U}) \cdot E_{j, F(x\mathcal{U}, \eta(x\mathcal{U}))}(x\mathcal{U}, \beta', \eta(x\mathcal{U}))}{\sqrt{d_K} \cdot d^\Lambda(x\mathcal{U})^j} (\varphi^\sigma(x\mathfrak{O}_K) \cdot d^\Lambda(\mathcal{U}, \sigma))^{-j}$$

Quand σ fixe μ_N , ceci est essentiellement la valeur en $s=j$ de la fonction L partielle de $(\bar{\varphi}^j)^\sigma$ relative à la classe de l'idéal $(x\mathcal{U})^{-1}$, multipliée par le facteur $(\varphi^\sigma(x\mathfrak{O}_K) \cdot d^\Lambda(\mathcal{U}, \sigma))^{-j}$.

4.4. Pour passer du dernier énoncé à un théorème concernant la valeur $L(\bar{\varphi}^j, j)$, il faudrait comparer les $\Lambda(\mathcal{U}, \sigma)$, pour les différents $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}$. Ceci est possible, par une généralisation sans anicroche de la proposition (4.10) de [GS] aux variétés abéliennes de dimension > 1 , pourvu que σ fixe le corps réflex de (K, T) et qu'on soit dans un cas où "l'équation de classes est irréductible", c'est-à-dire que toutes les $A(\mathcal{U})$, pour $\mathcal{U} \in \mathbb{C}$, sont conjuguées entre elles, à isomorphisme près. C'est le développement d'une telle méthode dans le cas général qui m'échappe encore. Ce problème semble être lié au fait, mentionné dans l'introduction, qu'on ne dispose pas encore d'un raffinement adéquat des arguments de "réflexion" dans [D], 8.19 ss.

Bibliographie

- [D] P. DELIGNE.- Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. Dans : Proc. Symp. Pure and Appl. Math. (AMS), 33 (1979), part 2, 313-346.
- [DR] P. DELIGNE et K. RIBET.- Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields. Inventiones Math. 59 (1980), 227-286.
- [GS] C. GOLDSTEIN et N. SCHAPPACHER.- Séries d'Eisenstein et fonctions L de courbes elliptiques à multiplication complexe. J. reine u. angew. Math. 327 (1981), 184-218.
- [K1] N. KATZ.- p -adic interpolation of real analytic Eisenstein series. Ann. of Math. 104 (1976), 459-571.
- [K2] N. KATZ.- p -adic L -functions for CM-fields. Inventiones Math. 49 (1978), 199-297.
- [K1] H. KLINGEN.- Über den arithmetischen Charakter der Fourierkoeffizienten von Modulformen. Math. Annalen 147 (1962), 176-188.
- [L] S. LANG.- Complex Multiplication, à paraître (Springer Verlag).
- [R] M. RAPOPORT.- Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal. Compos. Math. 36 (1978), 255-335.
- [S1] G. SHIMURA.- On the zeta function of an abelian variety with complex multiplication. Ann. of Math. 94 (1971), 504-533.
- [S2] G. SHIMURA.- On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables. Ann. of Math. 102 (1975), 491-515.
- [ST] J.-P. SERRE et J. TATE.- Good reduction of abelian varieties. Ann. of Math. 88 (1968), 492-517.
- [T] J. TATE.- On conjugation of abelian varieties of CM type, manuscrit non publié, Paris 1981.