GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *L'inégalité de Lojasiewicz ultramétrique.* Note (*) de

**Norbert Schappacher**, présentée par Jean-Pierre Serre.

On démontre l'analogue ultramétrique de « l'inégalité de Lojasiewicz » (au sens de [15], V, § 4) pour les idéaux de fonctions rigides analytiques, généralisant ainsi un théorème de M. J. Greenberg.

*ALGEBRAIC GEOMETRY.* — The Non-Archimedean Analogue of Lojasiewicz's Inequality.

*The non-archimedean analogue of "Lojasiewicz's inequality" (in the sense of Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables, Springer 1972, Chap. V, § 4) is proven for ideals of rigid analytic functions. This generalizes a theorem of M. J. Greenberg:* Publ. Math. I.H.E.S., 31 (1966), pp. 59-64.

En 1958, L. Hörmander aussi bien que S. Lojasiewicz abordèrent le problème, posé par L. Schwartz, de la division d'une distribution, sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbf{R}^N$, par une fonction analytique $f$, en le ramenant à l'énoncé suivant :

*Soient* $V(f)$ *l'ensemble des zéros de* $f$ *dans* $\Omega$, *et* A *une partie compacte de* $\Omega$. *Alors il existe deux constantes réelles* $c$, $d>0$ *telles que, pour tout* $x\in A$, *on ait :*

$$|f(x)| \geqq |x-V(f)\cap A|^c . d.$$

(*Ici, on pose* $|x-\emptyset|=0$.)

Hörmander démontra cette inégalité dans le cas d'un polynôme $f$, [7], tandis que Lojasiewicz ([8], [9]) l'établit dans le cas analytique. *Voir* [15], V, § 4, pour une discussion de l'inégalité dans un cadre plus général.

Indépendamment de ces travaux, M. J. Greenberg [6] démontra, en 1966, l'analogue ultramétrique du résultat de Hörmander, où le compact A est remplacé par $R^N$, R étant l'anneau de valuation (discrète) d'un corps complet K. Plus précisément, Greenberg considéra le cas d'un *système* $f=(f_1, \ldots, f_r)$ *de polynômes* de $R[X_1, \ldots, X_N]$. Les normes des deux côtés de l'inégalité se lisent alors comme des normes Sup par rapport aux deux espaces en question :

$$|f(x)| = \operatorname*{Sup}_{1\leqq i\leqq r} |f_i(x)|,$$

$$|x-V(f)\cap R^N| = \operatorname*{Inf}_{y\in V(f)\cap R^N} \ \operatorname*{Sup}_{1\leqq j\leqq N} |x_j-y_j|.$$

Greenberg ayant en fait démontré son théorème pour tout anneau *hensélien* R de valuation discrète dont le complété est séparable sur R, ce résultat est devenu un exemple « classique » et particulièrement explicite d'un « théorème d'approximation » pour une classe d'anneaux locaux excellents. *Cf.* par exemple [1].

On se propose ici de généraliser le résultat de Greenberg au cas analytique : $f_1, \ldots, f_r$ seront des séries convergentes sur $R^N$ tout entier, R étant supposé complet.

Notations et lemmes. — Soit K un corps complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique non triviale $|\ |: K\to\mathbf{R}$. Nous ne supposons pas que le groupe des valeurs de $K^*$ soit un sous-groupe discret de $\mathbf{R}$. Notons $R=\{x\in K \mid |x|\leqq 1\}$ l'anneau de valuation de K.

Soit $N\geqq 1$. Nous écrivons $K\langle X\rangle = K\langle X_1, \ldots, X_N\rangle$ l'algèbre (dite « de Tate », *cf.* [14]) des séries strictement convergentes à coefficients dans K. Une série formelle $f\in K[[X]]$ appartient donc à $K\langle X\rangle$ si et seulement si ses coefficients tendent vers 0 dans K (suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\mathbf{N}^N$). Pour $f\in K\langle X\rangle$, on note $\|f\| \in |K| \subset \mathbf{R}$ le sup. des valeurs absolues des coefficients de $f$. L'algèbre $K\langle X\rangle$, munie de $\|\ \|$, est une algèbre de Banach telle que, pour tous $f, g \in K\langle X\rangle$, $\|f.d\| = \|f\|\ \|g\|$. C'est une algèbre noethérienne dont chaque idéal est fermé. (Mais sa « boule unité » $K\langle X\rangle \cap R[[X]]$ n'est un anneau noetherien que si $|\ |$ est à valeurs discrètes dans $\mathbf{R}_+$.)

*Tous les idéaux de* $K\langle X\rangle$ *considérés par la suite sont supposés* $\neq 0$.

Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de $K\langle X\rangle$ et un point $x \in R^N$, posons :

$$|\mathfrak{a}(x)| = \operatorname*{Sup}_{f \in \mathfrak{a} \cap \mathbf{R}[[X]]} |f(x)| \in [0, 1] \subset \mathbf{R}.$$

On écrira $\mathfrak{a}(x)=0$ au lieu de $|\mathfrak{a}(x)|=0$; ceci signifie que $f(x)=0$, pour tout $f \in \mathfrak{a}$.

Lemme 1. — (i) *Pour chaque système de générateurs* $f=(f_1, \ldots, f_r)$ *de* $\mathfrak{a}$, *il existe une constante réelle* $\rho \geqq 1$ *telle que, pour tout* $x \in R^N$, *on ait :*

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqq |\mathfrak{a}(x)| \leqq \rho \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

(A gauche et à droite on a écrit des normes Sup de vecteurs à $r$ coordonnées.)

(ii) *Étant donnés deux idéaux* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *de* $K\langle X\rangle$, *il existe une constante réelle* $\sigma \geqq 1$ *telle que, pour tout* $x \in R^N$, *on ait :*

$$\max(|\mathfrak{a}(x)|, |\mathfrak{b}(x)|) \leqq |(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(x)| \leqq \sigma \max(|\mathfrak{a}(x)|, |\mathfrak{b}(x)|).$$

*Démonstration.* — (ii) se ramène à (i). (i) est une conséquence immédiate du fait que chaque $g \in \mathfrak{a}$ s'écrit sous la forme $g=\sum_i h_i f_i$, où $\|h\| = O(\|g\|)$. *Voir* [5], I, § 4.

Étant donné l'idéal $(f_1, \ldots, f_r)=\mathfrak{a} \subset K\langle X\rangle$, nous lui attachons un « idéal jacobien » $J\mathfrak{a}$ comme suit.

Pour tout multi-indice $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ tel que $1 \leqq s \leqq r$, N et $1 \leqq \alpha_1 < \ldots < \alpha_s \leqq r$, notons $\Delta(\alpha)$ l'idéal de $K\langle X\rangle$ engendré par les mineurs d'ordre $s$ de la matrice jacobienne :

$$\left(\frac{\partial f_{\alpha_i}}{\partial X_j}\right) \qquad i=1, \ldots, s; \quad j=1, \ldots, N,$$

et notons $\Phi(\alpha)$ l'idéal conducteur :

$$\Phi(\alpha)=\{g \in K\langle X\rangle \mid g\,\mathfrak{a} \subset (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_s})\}.$$

On pose alors $J\mathfrak{a}=\sum_\alpha \Phi(\alpha).\Delta(\alpha) \subset K\langle X\rangle$, l'idéal engendré par les produits $\Phi(\alpha).\Delta(\alpha)$, pour $\alpha$ décrivant l'ensemble des multi-indices introduits ci-dessus.

On voit facilement que $J\mathfrak{a}$ est, en fait, indépendant du système choisi $(f_1, \ldots, f_r)$ de générateurs de $\mathfrak{a}$. En outre, la formation de J commute aux automorphismes de $K\langle X\rangle$.

L'idéal $\mathfrak{a}+J\mathfrak{a}$ décrit le *lieu singulier* de $\mathfrak{a}$. On utilisera la version suivante du « lemme de Newton », due à R. Elkik.

Lemme 2. — *Il existe une constante* $\rho \geqq 1$ (*dépendant de* $\mathfrak{a}$) *telle que, pour tout* $x \in R^N$ *et* $0<\varepsilon \ll 1$, *l'énoncé suivant soit vrai :*

*Si* $|\mathfrak{a}(x)| < \varepsilon$ *et si* $|J\mathfrak{a}(x)|^2 \geqq \varepsilon\rho$, *alors il existe* $y \in R^N$ *tel que* $\mathfrak{a}(x)=0$ *et* $|x-y| < \varepsilon\rho / |J\mathfrak{a}(x)|$.

La démonstration de ce lemme, par approximations successives, se fait en traduisant, en termes de valeurs absolues, les constructions données par Elkik dans son cadre plus algébrique : [3], p. 555-558. (La constante $\rho$ n'y intervient que pour assurer, d'après le lemme 1, l'existence de $\varphi \in \Phi(\alpha)$, $\delta \in \Delta(\alpha)$ avec $\|\varphi\|, \|\delta\| \leqq 1$, tels que $|\varphi(x)\delta(x)|^2 \geqq \varepsilon$ et que, pour tout générateur $f_j$ de $\mathfrak{a}$, on ait $\varphi f_j = \sum_i \lambda_{ij} f_{\alpha_i}$ avec des séries $\lambda_{ij}$ telles que $\|\lambda_{ij}\| \leqq 1$.)

On aura besoin de la notion suivante :

Soit $\mathfrak{a} \subset K\langle X \rangle$ un idéal *premier*. « L'algèbre affinoïde » $\mathscr{A} = K\langle X \rangle / \mathfrak{a}$ est donc un anneau intègre. On dit que $\mathscr{A}$ est *analytiquement séparable* si l'anneau $\overline{\mathscr{A}} = \overline{K}\langle X \rangle / \mathfrak{a}\overline{K}\langle X \rangle$ est réduit, où $\overline{K}$ est le complété d'une clôture algébrique de K. Dire que $\mathscr{A}$ n'est pas analytiquement séparable, équivaut à dire que K est de caractéristique $p > 0$ et que $K^{1/p}\langle X \rangle / \mathfrak{a} K^{1/p}\langle X \rangle$ n'est pas réduit — et contient donc un élément non trivial dont la puissance $p$-ième est nulle. *Voir* [2], 4.2, 4.4.

LEMME 3. — *Si* $\mathscr{A} = K\langle X \rangle / \mathfrak{a}$ *est analytiquement séparable, alors* $J\,\mathfrak{a}$ *n'est pas contenu dans* $\mathfrak{a}$.

Ceci dit que le lieu singulier de $\mathfrak{a}$ est strictement plus petit que le lieu de $\mathfrak{a}$ (et est donc de dimension inférieure). Bien que cette propriété soit l'intérêt principal de la notion de séparabilité analytique, il ne semble pas y avoir une démonstration de ce fait dans la littérature. Nous renvoyons à [11], Appendice, 2, où des énoncés analogues sont démontrés dans le cadre des séries (localement) convergentes. (Les algèbres $E_x/I_x$ d'Oesterlé sont en fait analytiquement séparables, dans la catégorie des algèbres analytiques sur K.) On peut facilement imiter ces arguments pour obtenir notre lemme, en utilisant systématiquement le théorème de préparation de Weierstrass pour $K\langle X \rangle$ au lieu de celui pour les séries convergentes — *voir* par exemple [5], I, § 2.

LE THÉORÈME. — Avec ces notations, l'inégalité de Lojasiewicz peut être formulée comme suit :

THÉORÈME. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal non nul de* $K\langle X \rangle = K\langle X_1, \ldots, X_N \rangle$. *Alors il existe deux constantes réelles* $c$, $d$; $c \geqq 0$, $0 < d \leqq 1$, *telles que, pour tout* $x \in R^N$ *et* $0 < \varepsilon \leqq 1$, *l'énoncé suivant soit vrai :*

*Si* $|\mathfrak{a}(x)| < \varepsilon^c . d$, *alors il existe* $y \in R^N$ *tel que* $\mathfrak{a}(y) = 0$ *et* $|x - y| < \varepsilon$.

*Démonstration.* — On se ramène d'abord au cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal premier : *voir* [6], p. 59, 60. Ensuite la démonstration se fait par récurrence sur $D(\mathfrak{a}) = N - \text{hauteur}(\mathfrak{a})$.

Si $D(\mathfrak{a}) = -1$, i. e. $\mathfrak{a} = K\langle X \rangle$, on a $|\mathfrak{a}(x)| = 1$ pour tout $x$. Donc $c = 0$ et tout $d \leqq 1$ répondent à la question.

Soit $D(\mathfrak{a}) \geqq 0$. Deux cas se présentent.

*Premier cas :* $\mathscr{A} = K\langle X \rangle / \mathfrak{a}$ *est analytiquement séparable.* — D'après le lemme 3, on a $D(\mathfrak{c}) < D(\mathfrak{a})$ pour les idéaux premiers $\mathfrak{c}$ contenant $\mathfrak{a} + J\,\mathfrak{a}$. L'hypothèse de récurrence nous fournit donc des constantes $c'$, $d'$ pour l'idéal $\mathfrak{a} + J\,\mathfrak{a}$. Soient $\rho \geqq 1$ vérifiant le lemme 2, et $\sigma \geqq 1$ tel que l'énoncé du lemme 1, (ii) soit vrai pour $\mathfrak{a}$, $J\,\mathfrak{a}$. Posant $c = 2c'$ et $d = (d'/\sigma)^2 \rho^{-1}$ on vérifie alors le théorème pour $\mathfrak{a}$ (si $\varepsilon$ est suffisamment petit — ce qui entraîne l'énoncé exact du théorème avec un $d$ éventuellement plus grand), en appliquant le lemme 2 si $|J\,\mathfrak{a}(x)| \geqq \varepsilon^{c'}(d'/\sigma)$, et par le lemme 1 et le choix de $c'$, $d'$ si $|J\,\mathfrak{a}(x)| < \varepsilon^{c'}(d'/\sigma)$.

*Deuxième cas :* $\mathscr{A} = K\langle X \rangle / \mathfrak{a}$ *n'est pas analytiquement séparable.* — Soit $g \in K^{1/p}\langle X \rangle$; $\|g\| \leqq 1$, tel que $g^p \in \mathfrak{a}$, mais $g \notin \mathfrak{a} K^{1/p}\langle X \rangle$. Soit $K' \subset K$ un corps contenant les coefficients de $g^p$ qui est un espace de Banach de type dénombrable sur $K^p$. D'après [4], Satz 3, K' possède une base topologique sur $K^p$, soit $\{u_n\}$. D'après le théorème du graphe fermé, $\{u_n\}$ est « $\alpha$-orthogonale » pour un $\alpha$, $0<\alpha\leqq 1$ : pour toute suite $\{a_n\}$ d'éléments de $K^p$ telle que $\sum_n a_n u_n$ converge dans K', on a $|\sum_n a_n u_n| \geqq \alpha \operatorname{Sup} |a_n u_n|$. *Voir* [12], 3.7.

Écrivons $g^p = \sum_n g_n^p u_n$, avec $g_n \in K\langle X\rangle$.

Comme tout idéal de $K^{1/p}\langle X\rangle$ est fermé il existe un $m$ tel que $g_m \notin \mathfrak{a}$. Par hypothèse de récurrence, il y a donc des constantes $c'$, $d'$ pour l'idéal engendré par $\mathfrak{a}$ et $g_m$. Si $\sigma \geqq 1$ vérifie le lemme 1, (ii) pour $\mathfrak{a}$ et $(g_m)$, on pose maintenant

$$c = pc' \qquad \text{et} \qquad d = \operatorname{Inf}(d'/\sigma,\ (d'/\sigma)^p \alpha |u_m|).$$

Alors l'hypothèse que $|\mathfrak{a}(x)| < \varepsilon^c . d$ entraîne que $|(\mathfrak{a}+(g_m))(x)| < \varepsilon^{c'} . d'$, ce qui nous donne un zéro $y$ de $\mathfrak{a}$ et de $g_m$ tel que $|x-y| < \varepsilon$.

*Remarques.* — (1) L'ensemble des $c$, $d$ vérifiant l'énoncé du théorème ne change pas si l'on remplace $\mathfrak{a}$ par $\varphi(\mathfrak{a})$, pour un automorphisme $\varphi$ de $K\langle X\rangle$. Ceci est trivial car chaque automorphisme de $K\langle X\rangle$ est une isométrie et induit donc un automorphisme de $R^N$.

(2) Si $\mathfrak{a}$ n'a pas de zéros dans $R^N$, on peut évidemment prendre $c=0$. Si $\mathfrak{a}$ n'a pas de points singuliers dans $R^N$, on trouve que $\operatorname{Inf}_{x\in R^N} |(\mathfrak{a}+J\,\mathfrak{a})(x)| > 0$, et le lemme 2 montre qu'on peut choisir $c=1$.

(3) Pour une discussion de problèmes moins immédiats concernant la nature de la constante $c$, *voir* [13].

(*) Remise le 7 mars 1983.


[1] J. BECKER, J. DENEF, L. LIPSHITZ et L. VAN DEN DRIES, *Inventiones Math.*, 51, 1979, p. 189-203. (La suite de cet article est parue dans *Math. Ann.*, 253, 1980, p. 1-28.)

[2] R. BERGER, R. KIEHL, E. KUNZ et M.-J. NASTOLD, *Differentialrechnung in der analytischen Geometrie* (*Springer Lect. Notes Math.*, 38, 1967).

[3] R. ELKIK, *Ann. Scient. E.N.S.* (4e sér.), 6, 1973, p. 553-603.

[4] L. GERRITZEN, *Inventiones Math.*, 2, 1967, p. 178-190.

[5] H. GRAUERT et R. REMMERT, *Nichtarchimedische Funktionentheorie*, in *Weierstrass-Festband*, *Wiss. Abh.*, 33, 1966, Westdeutscher Verlag, Opladen/Köln, p. 393-476.

[6] M. J. GREENBERG, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 31, 1966, p. 59-64.

[7] L. HÖRMANDER, *Arkiv för Mat.*, 3, 1958, p. 555-568.

[8] S. LOJASIEWICZ, *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 683.

[9] S. LOJASIEWICZ, *Studia Math.*, XVIII, 1959, p. 87-136.

[10] B. MALGRANGE, *Division des distributions* (*Sém. Bourbaki*, n° 203, 1959/1960).

[11] J. OESTERLÉ, *Inventiones Math.*, 66, 1982, p. 325-341.

[12] A. C. M. VAN ROOIJ, *Non-archimedean Functional Analysis*, New York, 1978.

[13] N. SCHAPPACHER, *Some Remarks on a Theorem of M. J. Greenberg*, in *Proceedings of the* 1979 *Kingston Number Theory Conference*, Queen's Mathematical Papers, 1980, p. 100-114.

[14] J. TATE, *Inventiones Math.*, 12, 1971, p. 257-289.

[15] J.-C. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables* (*Springer Ergebn. Math.*, 71, 1972).


*Mathematisches Institut der Universität,*
*Bunsenstr.* 3-5, *D*-3400 *Göttingen, R.F.A.*