THÉORIE DES NOMBRES. — *Conjecture de Deligne et* Γ-*hypothèse de Lichtenbaum sur les corps quadratiques imaginaires.* Note (*) de **Catherine Goldstein** et **Norbert Schappacher,** présentée par Pierre Deligne.

On démontre la conjecture de Deligne exprimant les valeurs aux entiers critiques des fonctions L de caractères de Hecke des corps quadratiques imaginaires en termes de périodes. Un travail récent de G. Anderson permet d'en déduire la Γ-hypothèse de Lichtenbaum sur tous les corps quadratiques imaginaires.

NUMBER THEORY. — Deligne's Conjecture and Lichtenbaum's Γ-Hypothesis over Imaginary Quadratic Fields.

We prove Deligne's conjecture expressing the "critical" values of L-*functions of Hecke characters of imaginary quadratic fields in terms of periods. Recent work of G. Anderson implies that this proves Lichtenbaum's* Γ-*hypothesis over any imaginary quadratic field.*

1. LES RÉSULTATS. — Il était moralement clair, depuis 1970, que les méthodes employées par Damerell [3] (dont une bonne partie remonte en fait au milieu du siècle dernier, *cf.* [11]) permettraient de démontrer tous les résultats de rationalité qu'on pouvait espérer pour des valeurs spéciales de fonctions L attachées aux caractères de Hecke algébriques des corps quadratiques imaginaires. La conjecture de Deligne, exposée dans [5], fournit un cadre précis pour énoncer et vérifier ces résultats :

1.1. THÉORÈME. — *Soient* K *un corps quadratique imaginaire et* E *une extension de* **Q** *de degré fini. Si* M *est un motif de rang* 1 *sur* K *à coefficients dans* E, *provenant d'un caractère de Hecke algébrique de* K *à valeurs dans* E [*voir* [5], 8.1 (i)], *alors la conjecture* [5], 2.8 *est vraie pour* $R_{K/Q}M$.

Dans toute cette Note, on appelle *motifs* sur K les objets de la catégorie tannakienne de motifs obtenue, par le procédé usuel, à partir des variétés algébriques de dimension 0 sur K et des variétés abéliennes sur K, de type CM sur $\overline{K}$, en définissant les morphismes par les cycles de Hodge absolus, *cf.* [6], II.6. Cette catégorie est appelée $(CM)_K$ dans [6], IV, où Deligne montre qu'elle est équivalente (une fois fixés un plongement de K dans **C** et le foncteur fibre H_B) à la catégorie des représentations d'un sous-groupe ${}_K T$ du groupe de Taniyama. Comme les caractères de Hecke algébriques de K à valeurs dans E correspondent aux caractères définis sur E du groupe de Serre S_K, quotient de ${}_K T$ ([6], IV, E.1), on peut effectivement vérifier ([5], 8.1) qu'étant donné un caractère de Hecke algébrique χ de K à valeurs dans E, il existe un unique motif $M(\chi)$ dans $(CM)_K$ à coefficients dans E dont les réalisations *l*-adiques sont données par χ.

Le théorème 1.1 a été démontré partiellement dans [8], paragraphe 9. Notre principale motivation pour compléter [8] est liée à la Γ-*hypothèse de Lichtenbaum* qui exprime les valeurs aux entiers critiques de la fonction L d'un caractère du type « somme de Jacobi » (dans un sens large précisé dans [9]) essentiellement en termes de valeurs spéciales de la fonction gamma, *à un nombre rationnel près.* Cette conjecture est démontrée dans [2] pour tous les caractères du type « somme de Jacobi » des corps quadratiques imaginaires *dont le nombre de classes est impair.* Cette restriction est due à l'utilisation, dans [2], de **Q**-courbes (au sens de [7]) dont on calcule les périodes par la formule de Chowla et Selberg; ces courbes n'existent pas pour tous les corps quadratiques imaginaires.

Or, G. Anderson [1] a attaché à tout caractère du type « somme de Jacobi » (dans un sens d'ailleurs plus large que chez Lichtenbaum), un motif déduit d'une forme « tordue » d'une hypersurface de Fermat, dont il peut calculer explicitement la période en termes de la fonction Γ; ces motifs sont tous dans $(CM)_K$. Quand le caractère est équivariant sous l'action de Galois — ce qui est toujours le cas pour les caractères introduits par Lichtenbaum — la conjecture de Deligne entraîne, grâce à ces calculs, la Γ-hypothèse de Lichtenbaum : *voir* [1], 5.10 et 6.2. Notre théorème 1.1 implique donc le :

1.2. Corollaire. — *La Γ-hypothèse de Lichtenbaum* — voir [9], [2] — *est vraie pour tout caractère du type « somme de Jacobi » de n'importe quel corps quadratique imaginaire.*

L'unicité des motifs attachés à un caractère de Hecke permet de déduire de la construction d'Anderson des versions assez précises de la formule de Chowla et Selberg que nous donnerons ailleurs.

Par la suite, une référence du type $\langle \ldots \rangle$ (resp. $\{\ldots\}$) renverra au paragraphe indiqué de [5] (resp. de [8]); sauf précision contraire, les notations sont celles de [8].

2. Les motifs. — Soient K et E comme dans 1.1, et soit χ un caractère de Hecke algébrique de K à valeurs dans E — *voir* [4], paragraphe 5. Écrivons $\{\sigma_0, \bar{\sigma}_0\}$ l'ensemble des plongements de K dans E. Le type à l'infini de χ s'écrit alors $m\sigma_0 + n\bar{\sigma}_0$, avec $m, n \in \mathbf{Z}$. Posons :

$$-j = \min(m, n); \qquad k = \max(m, n) + j \geqq 0.$$

2.1. Lemme. — *Il existe un caractère d'ordre fini μ de K et un caractère de Hecke algébrique φ de K, de type à l'infini σ_0 ou $\bar{\sigma}_0$ (selon que $-j=n$ ou $-j=m$) tels que :*

$$\chi = \mu\varphi^k \mathrm{N}^{-j},$$

où N *est la norme absolue d'idéaux de* K.

2.2. Proposition. — *Il existe un unique motif* $M(\chi)$ *sur* K *à coefficients dans* E, *attaché à χ dans le sens de* $\langle 8.1, (\mathrm{i}) \rangle$.

Nous avons indiqué dans l'introduction comment on peut démontrer cette proposition en général. Donnons ici une construction élémentaire pour le cas où $E = K(\varphi, \mu)$, le corps de valeurs des caractères φ et μ de K, qui sera utilisée par la suite dans le calcul des périodes. Le caractère φ détermine, pour une extension abélienne convenable F de K, une courbe elliptique $\mathscr{E}$ définie sur F, à multiplication complexe par l'anneau des entiers de K — *voir* [10]. La variété abélienne $B = R_{F/K}\mathscr{E}$ contient un facteur direct B_φ à multiplication complexe par le corps de valeurs $K(\varphi)$ et telle que $M(\varphi^{-1}) = H_1(B_\varphi)$ — *voir* [10] et $\{9.3\}$. Notons que toutes ces variétés abéliennes ne sont bien définies qu'à isogénie près. Compte tenu de $\langle 8.5 \rangle$, nous obtenons donc un motif $M(\mu\varphi^k \mathrm{N}^{-j})$ défini sur K, *à coefficients dans* $K(\varphi, \mu)$, par tensorisation et dualisation.

2.3. Nous noterons désormais $M(\mu\varphi^k \mathrm{N}^{-j})$ le motif à coefficients dans $K(\varphi, \mu)$ dont nous venons d'esquisser la construction. L'écriture $M(\chi)$ sera, elle, réservée au motif à coefficients dans E.

2.4. Lemme. — $M(\chi)$ *(ou, ce qui revient au même,* $M(\mu\varphi^k \mathrm{N}^{-j})$*) est critique (au sens de* $\langle 2.3 \rangle$*) si et seulement si on a :*

$$k \geqq j \geqq 1.$$

Ceci découle immédiatement de $\langle 8.2 \rangle$ et $\langle 1.3 \rangle$.

3. La conjecture de Deligne. — Nous allons procéder par réductions successives de 1.1.

3.1. *Il suffit de démontrer la conjecture* ⟨2.8⟩ *pour* $M(\mu\varphi^k N^{-j})$ *au lieu de* $M(\chi)$ – *cf.* 2.3.

Voir ⟨2.10⟩.

3.2. *Il suffit de démontrer la conjecture* ⟨2.8⟩ *dans les cas où* $0<k/2<j\leqq k$.

Démonstration. – On a $M(\chi)^{\vee}(1)=M(\check{\chi})$, avec $\check{\chi}=\bar{\mu}\bar{\varphi}^k N^{j-(k+1)}$. La réduction 3.2 résultera donc de la compatibilité de la conjecture de Deligne avec l'équation fonctionnelle, ⟨5.6⟩. Pour vérifier cette compatibilité dans le cas présent, il suffit de montrer que det $R_{K/\mathbf{Q}} M(\chi)$ est un motif d'Artin sur $\mathbf{Q}$, tordu à la Tate. En interprétant χ comme caractère du groupe de Weil W_K de K, ceci se déduit du calcul bien connu de dét $M(\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{Q}}}^{W_K}(\chi))$.

3.3. Lemme. – *Si* $M(\chi)$ *est critique, alors :*

$$c^+(R_{K/\mathbf{Q}} M(\chi))=c^-(R_{K/\mathbf{Q}} M(\chi))\in(E\otimes\mathbf{C})^*/E^*.$$

Démonstration. – En transposant ⟨8.15⟩ pour les espaces « – » on constate que la formule de ⟨8.16⟩ donne c^- ou c^+ indifféremment.

3.4. *Il suffit de démontrer la conjecture* ⟨2.8⟩ *dans les cas où* $j=k\geqq 1$.

Démonstration. – En utilisant ⟨5.1.8⟩ (où $d^+=d^-=1$, selon ⟨8.15⟩) et le lemme 3.3 pour $M(\mu\varphi^k N^{-j})$, nous trouvons :

$$c^+(R_{K/\mathbf{Q}} M(\mu\varphi^k N^{-j}))=(2\pi i)^{k-j}.c^+(R_{K/\mathbf{Q}} M(\mu\varphi^k N^{-k})).$$

Il s'agit alors de montrer une identité analogue pour les valeurs des fonctions L.

Soit $J(\varphi,\mu)=\mathrm{Hom}_K(K(\varphi,\mu),\mathbf{C})$. Nous avons donc :

$$L^*(R_{K/\mathbf{Q}} M(\mu\varphi^k N^{-j}))=L^*(M(\mu\varphi^k N^{-j}))=\{(L(\mu_\tau\varphi_\tau^k, j), L(\bar{\mu}_\tau\bar{\varphi}_\tau^k, j)\}_{\tau\in J(\varphi,\mu)},$$

dans $K(\varphi,\mu)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$. Ici, μ_τ et φ_τ sont les caractères complexes déduits de μ, φ au moyen de τ.

Soit F une extension abélienne de K comme dans 2.2 et assez grande pour nous permettre d'interpréter μ comme caractère du groupe $G=\mathrm{Gal}(F/K)$. Notons $T(\mu)=\prod_{i=1}^{r} T_i(\mu)$ l'algèbre $\mathrm{End}_{/K} B\otimes\mathbf{Q}$ à laquelle on a rajouté les valeurs de μ, *cf.* {§ 4}. Nous munissons le produit tensoriel $T(\mu)\otimes_K F$ de l'action de G qui est naturelle sur F et triviale sur $T(\mu)$; de même pour son facteur direct $K(\varphi,\mu)\otimes_K F$.

Soit $x\in(T\otimes_K F)^*\subset(T(\mu)\otimes_K F)^*$ un élément vérifiant le lemme {4.12}. Notons $\tilde{x}$ la projection de x sur le facteur $K(\varphi,\mu)\otimes_K F$.

Soit $y\in(K(\mu)\otimes_K F)^*\subset(K(\varphi,\mu)\otimes_K F)^*$ tel que $\mu(\sigma)=y^{\sigma-1}$, pour tout $\sigma\in G$. Un tel élément existe d'après le « théorème 90 » de Hilbert appliqué au 1-cocycle μ, à valeurs dans un G-module à action triviale.

En adaptant la démonstration de {9.1} à la situation présente, il vient de {4.12}, {5.2}, {5.7} et {6.1} que :

$$\left\{\frac{(2\pi i)^{k-j}}{y_\tau\tilde{x}_\tau^k\Omega^k} L(\bar{\mu}_\tau\bar{\varphi}_\tau^k, j)\right\}_{\tau\in J(\varphi,\mu)} \in K(\varphi,\mu)\subset K(\varphi,\mu)\otimes_K\mathbf{C}. \tag{3.5}$$

Ceci étant vrai pour tous μ, φ, nous en déduisons 3.4. Nous pouvons également vérifier comme dans la démonstration de {9.3} l'identité suivante :

$$c^+(R_{K/\mathbf{Q}} M(\overline{\mu\varphi} N^{-1}))=(y\tilde{x}\Omega, \overline{y\tilde{x}\Omega})\in(K(\varphi,\mu)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C})^*/K(\varphi,\mu)^*, \tag{3.6}$$

puisque $M(\overline{\mu\varphi}\,N^{-1})=M((\mu\varphi)^{-1})$, facteur direct de $H_1(B)$.

3.7. ERRATUM. — Contrairement à ce que nous affirmions en $\{9.1\}$, il n'existe pas en général d'élément $x\in(T\otimes_K F)^*$ vérifiant $\{4.12\}$ dont la puissance k-ième tombe dans $(T(k)\otimes_K F)^*$. Pour un résultat à $T(k)^*$ près, comme dans $\{9.1\}$ et $\{9.6\}$, il faut introduire un $x(k)\in(T(k)\otimes_K F)^*$ trivialisant le 1-cocycle $\mathfrak{a}\mapsto\tilde{\varphi}^k(\mathfrak{a}).\Lambda(\mathfrak{a})^{-k}$ à valeurs dans $(T(k)\otimes_K F)^*$. Naturellement, l'utilisation de x^k au lieu de $x(k)$ donne les résultats à T^* près, ce qui suffit dans le reste de $\{\S\,9\}$ ainsi que dans 3.5 ci-dessus.

3.8. *Il suffit de démontrer la conjecture* $\langle 2.8\rangle$ *dans les cas où* $j=k=1$.

Décomposons, pour $j=k>1$:

$$M(\mu\varphi^k N^{-k})=M(\mu\varphi N^{-1})\otimes_{K(\varphi,\,\mu)}[M(\varphi^{k-1}N^{1-k})\otimes_{K(\varphi)}K(\varphi,\mu)].$$

Les motifs figurant dans cette décomposition sont tous critiques, d'après 2.4. Compte tenu de 3.5 et de 3.6, nous avons donc ramené 3.8 à l'égalité suivante dans $(K(\varphi,\mu)\otimes\mathbf{C})^*/K(\varphi,\mu)^*$:

$$(3.9)\quad c^+(R_{K/Q}\,M(\mu\varphi^k N^{-k}))$$
$$=c^+(R_{K/Q}\,M(\mu\varphi N^{-1})).\,c^+(R_{K/Q}\,M(\varphi^{k-1}N^{1-k})\otimes_{K(\varphi)}K(\varphi,\mu)).$$

Nous déduisons 3.9 de la proposition $\langle 8.16\rangle$ (et de $\langle 8.17\rangle$). En reprenant quelques notations de Deligne nous constatons que l'ensemble des (σ,τ) tels que $n(\sigma,\tau)<w/2$ est identique pour les trois motifs qui nous intéressent. De la définition des $p'(\sigma,\tau)$, $\langle 8.7\rangle$, résulte alors facilement la propriété de multiplicativité qui donne 3.9.

Il reste donc finalement à traiter les motifs de la forme $M(\mu\varphi N^{-1})$. Or, la conjecture $\langle 2.8\rangle$ pour ces motifs découle de 3.5 et 3.6.

(*) Remise le 25 avril 1983.

[1] G. ANDERSON, *The Motivic Interpretation of Jacobi Sum Hecke Characters*, preprint.

[2] G. BRATTSTRÖM et S. LICHTENBAUM, *Jacobi Sum Hecke Characters of Imaginary Quadratic Fields* [*Compos. Math.* (à paraître)].

[3] R. M. DAMERELL, *Acta Arithm.*, 17, 1970, p. 287-301.

[4] P. DELIGNE, *Springer Lecture Notes Math.*, 569, 1977, p. 169-232.

[5] P. DELIGNE, *Proc. Symp. Pure Math. (A.M.S.)*, 33, part. 2, 1979, p. 313-346.

[6] P. DELIGNE, J. MILNE, A. OGUS et K. SHIH, *Springer Lecture Notes Math.*, 900, 1982.

[7] B. GROSS, *Springer Lecture Notes Math.*, 776, 1980.

[8] C. GOLDSTEIN et N. SCHAPPACHER, *J. Reine Angew. Math.*, 327, 1981, p. 184-218.

[9] S. LICHTENBAUM, *Progr. in Math.* (Birkhäuser), 26, 1982, p. 207-218.

[10] N. SCHAPPACHER, *Progr. in Math.* (Birkhäuser), 22, 1982, p. 273-279 (*Sém. Th. des nombres*, Paris, 1980-1981).

[11] A. WEIL, *Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker*, Springer, 1976.

Université de Paris-Sud, Bât. 425,
Centre d'Orsay, 91405 *Orsay;*

Mathematisches Institut der Universität, *Bunsenstr.* 3-5
3400 *Göttingen*, *Deutschland.*