SÉRIES DE KRONECKER ET FONCTIONS L DES PUISSANCES SYMÉTRIQUES DE COURBES ELLIPTIQUES SUR $\mathbf{Q}$

**Jean-François Mestre*[*] & Norbert Schappacher*[**]

Table des Matières

---

[*] Ecole Normale Supérieure, Mathématiques, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05

[**] Max-Planck-Institut für Mathematik, Gottfried-Claren-Straße 26, D-5300 Bonn 3

0. Introduction

La formulation, aujourd'hui très générale, des *conjectures de Beilinson* a été inaugurée par Bloch, et influencée en particulier par une étude numérique du cas des courbes elliptiques E définies sur $\mathbf{Q}$ faite en 1981 par Bloch et Grayson, [Bloch, Grayson 1986]. Nous reprenons ici le travail de Bloch et Grayson et présentons ensuite une étude analogue du carré symétrique d'une courbe elliptique. Notre travail repose sur une version explicite des conjectures de Beilinson relatives aux valeurs $L(Sym^k E, k+1)$, $k \geq 2$, donnée récemment par Deninger: [Deninger 1988], [Deninger 1989]. Nous vérifions numériquement les relations conjecturées par Beilinson et Deninger dans le cas $k = 2$, pour des courbes elliptiques pour lesquelles cette conjecture explicite donne un énoncé non trivial. Il s'avère que celles d'entre ces courbes qui admettent un point de torsion rationnel sont *en nombre fini*. *Voir* plus précisément, 3.4.1 et 3.4.6.

Les conjectures de Beilinson expriment la valeur $L^{(r)}(s)$ de la première dérivée non nulle en tout entier s, de la fonction L d'un motif sur $\mathbf{Q}$, en termes de *régulateurs* définis à moyen de la K-théorie (ou *cohomologie motivique*) du motif. Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, la valeur spéciale $L(E, 2)$ est ainsi conjecturalement liée au groupe $K_2(E)$. Une façon de se donner des éléments de $K_2(E)$ utilise des diviseurs *définis sur* $\mathbf{Q}$ à support dans les points de torsion de E. Les régulateurs de ces éléments de $K_2(E)$ s'expriment en termes de séries de Kronecker attachées à E; $L(E, 2)$ s'exprime donc conjecturalement comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de certaines séries de Kronecker. Dans le cas d'une courbe *à multiplications complexes*, la fonction analytique $L(E, s)$ est déjà combinaison linéaire de séries de Kronecker — *cf.* [Rohrlich 1987], [Deninger, Wingberg 1988]. Pour *certaines* courbes sans multiplication complexe, Bloch et Grayson [Bloch, Grayson 1986] ont mis en évidence l'existence de telles combinaisons linéaires au point $s = 2$.

Le phénomène le plus important découvert dans [Bloch, Grayson 1986] est la nécessité d'introduire une *condition d'intégralité* dans la conjecture. Si $\mathcal{E}$ est un modèle minimal régulier sur $\mathbf{Z}$ de la courbe E, on conjecture que seuls les éléments du sous-groupe $K_2(\mathcal{E})$ de $K_2(E)$ ont des régulateurs liés à la valeur $L(E, 2)$. Bloch et Grayson ont calculé explicitement cette restriction.

Dans la première partie de notre article, nous reprenons le travail de Bloch et Grayson. Nous insistons sur le fait que l'existence de suffisamment de diviseurs rationnels à support dans $E(\overline{\mathbf{Q}})_{tors}$ semble nécessaire à l'obtention de telles relations linéaires — *voir* 1.3.2. En général, on ne peut donc s'attendre à une telle relation entre séries de Kronecker et la valeur $L(E, 2)$.

Au §1.6 nous comparons les éléments de $K_2(E)$ obtenus à ceux donnés par la méthode modulaire de Beilinson [Schappacher, Scholl 1988] si E est paramétrée par une courbe $X_\circ(N)$.

Bloch, dans [Bloch, Grayson 1986], se demandait s'il n'existe pas de relations linéaires entre valeur L et séries de Kronecker pour s entier ≥ 3. Tout au début de notre travail, nous nous sommes posés la même question. Mais nos essais dans cette direction nous ont inspiré la conviction que ce n'était pas le cas. C'est Deninger qui a trouvé une raison théorique à cela en 1987 :— Dans le cas des courbes elliptiques E *à multiplications complexes* il pouvait établir un lien entre les valeurs spéciales $L(E, s)$, pour s entier > 2, et des régulateurs de Beilinson correspondants — *voir* [Deninger 1988], [Deninger 1989]. Sa méthode consiste à considérer d'abord certaines puissances symétriques de E et à revenir au niveau de la courbe, au moyen des multiplications complexes. Or, pour toute puissance symétrique d'une courbe E *quelconque*, Deninger obtient toujours des éléments d'un certain groupe de cohomologie motivique attachée à cette puissance. Mais, les multiplications complexes faisant défaut, il est impossible de ramener cette version explicite des conjectures de Beilinson à la courbe elle-même.

Nous donnons, dans la deuxième partie de cet article, un resumé de la partie du travail de Deninger qui s'applique aux courbes elliptiques définies sur $\mathbf{Q}$. C'est la seule généralisation à d'autres valeurs spéciales de fonctions L des conjectures explicites du §1 que nous connaissons actuellement. Mais ici, encore plus que dans le cas de Bloch et Grayson, l'absence de suffisamment de diviseurs rationnels à support dans $E(\overline{\mathbf{Q}})_{tors}$, pour une courbe E "générique", restreint la portée de ces conjectures explicites — *voir* 2.4.2. Par exemple, pour toute courbe il existe un k_0 — généralement assez petit; voir plus loin le cas $k = 2$ — tel que, pour tout $k \geq k_0$, la méthode de Deninger ne suffit pas à fabriquer un régulateur non-nul de $Sym^k E$.

Le §2.5 contient la généralisation aux puissances symétriques, due à Scholl, de la formule explicite donnant la *condition d'intégralité*, c'est-à-dire la généralisation de la formule trouvée par Bloch et Grayson qui caractérise le sous-groupe $K_2(\mathcal{E})$ de $K_2(E)$.

La troisième partie de ce travail est consacrée aux vérifications numériques des conjectures de Beilinson-Deninger pour le carré symétrique de certaines courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$, ainsi qu'à la classification de familles de courbes pour lesquelles ces conjectures de Beilinson-Deninger donnent un énoncé non-trivial. On procède de façon différente suivant que la condition d'intégralité intervient ou non.

Si elle n'intervient pas — c'est à dire, si la courbe a potentiellement bonne réduction partout (mais n'admet pas de multiplication complexe ...) — on peut se servir de diviseurs contenant soit tous les conjugués d'un point de torsion donné, soit tous les éléments d'un sous-groupe fini rationnel. Pour les sous-groupes rationnels cycliques nous arrivons à traiter complètement le cas de toutes les courbes admettant un régulateur non-nul: 3.2, 3.3.

Si au contraire il y a obstruction d'intégralité — c'est à dire, si la courbe a réduction (potentiellement) multiplicative quelque part —, alors les diviseurs contenant tous les conjugués d'un point de torsion non rationnels, ou tous les éléments d'un sous-groupe fini rationnel, sont exclus. Nous montrons au numéro 3.4 qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles courbes avec régulateur non-nul, si on se restreint aux diviseurs formés de multiples d'un seul point de torsion rationnel. Au dernier numéro 3.5, nous en présentons des exemples numériques, mettant en évidence l'analogue, pour le carré symétrique, des "relations exotiques" entre séries de Kronecker constatées par Bloch et Grayson au niveau de la courbe elle-même (*cf.* 1.5.3).

1. La courbe

Dans ce numéro, nous reprenons la situation étudiée auparavant dans [Bloch, Grayson 1986].

1.1 Notations

Soient E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ et $\mathcal{E}$ son modèle minimal régulier sur $\mathbf{Z}$.* Fixons une différentielle non nulle ω de E définie sur $\mathbf{R}$. Soit $\omega_1 = |\int_{E(\mathbf{R})^0}\omega|$ la période réelle de (E,ω). Choisissons ω_2 tel que $\Lambda = \omega_1\mathbf{Z}+\omega_2\mathbf{Z}\subset\mathbf{C}$ soit le réseau rendant $(\mathbf{C}/\Lambda, dz)$ isomorphe à (E,ω) sur $\mathbf{C}$ et tel que $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ait une partie imaginaire $y = \Im(\tau)$ positive. On emploie les notations (légèrement modifiées) de [Weil 1976, *chap. VIII*] : $A(\Lambda) = \frac{{\omega_1}^2 y}{\pi}$, $\langle\gamma, x\rangle = exp(\frac{\gamma\overline{x}-x\overline{\gamma}}{A(\Lambda)})$. Pour un diviseur $\mathbf{a} = \sum_{x\in\mathbf{C}/\Lambda} a_x(x)$ sur $E(\mathbf{C})$ et un entier $\nu\geq 0$, on pose—si $\Re(s) > \frac{\nu}{2}+1$—,

$$K_\nu(0,\mathbf{a},s,\Lambda) = \sum_{x\in\mathbf{C}/\Lambda} a_x {\sum_{\gamma\in\Lambda}}' \langle\gamma, x\rangle \frac{\overline{\gamma}^\nu}{(\gamma\overline{\gamma})^s}.$$

Pour $s\in\mathbf{C}$ quelconque, les valeurs de ces *doubles séries de Kronecker* sont définies par prolongement analytique. Si le réseau Λ de K_ν n'est pas précisé, on convient que $\Lambda = \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ — ce qui est indépendant du choix de ω.

Pour un entier $d > 1$, on écrit $\mathbf{Q}[E_d]^o$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel des diviseurs à coefficients rationnels sur E qui sont *définis sur* $\mathbf{Q}$ *en tant que diviseurs,* de degré zéro et à support dans les points de d-torsion de E. Sur $\mathbf{C}$ les éléments de $\mathbf{Q}[E_d]^o$ s'identifient à des diviseurs $\mathbf{a}$ comme avant sur $E(\mathbf{C}) = \mathbf{C}/\Lambda$.

1.2 Cohomologie motivique

Soit X une variété quasi-projective lisse sur $\mathbf{Q}$. Une façon d'introduire les groupes de *cohomologie motivique* de X est de définir, pour tout $j\geq 0$, $i\leq 2j$,

$$H^i_{\mathcal{M}}(X,\mathbf{Q}(j)) = Gr^j_\gamma(K_{2j-i}(X)\otimes\mathbf{Q}),$$

où le gradué est relatif à la filtration γ sur le K-groupe de Quillen tensorisé par $\mathbf{Q}$. — *Cf.* [Beilinson 1985], [Schneider 1988, §3]. On sait démontrer

* Si besoin est, on supposera que E est paramétrée par une courbe modulaire $X_o(N)$. De même, dans nos exemples nous citons parfois des courbes par le nom qui leur est donné dans la "Table 1" de [Modular Functions ... IV].

que l'image de $K_{2j-i}(\mathcal{X}) \otimes \mathbf{Q}$ dans $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(j))$ ne dépend pas du choix d'un modèle *régulier* propre $\mathcal{X}$ de X sur $\mathbf{Z}$—si un tel modèle existe. Elle est notée $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(j))_{\mathbf{Z}}$.

Considérons la suite exacte suivante, extraite de la suite exacte de localisation de $\mathcal{E}$ par rapport à sa fibre générique E — *cf.* [Bloch, Grayson 1986], [Deninger, Wingberg 1988], [Jannsen 1990].

$$\textit{(1.2.0)}\quad H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}} \hookrightarrow H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2)) \xrightarrow{\partial = \coprod \partial_p} \coprod_p H^3_{\mathcal{M}, \mathcal{E}(p)}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}} \to H^3_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$$

La somme est étendue à tous les nombres premiers p.

Beilinson conjecture que:

$$\textit{(1.2.1 ?)}\qquad dim_{\mathbf{Q}} H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}} = ord_{s=0} L(E, s) = 1,$$
$$\textit{(1.2.2 ?)}\qquad H^3_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}} = 0.$$

On sait [Jannsen 1990, §12] que l'"homologie motivique"

$$H^3_{\mathcal{M}, \mathcal{E}(p)}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}} = K'_1(\mathcal{E}(p)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

est non nulle si et seulement si le facteur eulérien $L_p(E, s)^{-1}$ en p de $L(E, s) = \prod_p L_p(E, s)$ s'annule en $s = 0$, donc si et seulement si E a mauvaise réduction multiplicative déployée en p. Cette homologie motivique est alors de dimension 1.

Ceci implique la conjecture :

$$\textit{(1.2.3 ?)}\qquad dim_{\mathbf{Q}} H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2)) = ord_{s=0} L_S(E, s) = 1 + \#\{p \mid L_p(E, 0)^{-1} = 0\},$$

où S est l'ensemble des nombres premiers de mauvaise réduction pour E, et $L_S = \prod_{p \notin S} L_p$ est la fonction L sans facteurs eulériens en S. L'assertion 1.2.3? est un cas particulier de la première partie d'une *S-conjecture de Beilinson*, proposée déjà dans une lettre de Deligne à Soulé [Deligne 1985], et développée par Ramakrishnan [Ramakrishnan 1989], Jannsen et Scholl [non publiés].

Notons que la finitude de la dimension de $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$ — ou de $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$ — n'est toujours pas établie. Remarquons d'autre part qu'on a beaucoup de mal à construire explicitement des éléments non nuls de ces groupes. Toutefois on sait, grâce à la méthode des courbes modulaires développée par Beilinson—*voir* 1.6; *cf.* [Beilinson 1985], [Beilinson 1986], [Schappacher, Scholl 1988]—, que $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}} \neq 0$ pour toute courbe E paramétrée par une courbe modulaire—donc conjecturalement pour toute courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$.

1.3 Comment construire des éléments de $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$

Notons r l'application du *régulateur de Bloch–Beilinson* — *cf.* [Schneider 1988], [Rohrlich 1987], [Deninger, Wingberg 1988];

$$r : H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2)) \longrightarrow H^2_{\mathcal{D}}(E_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(2)) = H^1(E(\mathbf{C}), \mathbf{R}(1))^{\overline{F_\infty}}.$$

Ici, $\overline{F_\infty}$ est l'involution correspondant à la structure réelle $H^1_{dR}(E_{/\mathbf{R}}) \otimes \mathbf{R}(1)$, où $\mathbf{R}(1) = 2\pi i \mathbf{R}$.

Bloch conjecture [Bloch, Grayson 1986, p. 84, note (*)] que l'application r est injective sur $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$, et les résultats de [Bloch, Grayson 1986] sont pleinement en accord avec cette conjecture — *voir* 1.5.3, *cf. aussi* [Schappacher, Scholl 1988, 1.1.3 (iii)]. Dans le cadre général de Beilinson, on est amené à conjecturer au moins l'injectivité de la restriction de r à $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$. Si la conjecture plus forte de Bloch est juste, alors l'application ξ définie ci-après est unique.

1.3.1 Lemme. *Pour tout $d > 1$, il existe une application $\mathbf{Q}$-linéaire*

$$\xi = \xi_d : \mathbf{Q}[E_d]^o \longrightarrow H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$$

tel que, pour tout $\mathbf{a} = \sum_{d.x=0} a_x(x) \in \mathbf{Q}[E_d]^o$, on ait

$$[r(\xi(\mathbf{a})), \omega] = A(\Lambda)^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2, \Lambda),$$

où $[\alpha, \beta] \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{E(\mathbf{C})} \alpha \wedge \beta$, pour deux 1-formes α, β sur E. De plus, si $e > 1$ et $i_e : \mathbf{Q}[E_d]^o \hookrightarrow \mathbf{Q}[E_{de}]^o$, alors $\xi_d = \xi_{de} \circ i_e$.

L'application ξ peut se construire facilement en termes de symboles $\{f, g\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$ relevables dans $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$: Etant donné $\mathbf{a}$, appellons P le sous-groupe de E_d engendré par les points qui apparaissent dans $\mathbf{a}$ avec un coefficient non nul, et posons $d' = \#(P)$. Comme $\mathbf{a}$ est défini sur $\mathbf{Q}$, il en est de même du sous-groupe P. Il existe donc des fonctions rationnelles sur $\mathbf{Q}$, $f, g \in \mathbf{Q}(E)$ ayant comme diviseurs $div(f) = d'\mathbf{a}$, $div(g) = 2[d'(0) - \sum_{y \in P}(y)]$. Par un lemme de Bloch [Bloch 1980,

p. 8.6f], [Deninger, Wingberg 1988, Lemma 5.2], quitte à modifier le symbole $\{f,g\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$ par des symboles du type $\{h,c\},\ h \in \mathbf{Q}(E)^*, c \in \mathbf{Q}^*$, on tombe dans $H^2_{\mathcal{M}}(E,\mathbf{Q}(2)) \hookrightarrow K_2(\mathbf{Q}(E)) \otimes \mathbf{Q}$. Normalisons le régulateur de $\{\phi,\psi\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$, avec $div(\phi) = \sum p_x(x)$, $div(\psi) = \sum q_x(x)$, comme étant $A(\Lambda)^2 \sum_{x,y} p_x q_y\ K_1(0, x-y, 2, \Lambda)$—c'est la normalisation qu'on trouve dans [Bloch, Grayson 1986] (avec $\Lambda = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$); dans [Deninger, Wingberg 1988] et [Deninger 1988], [Deninger 1989], il y a un facteur correctif de $-\frac{1}{2}$. Alors on pose $\xi_d(\mathbf{a}) = \frac{1}{2d'^2}\{f,g\}$, et la formule donnant $r(\xi(\mathbf{a}))$ dans 1.3.1 découle du fait que $K_1(0,x,s)$ est une fonction impaire de la variable x. La construction donnée de ξ_d ne dépend pas du d tel que $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_d]^o$, ce qui démontre la dernière assertion de 1.3.1.

Mais en fait, *la construction qu'on vient de donner ne dépend pas du sous-groupe rationnel P de E_{tors} utilisé tel que* $\mathbf{a}$ *soit à support dans P.* Ceci découle aussitôt de la construction de ξ employée par Deninger—*voir* [Deninger 1988]; *cf.* [Schappacher, Scholl 19**]—; noter pourtant que la normalisation adoptée par Deninger est différente de la nôtre ce qui fait que son application est sensible au changement du sous-groupe P.

1.3.2 *L'action du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$

Voici la *contrainte essentielle*, dans le cas d'une courbe elliptique, de cette façon de se donner des éléments en cohomologie motivique (nous en verrons une autre en 2.4.2, qui s'applique à toutes les puissances symétriques et devient prédominante surtout pour les puissances paires):
Si l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ *dans* $\mathrm{Aut}(E_d) = GL_2(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})$ *contient* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *alors le régulateur* $r(\xi(\mathbf{Q}[E_d]^o))$ *vaut* 0 *— donc conjecturalement aussi* $\xi(\mathbf{Q}[E_d]^o) = 0$.

C'est à cause du fait, déjà utilisé dans la démonstration précédente, que $K_\nu(0,x,s)$, comme fonction de la variable x, a la parité de ν.

L'hypothèse concernant l'image de l'action de Galois est souvent satisfaite. Elle vaut systématiquement pour tout $d > 1$, si l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ dans $\mathrm{Aut}(E_{tors}) = GL_2(\hat{\mathbf{Z}})$ est aussi grand que possible, c'est-à-dire d'indice deux — par exemple, si E est la courbe *37A*, discutée dans [Serre 1972, *exemple 5.5.6*].

1.3.3 *Remarque.* Dans [Ramakrishnan 1990, *Question 8*], on trouve un exemple, dû à R. Ross, d'un symbole $\{\phi,\psi\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$, sur la courbe $E : y^2 = x^3 + x$, tel que $div(\phi)$ contienne un point d'ordre *infini* de E et tel que $6.\{\phi,\psi\}$ soit dans le noyau du symbole modéré $\mathcal{T}$ de la suite exacte de localisation de E relatif à $\mathbf{Q}(E)$. Ici, le point clé de la démonstration réside dans le fait que les valeurs $\mathcal{T}_Q(\{\phi,\psi\}),\ Q \in E(\overline{\mathbf{Q}})$, sont des racines d'unité. D. Grayson a vérifié numériquement que le régulateur de $6.\{\phi, \psi\}$ semble lié à $L(E, 2)$ comme le prédit la conjecture de Beilinson — *voir* 1.4.

Récemment J. Nekovář a obtenu, par une voie entamée par l'un de nous (N.S.), l'exemple suivant (entre autres). Soit E la courbe $y^2 = x^3 - 4x + 4$. Posons $f = y - (2x - 2)$; $g = y$. Alors le diviseur de f contient des points rationnels *d'ordre infini* de E, mais on trouve que $\{f, g\}$ définit bien un élément de $K_2(E)$. D. Grayson a vérifié numériquement que son régulateur est non nul et semble lié à la valeur $L(E, 2)$ selon la conjecture de Beilinson.

1.4 Conjecture de Beilinson

Elle établit un lien entre le premier terme du développement de $L(E, s)$ en $s = 0$ et le régulateur de $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$. Elle dit en particulier que, pour $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_d]^o$, on a

(1.4.0 ?) $$\omega_1^{-1}\ [r(\xi(\mathbf{a})), \omega] \quad \in \quad L'(E, 0).\mathbf{Q},$$

pourvu que $\xi(\mathbf{a})$ *appartienne à* $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$.

Compte tenu de l'équation fonctionnelle de $L(E, s)$ et des propriétés élémentaires des séries de Kronecker, ceci équivaut à dire que:

(1.4.1 ?) $$\partial(\xi(\mathbf{a})) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2) \in L(E, 2).\mathbf{Q}.$$

(Rappelons qu'un réseau non écrit dans K_ν est toujours $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$.)

1.4.2 *Invariance par isogénie*

L'existence d'un diviseur $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_{tors}]^o$ tel que

$$\frac{y^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2)}{L(E, 2)}$$

soit un rationnel non nul est une notion invariante par isogénies rationnelles. En fait, si $\phi : E' \to E$ est une isogénie définie sur $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{a}$ un diviseur convenable sur E, alors ${y'}^2 K_1(0, \phi^*\mathbf{a}, 2, \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau')$ ne diffère de $y^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2)$ que par un facteur rationnel non nul. — En fait, par un calcul direct on se réduit au cas où l'isogénie est induite, sur $\mathbf{C}$, par l'inclusion $\Lambda' \hookrightarrow \Lambda$ de deux réseaux. Alors on note que, par rapport à l'accouplement $\langle ., . \rangle_{\Lambda'}$, on a l'identité $([\Lambda : \Lambda'].\Lambda)^{\perp} = \Lambda/\Lambda' \subseteq \mathbf{C}/\Lambda'$. D'où la relation

$$K_\nu(0, \mathbf{a}, s, \Lambda) = [\Lambda : \Lambda']^{2s-\nu-2} K_\nu(0, \phi^*\mathbf{a}, s, \Lambda').$$

1.5 La formule et les calculs de Bloch et Grayson

L'article [Bloch, Grayson 1986] a mené à la formulation des conjectures de Beilinson que nous connaissons aujourd'hui: il a mis en évidence la nécessité de se restreindre au sous-groupe $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$ de $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$. La caractérisation explicite de ce sous-groupe par le lemme ci-après est à la base de l'article [Bloch, Grayson 1986].

Soit p un nombre premier où E a réduction multiplicative déployée. La fibre spéciale en p de $\mathcal{E}$ est alors un polygone de Néron I_ν. Fixons une numérotation des ses ν côtés telle que la composante numéro 0 contienne l'origine de E. Identifions $H^3_{\mathcal{M},\mathcal{E}(p)}(\mathcal{E}, \mathbf{Q}(2)) = K_1'(\mathcal{E}(p)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ à $\mathbf{Q}$ en choisissant une base—*cf.* 1.2 plus haut. Ceci nous permet d'écrire les images de ∂_p comme des nombres rationnels déterminés à un facteur près.

1.5.1 Lemme. *(i) Si $\nu = 1$, alors $\partial_p = 0$.*

(ii) Soit $x \in E(\mathbf{Q})_\nu$ tel que x mod p appartienne à la première composante. Alors, pour $j = 1, ..., \nu$,

$$\partial_p(\xi((jx) - (0))) = c\ B_3\big(\frac{j}{\nu}\big),$$

où $c \neq 0$ ne dépend que de ν, et $B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ est le troisième polynôme de Bernoulli.

Cette formulation du résultat de Bloch et Grayson nous a été signalée par A.J. Scholl. Il permet en fait de calculer $\partial_p(\xi(\mathbf{a}))$, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_{tors}]^o$. Une formule légèrement plus générale est utilisée dans [Bloch, Grayson 1986] sans démonstration. D'autre part, 1.5.1 est un cas particulier du lemme 2.5.1 plus loin.

1.5.2 *Remarque.* On voit que si, par exemple, tous les nombres premiers p de réduction multiplicative déployée de E sont tels que la fibre spéciale en p n'ait qu'un seul côté, alors les éléments $\xi((jx) - (0))$ de Bloch et Grayson ne sont jamais dans $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2)) - H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$, qui devrait pourtant être non vide. Comme exemple, on peut citer la courbe *11A*, c'est-à dire, $X_1(11)$.

1.5.3 L'article [Bloch, Grayson 1986] peut se voir d'au moins trois points de vue différents:

a) Bloch et Grayson y vérifient numériquement la conjecture $1.4.1_?$, pour 39 courbes elliptiques parmi une collection de 41 dont la torsion rationnelle n'est pas réduite à des points d'ordre 2, et pour des diviseurs $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^o$ convenables.

b) Bloch et Grayson y vérifient sur les valeurs approchées des séries de Kronecker que $dim_{\mathbf{Q}} r(\xi(\mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^0))$ semble être bornée par la dimension de $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$, selon 1.2.3?. (En fait, $dim_{\mathbf{Q}} H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$ n'est pas écrite dans [Bloch, Grayson 1986]; il faut pour chaque courbe déterminer quels sont les nombres premiers de réduction multiplicative *déployée, resp. non déployée.*) De plus, les auteurs vérifient numériquement que les séries de Kronecker semblent respecter les restrictions imposées par ∂. Parfois, il arrive que les $\xi(\mathbf{a})$ qu'on construit tombent automatiquement dans le noyau de ∂_p, pour un premier p tel que $L_p(E, 1) = 0$ (*cf.* 1.5.2.). Ceci se traduit par plus de relations linéaires entre les séries de Kronecker $[r(\xi(\mathbf{a})), \omega]$ que la seule dimension de l'espace ambiant $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$ ne laisserait attendre. Ces relations ainsi constatées numériquement sont parfois appelées *"relations exotiques"*.

c) Bien que ce ne soit pas rédigé dans [Bloch, Grayson 1986], Bloch et Grayson ont certainement dû constater que, si $\partial(\xi(\mathbf{a})) \neq 0$, alors $y^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2)$ ne semble pas être rationnellement lié à $L(E, 2)$.

1.6 Le côté modulaire

Si la courbe E est paramétrée par une courbe modulaire — *i.e.,* $X_\circ(N) \to E$, ou plus généralement $\overline{M} \to E$, pour n'importe quelle courbe modulaire $\overline{M}$ — alors le théorème de Beilinson relatif à la valeur en $s = 2$ des fonctions L de courbes modulaires — *voir* [Schappacher, Scholl 1988]; *cf.* [Beilinson 1985], [Beilinson 1986] — permet de construire des éléments non nuls dans $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}} \subseteq H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$ dont les régulateurs satisfont à la conjecture de Beilinson, *i.e.,* sont liés à la valeur $L(E, 2)$. Malheureusement, il semble être impossible, *en général*, de les situer par rapport au sous-espace vectoriel $\Xi \overset{\text{déf}}{=} \xi(\mathbf{Q}[E_{tors}]^o)$ de $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))$ — bien que conjecturalement $H^2_{\mathcal{M}}(E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$ soit de dimension 1. Toutefois, les quelques *cas particuliers* où on arrive à comparer des symboles de $H^2_{\mathcal{M}}(\overline{M}, \mathbf{Q}(2))$ considérés par Beilinson à Ξ *fournissent les seuls exemples actuellement connus de courbes elliptiques E sans multiplication complexe pour lesquelles on sait démontrer des relations entre $L(E, 2)$ et des séries de Kronecker du type envisagé numériquement par Bloch et Grayson.* C'est pourquoi nous en parlons ici.

1.6.1 Soit donc une application non constante $\psi : \overline{M} \to E$, pour une courbe modulaire $\overline{M}$ sur $\mathbf{Q}$. Supposons qu'il y ait un sous-groupe rationnel fini $P \subseteq E_{tors}$ tel que $\psi^{-1}(P)$ soit entièrement contenu dans l'ensemble des pointes $\overline{M} - M$ de $\overline{M}$. Alors, étant donné un diviseur $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[P]^o$, le régulateur $[r(\xi(\mathbf{a})), \omega]$ calculé "sur la courbe elliptique" est le même que le régulateur d'un symbole d'unités modulaires dans $\{\mathcal{O}^*(M), \mathcal{O}^*(M)\}$ relevé dans $H^2_{\mathcal{M}}(\overline{M}, \mathbf{Q}(2))$—et en fait dans $H^2_{\mathcal{M}}(\overline{M}_{\mathbf{Z}}, \mathbf{Q}(2))$—, calculé "sur la courbe modulaire". — *Cf.* [Schappacher, Scholl 1988, 1.1] pour la construction et l'énoncé des propriétés des symboles construites à partir des unités modulaires. Vue la construction de $\xi(\mathbf{a})$ donnée dans la démonstration du lemme 1.3.1, l'égalité des régulateurs découle immédiatement de la formule $[r_E(\sigma), \omega] = [r_{\overline{M}}(\psi^*(\sigma)), \psi^*\omega]$ qui est elle-même une conséquence immédiate de l'identité, valable sur toute courbe algébrique lisse X,

$$[r_X(\{f,g\}), \omega] = \int_{X(\mathbf{C})} \log|f| \, \overline{d \log g} \wedge \omega.$$

Voir [Deninger, Wingberg 1988, 1.10], et [Schappacher, Scholl 1988, 1.3].

Or, les régulateurs provenant d'unités modulaires de $\overline{M}$ satisfont à la conjecture de Beilinson relative à $L(\overline{M}, s)$ en $s = 0$ — c'est le théorème de Beilinson, *voir* [Schappacher, Scholl 1988, 1.1.2]. En passant à la composante propre correspondant à E sous l'action de l'algèbre de Hecke, on en déduit que $y^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2) \in L(E, 2).\mathbf{Q}$, et que en fait $\partial(\xi(\mathbf{a})) = 0$, comme l'exige la conjecture $1.4.1_?$.

Reste donc à vérifier, chaque fois que la situation discutée ici se présente, si $r(\xi(\mathbf{Q}[P]^o))$ est non nul. Pour une fois, c'est un énoncé qui se *démontre* sur ordinateur.

1.6.2 Voici un cadre qui couvre tous les exemples que nous connaissons actuellement où l'on peut démontrer des relations entre séries de Kronecker et la valeur $L(E, 2)$ par la méthode esquissée en 1.6.1.

Soit le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \overline{M} & \longrightarrow & X_\circ(N) \\ \psi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\varphi \\ E & \xrightarrow{\lambda} & E' \end{array}$$

où $\varphi : X_\circ(N) \to E'$ est une "courbe de Weil forte involutoire", *i.e.*, **1.** il n'y a pas de courbe elliptique E_1 non isomorphe à E' qui s'insère dans l'application $\varphi : X_\circ(N) \to E_1 \to E'$, et **2.** E' est le quotient $X_\circ(N)/U$ par un sous-groupe U du groupe W engendré dans $\mathrm{Aut}(X_\circ(N))$ par les involutions *d'Atkin-Lehner* w_p, pour les diviseurs premiers p de N. Ensuite, λ est une isogénie définie sur $\mathbf{Q}$, de degré $d > 2$, et $\overline{M}$ est le produit fibré $E \times_{E'} X_\circ(N)$. Posons $P \overset{\text{déf}}{=} ker\lambda$.

Supposons maintenant que $\overline{M}$ est une courbe modulaire et que l'application $\overline{M} \longrightarrow X_\circ(N)$ est l'application naturelle entre courbes modulaires. Alors, comme E' est involutoire, $\varphi^{-1}(0_{E'})$ est contenue dans l'ensemble des pointes de $X_\circ(N)$. Par conséquent, $\psi^{-1}(P)$ ne consiste que de pointes de $\overline{M}$. Alors, *si* $r(\xi(\mathbf{a})) \neq 0$, *pour un* $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[P]^o$, on trouve que $y^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2) \in L(E,2).\mathbf{Q}^*$.

1.6.3 *Exemples*

a) $N = 11$, $E' = X_\circ(11)$, $E = X_1(11) = \overline{M}$, $U = \{1\}$, P engendré par $x = (\infty) - (0)$. Le fait que $K_1(0, 2x, 2) \neq 0$ a été vérifié par Grayson: *voir* la table de [Bloch, Grayson 1986], courbe *11A*.

b) $N = 20$, $E' = E = X_\circ(20) = \overline{M}$, $U = \{1\}$, $P = E(\mathbf{Q})_{tors} = \{pointes\}$, $\#(P) = 6$. Alors [Bloch, Grayson 1986], table, *20B*, montre que $r(\xi(\mathbf{Q}[P]^o)) \neq 0$.

c) $N = 24$, $E' = E = X_\circ(24) = \overline{M}$, *i.e.*, la courbe *24B*, $U = \{1\}$, $P = E(\mathbf{Q})_{tors} = \{pointes\} \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Nous avons vérifié sur ordinateur que $K_1(0, x, 2) \neq 0$, pour $x \in \mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ correspondant à un point rationnel de E d'ordre 4. Donc $r(\xi(\mathbf{Q}[P]^o)) \neq 0$.

d)? $N = 26$, $E' =$"26B", $E =$"26A", $U = \{1, w_2\}$, $\#(P) = 3$. Nous ignorons pour le moment si $\overline{M}$ est modulaire.

2. Les puissances symétriques

Ce numéro est consacré à l'énoncé des conjectures explicites générales relatives aux puissances symétriques d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, analogues aux conjectures figurant en §1.

2.1 Les motifs

Afin de pouvoir parler de la cohomologie motivique d'un motif, il faut travailler avec la catégorie $\mathcal{M}_\mathbf{Q}$ des motifs sur $\mathbf{Q}$ construite à partir de la catégorie d'objets les $h(X)$, pour toutes les variétés projectives lisses X sur $\mathbf{Q}$, avec morphismes (si Y est équidimensionnelle)

$$Hom(h(X), h(Y)) = CH^{dim Y}(X \times Y) \otimes \mathbf{Q},$$

des cycles algébriques *à équivalence rationnelle près* (et non pas à équivalence homologique près).

On dispose dans cette catégorie d'un motif $h_1(E)$, et un motif $Sym^k E$ peut y être construit par un des procédés équivalents suivants.

(2.1.1) On peut suivre la méthode de Beilinson dans [Beilinson 1986, §4], et considérer E^k comme la sous-variété de E^{k+1} sur laquelle la somme des composantes vaut zéro — elle sera notée ici $E^{k'}$. Alors $Sym^k E$ est le sous-motif de $h(E^{k'})$ sur lequel le groupe des permutations $\mathcal{S}_{k+1}$ agit par le caractère signe.

(2.1.2) Deninger [Deninger 1989, §8] montre que ceci équivaut à prendre la partie de $h_1(E)^{\otimes k}$—c'est un sous-motif de $h(E^k)$ muni d'une action de $\mathcal{S}_k$—sur laquelle $\mathcal{S}_k$ agit par le caractère signe.

(2.1.3) Finalement — *cf.* [Scholl 1990, §1] — $Sym^k E$ peut être vu comme la partie de $h(E)^{\otimes k}$ sur laquelle

- $\mathcal{S}_k$ agit par le caractère signe;
- en chaque composante, $h(-1)\colon h(E) \to h(E)$ agit par -1;

Alors, pour toute théorie de cohomologie $H^\bullet$ compatible avec nos motifs, qui admet une formule de Künneth et qui satisfait $H(h_1(\text{point})) = H^1(\text{point})$, on a

$$H(Sym^k(E)) = Sym^k H^1(E).$$

2.2 Cohomologie motivique

La cohomologie motivique se factorise par la catégorie des motifs que nous considérons. On peut donc parler de $H^i_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(j))$. La "partie intégrale" $H^i_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(j))_{\mathbf{Z}}$ peut être définie comme l'image dans $H^i_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(j))$ de $H^i_{\mathcal{M}}(\tilde{\mathcal{E}^k}, \mathbf{Q}(j))$, où $\tilde{\mathcal{E}^k}$ est la désingularisation de la puissance de $\mathcal{E}$ sur $\mathbf{Z}$. De même, dans la troisième construction de $Sym^k E$ (2.1.3), la généralisation de l'"homologie motivique" utilisée en 1.2 s'écrit comme la partie propre par rapport aux deux opérations décrites en (2.1.3) de l'espace $H^i_{\mathcal{M},\tilde{\mathcal{E}^k}(p)}(\tilde{\mathcal{E}^k}, \mathbf{Q}(j))$. Nous le notons $H^i_{\mathcal{M},p}(Sym^k E, \mathbf{Q}(j))$.

On obtient alors la suite exacte suivante, analogue de 1.2.0.

(2.2.0) $$H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1))_{\mathbf{Z}} \hookrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1)) \xrightarrow{\partial=\coprod \partial_p}$$

$$\xrightarrow{\partial=\coprod \partial_p} \coprod_p H^{k+2}_{\mathcal{M},p}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1)) \longrightarrow H^{k+2}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1))_{\mathbf{Z}}.$$

Soit $L(Sym^k E, s) = \prod\limits_p L_p(Sym^k E, s)$ la fonction L du motif $Sym^k E$. Elle est définie par rapport aux *Frobenius géométriques* agissant sur les réalisations l-adiques du motif en question. Par conséquent, $L(Sym^1 E, s)$ est la fonction $L(E, s)$ habituelle de la courbe elliptique E; *cf.* [Schappacher 1988, I.1.8].

Voici trois conséquences des conjectures de Beilinson, analogues aux énoncés correspondants de 1.2.

(2.2.1 ?) $dim_{\mathbf{Q}} H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1))_{\mathbf{Z}} = ord_{s=0} L(Sym^k E, s) = [\frac{k}{2}]+1$

(2.2.2 ?) $H^{k+2}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1))_{\mathbf{Z}} = 0$

(*2.2.3 ?*)

$$dim_{\mathbf{Q}} H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1)) = [\frac{k+2}{2}] + \#\{p \mid L_p(Sym^k E, 0)^{-}1 = 0\}$$

2.3 L'application de Deninger

Imitant les *symboles d'Eisenstein* de Beilinson [Beilinson 1986], Deninger [Deninger 1988], [Deninger 1989, §8], construit, pour tout entier $d > 1$, une application

$$\xi : \mathbf{Q}[E_d]^\circ \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1))$$

qui, pour $k = 1$, coincide avec l'application ξ de 1.3.1.

2.3.0 *Remarque.* En fait, la construction de Deninger donne parfois un peu plus, et nous allons en profiter. Ainsi, pour k *pair*, on peut construire une application qui associe un élément de $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1))$ à chaque diviseur de degré zéro à support dans E_d sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agit par ± 1. — En effet, la première étape de la construction de Deninger est de passer d'un diviseur donné β au produit $\beta \otimes \alpha \otimes ... \otimes \alpha$, avec k exemplaires d'un même diviseur α, et sur l'image ultérieure de ce produit le groupe symétrique $\mathcal{S}_{k+1}$ agit par le caractère signe — *voir* [Deninger 1989, 8.5]. Cette image est donc invariante par $\beta \mapsto -\beta$.

Comme pour $k = 1$, écrivons r l'application du régulateur de Beilinson;

$$r : H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1)) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{D}}(Sym^k E_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(k+1)).$$

Ce groupe de *cohomologie de Deligne* est la partie de $Sym^k H^1(E(\mathbf{C}), \mathbf{C})$, obtenue par la projection $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}(k)$, qui est invariante sous l'involution de de Rham $\overline{F_\infty}$. Il est donc de dimension $[\frac{k}{2}]+1$ sur $\mathbf{R}$. Si ω, η est une base de $H^1_{dR}(E_{/\mathbf{Q}})$, alors une base de $H^{k+1}_{\mathcal{D}}(Sym^k E_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(k+1))$ est donnée par les projections par $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}(k)$ des différentielles

$$\omega^{(k)}, \omega^{(k-1)}\eta, ..., \omega^{(k-[\frac{k}{2}])}\eta^{([\frac{k}{2}])}$$

comme $\mathbf{R}$-base [Deligne 1979, 7.7 (b)]. La projection sera notée par une tilde.

Pour deux k-formes α, β sur E^k, soit $[\alpha, \beta] = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{E^k(\mathbf{C})} \alpha \wedge \beta$. Alors, ξ est caractérisé (conjecturalement de façon unique) par les relations suivantes—*cf.* 1.3.1. Si $\mathbf{a} = \sum_{d.x=0} a_x(x) \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$, on a, pour $j = 0, ..., [\frac{k}{2}]$,

$$[r(\xi(\mathbf{a})), \tilde{\omega}^{(k-j)}\tilde{\eta}^{(j)}] = A(\Lambda)^{k-j+1} K_{k-2j}(0, \mathbf{a}, k-j+1). \tag{2.3.1}$$

2.3.2 *Remarque.* Remarquons que les deux membres de 2.3.1 sont homogènes de poids $k-2j$ par rapport à ω: le changement $\omega \mapsto \lambda\omega, \lambda \in \mathbf{R}$, multiplie le côté droit par λ^{k-2j}. Ceci est en accord avec le fait que, à gauche, $\omega \mapsto \lambda\omega$ implique que $\eta \mapsto \lambda^{-1}\eta$ — se rappeler par exemple la relation de Legendre.

2.4 Conjecture de Beilinson

Ici encore, le formalisme est tout à fait analogue au cas $k = 1$—*voir* 1.4. Pour trouver la période qui généralise le ω_1 dans 1.4 on remarque que, si ω est définie sur $\mathbf{Q}$ alors $\omega_1 = c^+(H^1(E)(1))$ dans le formalisme de Deligne [Deligne 1979] et on fait appel à [Deligne 1979, 7.7], avec les données $c^-(H^1(E)(1)) = \Im(\omega_2)i = \omega_1 yi$ et $\delta(H^1(E)(1)) = 2\pi i$. [Deligne 1979, 7.7] permet alors de calculer la période $c^+(Sym^k E(k))$ dans la conjecture suivante.

2.4.0 Conjecture. *Soient* $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{[\frac{k}{2}]} \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$ *tels que leurs images par* ξ *appartiennent à* $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(2))_{\mathbf{Z}}$. *Alors*

$$c^+(Sym^k E(k))^{-1} \text{dét}([r(\xi(\mathbf{a}_i)), \tilde{\omega}^{(k-j)}\tilde{\eta}^{(j)}])_{i,j} \in L^{([\frac{k}{2}]+1)}(Sym^k E, 0).\mathbf{Q}.$$

Nous allons donner la reformulation analogue à $1.4.1_?$ de cette conjecture dans le cas $k = 2$ au §3.

2.4.1 *Remarques.*

(i) Comme en 2.3.2, on vérifie que la conjecture ne dépend pas du choix de ω qui affecte le côté gauche de la relation. En fait, l'homogénéité de $c^+(Sym^k E(k))$ est de degré $\frac{k}{2}(\frac{k}{2}+1)$ en λ, si k est pair, et $([\frac{k}{2}]+1)^2$, si k est impair—ce sont précisément les degrés qu'on obtient par la règle donnée en 2.3.2 pour le déterminant.

(ii) La conjecture 2.4.0 est *invariante par isogénie*, dans le sens suivant. Soit une isogénie $\phi : E' \to E$ définie sur $\mathbf{Q}$. Alors en prenant des diviseurs $\mathbf{a}'_i = \phi^*(\mathbf{a}_i)$, on ne change que par un facteur rationnel le déterminant de 2.4.0. Ceci se voit sur 2.3.1 par les calculs esquissés en 1.4.2.

(iii) Les puissances symétriques *paires* d'une courbe elliptique E sont *invariantes par torsion quadratique*. Plus précisément si E est la tordue de E' par $\sqrt{D}$, alors $\sqrt{D}$ définit sur $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ une isogénie $\phi : E' \to E$ telle que $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agisse sur $\mathbf{a}'_i = \phi^*(\mathbf{a}_i)$ par ± 1. Grâce à 2.3.0, ceci permet de définir $\xi(\mathbf{a}'_i)$, et de toutes les séries de Kronecker dans son régulateur — qui ont toutes la même parité que l'ordre de la puissance symétrique — $\sqrt{D}$ sort à une puissance paire. Donc finalement on est dans la même situation qu'en (ii): à un facteur rationnel près, les régulateurs pour les puissances symétriques paires restent inchangés par torsion quadratique. — Il en est de même, bien sûr, des fonctions L des puissances symétriques paires.

Vues les propriétés bien connues de l'action de Galois sur les points de torsion d'une courbe elliptique sans multiplication complexe [Serre 1972], le lemme suivant implique que, pour k assez grand, il est impossible de trouver des diviseurs $\mathbf{a}_i$ rationnels sur $\mathbf{Q}$ tels que le déterminant dans 2.4.0 soit non nul. En fait, les calculs de 3.3 et 3.5 indiquent bien que ces k "assez grands" ont tendance à être plutôt petits pour la plupart des courbes elliptiques....

2.4.2 Lemme. *Soient $\nu \geq 0, d > 1$, et $s \in \mathbf{C}$. Alors pour tout $w \in \mathbf{C}/\Lambda$, on a*

$$\sum_{d.x=w} K_\nu(0,x,s,\Lambda) = d^{\nu+2-2s} K_\nu(0,w,s,\Lambda).$$

En particulier, $\sum_{d.x=0} K_\nu(0,x,s,\Lambda)$ ne diffère de $K_\nu(0,0,s,\Lambda)$ que par un facteur qui ne dépend que de $\nu - 2s$.

Ce facteur est donc partout le même quand on écrit sous la forme de 2.3.1 les coefficients de la matrice dont on prend le déterminant en 2.4.0. Noter de plus que $K_\nu(0,0,s,\Lambda) = 0$ si ν est impair.

La démonstration du lemme est une simple application des relations d'orthogonalité des caractères.

2.5 Calcul de ∂

Voici la généralisation annoncée plus haut du lemme 1.5.1. Nous quittons, pour une fois, le corps des nombres rationnels: si F est une extension de $\mathbf{Q}$, nous notons par E_F l'extension des scalaires de E à F, et par $\mathcal{E}_F$ le modèle régulier de E_F sur $\mathcal{O}_F$. Le lemme suivant fait référence à la suite exacte analogue à 2.2.0 sur F.

2.5.1 Lemme. *Soit $\mathbf{a} = \sum_{d.x=0} a_x(x) \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$. Soit F un corps de nombres tel que tous les points de d-torsion de E soient rationnels sur F. Soit v une place de F telle que la fibre spéciale $\mathcal{E}_F(v)$ soit un polygone de Néron I_ν, dont nous numérotons les côtés comme en 1.5. Notons $d(\mathbf{a}, i)$, pour $i = 0, ..., \nu - 1$, le degré de la réduction de $\mathbf{a}$ restreinte à la i-ième composante. Alors on a l'équivalence*

$$\partial_v(\xi(\mathbf{a})) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\nu-1} d(\mathbf{a}, i) B_{k+2}\big(\frac{i}{\nu}\big) = 0,$$

où $B_n(X)$ est le n-ième polynôme de Bernoulli.

Ce lemme sera démontré dans [Schappacher, Scholl 19**]. Disons simplement qu'il y a deux démonstrations possibles de ce lemme. L'une s'appuie sur les constructions dans [Beilinson 1986, 3.1.7, et avant]. En effet, la restriction aux pointes correspond par spécialisation à la réduction en une place multiplicative — *cf.* 3.4.3 plus loin. L'autre démonstration consiste à généraliser la formule 1.5.1 de Bloch et Grayson par la théorie des invariants des groupes symétriques $\mathcal{S}_k$ ....

2.5.2 Rappelons que les polynômes de Bernoulli sont définis par l'identité

$$\frac{te^{tX}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(X) \frac{t^k}{k!},$$

de sorte qu'on ait:

$$B_0(X) = 1, \qquad B_1(X) = X - \frac{1}{2}, \qquad B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

$$B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X, \qquad B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5(X) = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X, \qquad B_6(X) = X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42}$$

3. Le carré symétrique

Le lemme 2.4.2 indique combien il est difficile de se procurer suffisamment d'éléments indépendants de $H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^k E, \mathbf{Q}(k+1))_{\mathbf{Z}}$. Pour disposer facilement de courbes avec un déterminant régulateur non nul, il est commode de se borner à des espaces de dimension 2, c'est-à-dire à $k \leq 3$. Or, entre 2 et 3, $k = 2$ semble préférable, car les séries K_ν figurant dans le régulateur ont la parité de k. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes d'abord occupés du carré symétrique.

3.1 La fonction L

Nous tirons du travail de Coates et Schmidt [Coates, Schmidt 1987] les renseignements suivants.

3.1.1 Le facteur eulérien en p, $L_p(Sym^2 E, s)^{-1}$ s'annule en $s = 0$ si et seulement si la courbe E a mauvaise réduction multiplicative en p.

Selon 2.2.3?, ceci prédit que $dim_{\mathbf{Q}} H^3_{\mathcal{M}}(Sym^2 E, \mathbf{Q}(3)) - 2$ serait le nombre des places de réduction multiplicative.

3.1.2 *Equation fonctionnelle*

Soit C le conducteur du système de représentations l-adiques $H_l(Sym^2 E)$. On pose $\Lambda(Sym^2 E, s) = C^{s/2}\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(Sym^2 E, s)$. Alors

$$\Lambda(Sym^2 E, 3-s) = \Lambda(Sym^2 E, s).$$

Ceci, joint à 2.3.1 et à la formule $c^+(Sym^2 E(2)) = \pi {\omega_1}^2 y$ tirée de [Deligne 1979, 7.7], nous permet de traduire 2.4.0, pour $k = 2$, en un énoncé en $s = 3$:

3.1.3 Conjecture. *Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$ tels que leurs images par ξ appartiennent à $H^3_{\mathcal{M}}(Sym^2 E, \mathbf{Q}(3))_{\mathbf{Z}}$ — autrement dit, tels que $\partial(\xi(\mathbf{a})) = \partial(\xi(\mathbf{b})) = 0$. Alors on a l'identité suivante à un facteur $\varrho \in \mathbf{Q}$ près.*

$$\text{(3.1.3 ?)} \qquad \tfrac{y^4}{\pi^2} \text{ dét} \begin{pmatrix} K_2(0,\mathbf{a},3) & K_0(0,\mathbf{a},2) \\ K_2(0,\mathbf{b},3) & K_0(0,\mathbf{b},2) \end{pmatrix} = \varrho\, C^{3/2} L(Sym^2 E, 3).$$

Par la suite, on posera (rappelons encore une fois que K_ν est relative au réseau $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$):

$$R(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{y^4}{\pi^2} \text{ dét} \begin{pmatrix} K_2(0,\mathbf{a},3) & K_0(0,\mathbf{a},2) \\ K_2(0,\mathbf{b},3) & K_0(0,\mathbf{b},2) \end{pmatrix}.$$

3.2 Courbes ayant bonne réduction potentielle

Nous examinons la conjecture 3.1.3 en deux étapes : d'abord, dans ce numéro et le suivant, en exigeant que la courbe ait bonne réduction potentielle partout, ce qui permet d'éviter complètement l'obstruction d'intégralité; puis, aux §§ 3.4 et 3.5, pour des courbes à réduction semi-stable en une place au moins, en tenant compte des restrictions imposées dans ce cas par le lemme 2.5.1.

Même si la courbe E a bonne réduction potentielle partout, une action du groupe de Galois trop grande sur les points de torsion de E nous empêchera de trouver deux diviseurs rationnels $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[E_{tors}]^\circ$ tels que $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ soit non-nul. Si par exemple $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ s'envoie surjectivement sur $\mathrm{Aut}(E_d)$, on déduit ausitôt de 2.4.2 qu'il est impossible de trouver $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$ avec $R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Il faut donc une hypothèse restrictive sur l'action du groupe de Galois, et nous allons bientôt supposer *qu'il y existe un sous-groupe cyclique fini* $P \subset E_{tors}$ *défini sur* $\mathbf{Q}$. Toutefois, avant d'imposer ceci, force est de constater qu'*il y a des cas intermédiaires* dont la paramétrisation modulaire n'est pas aussi bien comprise que les courbes $X_\circ(N), X_1(N)$ ce qui fait que *nous ignorons pour l'instant si leur nombre est fini.* Ce sont les courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ sans multiplication complexe dont l'image du groupe de Galois dans $\mathrm{Aut}(E_p)$, pour un nombre premier p, est le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan non déployé. (Rappelons que les sous-groupes de Cartan non déployés n'apparaissent pas comme image de Galois *sur* $\mathbf{Q}$. — *Voir* [Serre 1972, 5.2.iv].)

3.2.0 *Exemple*

Soit $E : y^2 = x^3 - 6x + 8$ la courbe elliptique d'invariant $j = -1728$, conducteur $N = 6912 = 2^8 3^3$, discriminant $\Delta = -2^9 3^3$. Le conducteur du carré symétrique vaut $C = 2^6 3^4$. Les facteurs eulériens du carré symétrique aux mauvaises places sont $L_2(Sym^2 E, s) = (1 + 2^{1-s})^{-1}$ et $L_3(Sym^2 E, s) \equiv 1$. Dans la table 4 de [Modular Functions ...., IV, p. 132], E s'appelle "$25^* - 1$". E n'admet pas de multiplication complexe; l'image de Galois dans $\mathrm{Aut}(E_3)$ est le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan déployé. En fait, cette image peut s'interpréter de deux façons différentes comme un tel normalisateur : les corps quadratiques associés aux deux quotients de l'image par les sous-groupes de Cartan sont respectivement $\mathbf{Q}(\sqrt{6})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$. Il n'y a donc pas de point rationnel d'ordre 3 sur E, mais les diviseurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ suivants sont définis sur $\mathbf{Q}$. Soit P le point de E dont le paramètre analytique dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ vaut 1/3. L'orbite de P sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est $O(P) = \{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1+\tau}{3}\}$. On pose $\mathbf{a} = 4.(0) - \sum_{Q \in O(P)}(Q)$ et $\mathbf{b} = 4.(0) - \sum_{2.Q=0}(Q)$. Alors on trouve que numériquement $R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$,

et en fait
$$\frac{C^{3/2}\ L(Sym^2E,3)}{R(\mathbf{a},\mathbf{b})} \approx -2^8 3^4 = -20736.$$
Ceci est en accord avec la conjecture 3.1.3.

Passons maintenant au cas où l'image du groupe de Galois est contenue dans un sous-groupe de Cartan déployé : À **Q**-isogénie et à torsion par un caractère quadratique près — ce sont les deux opérations qui n'affectent pas le carré symétrique de la courbe; *cf* 2.4.1, (ii), (iii) —, il y a vingt-quatre courbes elliptiques sur **Q** sans multiplication complexe qui ont potentiellement bonne réduction partout — autrement dit, dont l'invariant j est entier —, et qui *possèdent un sous-groupe cyclique fini* P *défini sur* **Q**.

En fait, on possède grâce aux travaux de Mazur [Mazur 1978] une liste complète des groupes cycliques d'ordre premier qui apparaissent comme sous-groupe de $E(\mathbf{Q})$, pour E une courbe elliptique sur **Q**. Si N décrit les ordres possibles de ces sous-groupes cycliques, alors notre liste de courbes découle de la recherche systématique des points rationnels et d'invariant j entier sur les courbes modulaires $X_\circ(N)$. Nous supprimons ici les détails des calculs.

Pour chacune des 24 courbes ainsi trouvées, il n'y a en fait qu'un seul sous-groupe cyclique fini P qui est rationnel sur **Q**. Ecrivons d son ordre (d est donc toujours premier), et posons
$$\mathbf{a} = d(0) - \sum_{x\in P}(x).$$

L'hypothèse de bonne réduction potentielle entraîne que
$$H^3_{\mathcal{M}}(Sym^2E, \mathbf{Q}(3))_{\mathbf{Z}} = H^3_{\mathcal{M}}(Sym^2E, \mathbf{Q}(3)).$$
La conjecture 3.1.3 prédit donc en particulier pour ces 24 courbes, que, pour $\mathbf{b}_n = n^2(0) - \sum_{nx=0}(x)$, le quotient

$$\varrho_n = \frac{R(\mathbf{a},\mathbf{b}_n)}{C^{3/2}\ L(Sym^2E,3)} \qquad (n \geq 2), \tag{3.2.1}$$

est un nombre rationnel.

Noter que, d'après le lemme 2.4.2, on a
$$\varrho_n = \varrho_2\ \frac{4}{15}\ \frac{n^4-1}{n^2}.$$

Donc, afin de ne pas introduire des facteurs parasites, on peut calculer soit ϱ_d, soit ϱ_2. Il s'avère en fait que les résultats sont plus simples quand on calcule ϱ_2. C'est donc ce que nous donnons comme résultats dans la table suivante. — Bien entendu, les calculs ne déterminent qu'approximativement ces nombres; dans aucun cas on ne sait *démontrer* que ce soit des nombres rationnels. Toutefois, les résultats cohérents présentés dans la table ci-après semblent convaincants.

3.2.2 *Les résultats*

Dans la table suivante, nous notons ϱ_2^{-1} au lieu de ϱ_2; car, pour chacune des vingt-quatre courbes, on trouve numériquement que

$$\varrho_2^{-1} \approx \pm\, m\, 2^\alpha\, 3^\beta\, d^\gamma,$$

avec $3 \leq \alpha \leq 14$, $0 \leq \beta \leq 2$, $1 \leq \gamma \leq 3$ — en fait, $\gamma \leq 2$, sauf si $d = 5$ —, et *m vaut toujours* 1, *sauf pour quatre courbes:*

n° 5 $m = 13$; *n*° 7 $m = 1/5$; *n*° 15 $m = 1/17$; *n*° 24 $m = 1/21$.

Ces *numérateurs* (!) de ϱ_2 dans les trois derniers cas devraient indiquer que le réseau engendré par les images $\xi(\mathbf{a}), \xi(\mathbf{b})$ n'est pas le réseau maximal pour le raffinement "sur **Z**" de la conjecture de Beilinson.

D'autre part, le *dénominateur* 13 de ϱ_2 obtenu pour la courbe *n*° 5 semble bien plus intéressant. Pourtant nous en ignorons à présent une interprétation dans le cadre de la conjecture de Bloch et Kato [Bloch, Kato 1989]. — Aussi faut-il dire que c'est la seule courbe pour laquelle nous avons trouvé un dénominateur étrange — tous les facteurs bizarres pour les courbes semi-stables du numéro 3.5 semblent s''expliquer' par des "relations exotiques".

NB. Remarquons en passant,

- — que dans le cas de la conjecture de Beilinson relatif à la valeur $L(E, 2)$, Bloch et Grayson n'ont pas trouvé de facteur inattendu comme dans notre calcul de la courbe *n*° 5. Peut-être faudrait-il pousser plus loin les calculs de Bloch et Grayson ?
- — que Rohrlich [Rohrlich 1987] a très bien su contrôler les facteurs rationnels intervenant dans le cas d'une *courbe à multiplication complexe,* pour la conjecture de Beilinson relatif à la valeur $L(E, 2)$.

3.2.3 *Remarques sur les calculs*

Les séries K_ν de Kronecker ont été calculées comme des intégrales de fonctions thêta d'après [Weil 1976, p.79–80].

Pour la valeur $L(Sym^2E, 3)$, une méthode de calcul satisfaisante découle de [Friedman 1988]. Toutefois, nous ne l'avons pas implémentée, car le calcul naïf, certes peu précis, du produit eulérien semble suffisant pour nos besoins. La précision des calculs est d'environ huit chiffres significatifs.

3.3 Table numérique

Pour chacune des 24 courbes elliptiques sans multiplication complexe avec j entier qui admettent un sous-groupe cyclique fini non trivial P défini sur $\mathbf{Q}$, nous donnons ici les informations suivantes.

ligne 1: numéro, (éventuellement, sigle relatif à [Modular Functions ... IV],) conducteur N de la courbe et signe de son discriminant Δ.

ligne 2: a_1, a_2, a_3, a_4, a_6; $|\Delta|$, C, $L_p(Sym^2E, s)$, d, (a, b), ϱ_2^{-1}, où :

les a_i sont les coefficients de l'équation de Weierstrass généralisée;

$|\Delta|$ est la valeur absolue de son discriminant;

C est le conducteur de Sym^2E;

$|\Delta|$ et C sont donnés par leurs exposants des diviseurs premiers p de N;

les facteurs eulériens aux mauvaises places* p sont codés comme ceci:

1 : $L_p(Sym^2E, s)^{-1} = 1$
$+$: $L_p(Sym^2E, s)^{-1} = 1 + p^{1-s}$
$-$: $L_p(Sym^2E, s)^{-1} = 1 - p^{1-s}$;

d est l'ordre du sous-groupe P et $\frac{a+b\tau}{d} \pmod{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau}$ est un générateur de
$P(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$;

finalement, on donne le nombre rationnel suggéré par notre calcul du quotient $\varrho_2^{-1} = \frac{C^{\frac{3}{2}} L(Sym^2E,3)}{R(\mathbf{a},\mathbf{b}_2)}$, les notations étant celles de 3.2.

Par exemple, la cinquième courbe est donnée par l'équation $E \ : \ y^2 = x^3 + x^2 - 72x - 380$. Le conducteur de E est $N = 15376 = 2^4 \ . \ 31^2$, son discriminant $\Delta = -30505984 = -2^{10} \ . \ 31^3$. (Le réseau Λ attaché au modèle donné de E est donc un losange.) Le carré symétrique de E a conducteur $C = 3844 = 2^2 \ . \ 31^2$. Pour les deux diviseurs premiers de N, $p = 2, 31$, le facteur eulérien de $L(Sym^2(E), s)$ en p est $(1+p^{1-s})^{-1}$. La courbe possède un sous-groupe — et donc en l'occurence un point rationnel — d'ordre 2 sur $\mathbf{Q}$ qui, sur $\mathbf{C}$, est engendré par $\frac{1}{2} \pmod{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau} \in \mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$. Enfin, le calcul donne approximativement $\varrho_2 \approx \frac{1}{106496} = \frac{1}{2^{13} \ . \ 13}$.

---

* Nous remercions G. Henniart qui nous a indiqué des méthodes efficaces pour déterminer les facteurs eulériens de $L(Sym^2E, s)$ aux mauvaises places, ainsi que le conducteur C.

1. *128A* $\mathbf{N = 128 = 2^7}$ $+$
0 -1 0 1 -1 7 *8* `1` 2 *1 0* 2^9

2. *200C* $\mathbf{N = 200 = 2^3 5^2}$ $+$
0 1 0 -3 -2 *4 3* *4 2* `1 -` 2 *0 1* -2^9

3. $\mathbf{N = 1152 = 2^7 3^2}$ $+$
0 0 0 -6 4 *8 3* *8 2* `1 +` 2 *1 0* $2^{11}\ 3$

4. $\mathbf{N = 4225 = 5^2 13^2}$ $+$
1 1 1 -23 -44 *3 3* *2 2* `- -` 2 *1 0* $2^{12}\ 3$

5. $\mathbf{N = 15376 = 2^4 31^2}$ $-$
0 1 0 -72 -380 *10 3* *2 2* `+ +` 2 *1 0* $2^{12}\ 13$

6. $\mathbf{N = 8712 = 2^3 3^2 11^2}$ $+$
0 0 0 -99 242 *10 3 3* *4 2 2* `1 + +` 2 *0 1* $-2^{15}\ 3$

7. $\mathbf{N = 900 = 2^2 3^2 5^2}$ $+$
0 0 0 -15 -50 *8 3 3* *2 2 2* `+ + -` 2 *1 0* $\frac{2^{11}\ 3}{5}$

8. $\mathbf{N = 2312 = 2^3 17^2}$ $+$
0 1 0 -28 12 *8 3* *4 2* `1 -` 2 *0 1* -2^{14}

9. $\mathbf{N = 1568 = 2^5 7^2}$ $-$
0 1 0 -2 -8 *6 3* *6 2* `1 +` 2 *1 0* $2^{12}\ 3$

10.a *196C* $\mathbf{N = 196 = 2^2 7^2}$ $+$
0 1 0 -114 -127 *4 8* *2 2* `+ -` 3 *1 0* $2^3\ 3^2$

10.b *196C tordu par* $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$ $\mathbf{N = 784 = 2^4 7^2}$ $+$
0 1 0 -2 -1 *4 2* *2 2* `+ -` 3 *1 0* $2^4\ 3^2$

11. $\mathbf{N = 2704 = 2^4 13^2}$ $-$
0 1 0 -4 -12 *8 2* *2 2* `+ -` 3 *1 0* $2^7\ 3^2$

12. $\mathbf{N = 2700 = 2^2 3^3 5^2}$ $+$
0 0 0 -15 10 *8 3 2* *2 4 2* `+ 1 +` 3 *1 0* $2^9\ 3^4$

13. $\mathbf{N = 1296 = 2^4 3^4}$ $+$
0 0 0 -9 9 *4 6* *2 4* `+ -` 3 *1 0* $2^4\ 3^3$

14. $\mathbf{N = 1296 = 2^4 3^4}$ $+$
0 0 0 9 -18 *8 6* *2 4* + - 3 *1 0* $2^5\ 3^3$

15. $\mathbf{N = 1369 = 37^2}$ $+$
0 1 1 -12 -17 *3* *2* - 5 *0 1* $-\frac{2^8\ 3\ 5^3}{17}$

16. $\mathbf{N = 43264 = 2^8 13^2}$ $-$
0 -1 0 9 -53 *9 3* *6 2* 1 - 5 *1 0* $2^7\ 3^2\ 5^3$

17. $\mathbf{N = 4225 = 5^2 13^2}$ $+$
0 1 1 -108 394 *4 3* *2 2* + - 5 *1 0* $2^8\ 5^3$

18. $\mathbf{N = 6400 = 2^8 5^2}$ $-$
0 1 0 17 13 *9 4* *6 2* 1 + 5 *1 0* $2^6\ 3\ 5^3$

19. $\mathbf{N = 3969 = 3^4 7^2}$ $+$
1 -1 0 -9 -8 *4 2* *4 2* - - 7 *0 1* $2^7\ 3\ 7^2$

20. $\mathbf{N = 1369 = 37^2}$ $-$
1 -1 1 2 -2 *2* *2* - 7 *1 0* $2^7\ 7^2$

21. *121I* $\mathbf{N = 121 = 11^2}$ $-$
1 1 1 -305 7888 *10* *2* + 11 *1 9* $2^6\ 11$

22. $\mathbf{N = 20736 = 2^8 3^4}$ $-$
0 0 0 6 8 *9 4* *6 4* 1 - 13 *1 0* $2^6\ 3^2\ 13^2$

23. $\mathbf{N = 9025 = 5^2 19^2}$ $+$
0 0 1 -95 356 *3 2* *2 2* - - 13 *1 0* $2^8\ 13^2$

24. $\mathbf{N = 1225 = 5^2 7^2}$ $-$
1 1 1 -8 6 *3 2* *2 2* - - 37 *1 0* $\frac{2^7\ 37^2}{3\ 7}$

3.4 Des courbes qui admettent un régulateur non-nul

Considérons des couples (E, T), où E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ sans multiplication complexe, et $T \in E(\overline{\mathbf{Q}}_{tors})$ d'ordre $d \geq 2$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, on ait $\sigma(T) = \pm T$. On écrira P le sous-groupe engendré par T et L la plus petite extension de $\mathbf{Q}$ telle que $P \subset E(L)$. Donc $[L : \mathbf{Q}] \leq 2$. L'ensemble de tous les couples (E, T) est stable par $\mathbf{Q}$-isogénie et aussi par torsion quadratique. D'après 2.3.0, on dispose d'une application $\xi : L[P]^{\circ,\pm} \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{M}}(Sym^2 E, \mathbf{Q}(3))$. Rappelons de 3.1.3 la notation $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pour le régulateur de deux diviseurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L[P]^{\circ,\pm}$.

3.4.1 Théorème. *À $\mathbf{Q}$-isogénie et à torsion quadratique près, il n'y a qu'un nombre fini de couples (E, T) comme ci-dessus tels qu'il existe de diviseurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L[P]^{\circ,\pm}$ avec $\partial(\xi(\mathbf{a})) = \partial(\xi(\mathbf{b})) = 0$ et tels que $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ soit non-nul.*

Démonstration. Le cas où E a partout bonne réduction potentielle ayant été traité en 3.2, nous supposons que l'ensemble fini S des nombres premiers p tel que E ait mauvaise réduction potentiellement multiplicative en p, est *non-vide*. (Par exemple, si le conducteur N de la courbe est sans facteur carré, toute mauvaise réduction est multiplicative.) Quitte à remplacer (E, T) par une tordue quadratique, on suppose que $L = \mathbf{Q}$, *i.e.*, $T \in E(\mathbf{Q})$. Pour F un corps de nombres soit $\mathcal{S} = \{v \mid v \text{ place de } F,\ v|p,\ \text{pour un } p \in S\}$. Choisissons F tel que $E_d \subset E(F)$ et tel que E/F_v soit une courbe de Tate pour tout $v \in \mathcal{S}$. Alors la fibre spéciale $\mathcal{E}_F(v)$ est de type I_ν pour un ν avec $d|\nu$. Pour tout $v \in \mathcal{S}$, nous fixons une numérotation cyclique du polygone I_d inscrit dans $\mathcal{E}_F(v)$, en donnant, bien sûr, le numéro 0 à la composante neutre. Pour calculer l'obstruction imposée par ∂_v à un diviseur $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[P]^\circ$ il suffira, d'après 2.5.1, de connaître le numéro i_v de la composante de I_d sur laquelle T s'envoie par réduction modulo v. Quitte à renuméroter nos polygones de Néron, nous supposons toujours que $0 \leq i_v \leq [\frac{d}{2}]$. (De même, comme $B_4(\frac{d-m}{d}) = B_4(\frac{m}{d})$ et que les séries K_0 et K_2 sont paires, il suffit de travailler avec des diviseurs dans $\mathbf{Q}[P]^\circ$de la forme $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^{[d/2]} a_k(k.T)$.) Avec ces notations, on a le

3.4.2 Lemme. *Pour qu'il existe des diviseurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[P]^\circ$ avec $\partial(\xi(\mathbf{a})) = \partial(\xi(\mathbf{b})) = 0$ et tels que $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ soit non-nul, il faut qu'il existe j_1, j_2, $0 \leq j_1 < j_2 \leq [\frac{d}{2}]$ tels que, pour tout $v \in \mathcal{S}$, $j_1 \neq i_v \neq j_2$.*

Démonstration du lemme. Le représentant entre 0 et 1 d'un nombre réel modulo $\mathbf{Z}$ est noté par $\langle . \rangle$. Vu le lemme 2.5.1, il s'agit de montrer que

$$\mathcal{D} \overset{\text{déf}}{=} \text{dét}\big(B_4(\langle \frac{k.i}{d} \rangle)\big)_{0 \leq k, i \leq [\frac{d}{2}]} \neq 0.$$

D'après [Mazur 1978], on a $d \leq 12$ et $d \neq 11$. On démontre donc le lemme en calculant le déterminant pour ces 10 valeurs de d .... — Toutefois, donnons aussi une preuve théorique, mais seulement dans le cas où d est un nombre premier impair :

Dans ce cas le déterminant $\mathcal{D}' \stackrel{\text{déf}}{=} \text{dét}\big(B_4(\langle\frac{k.i}{d}\rangle)\big)_{1\leq k,i\leq \frac{d-1}{2}}$ est un déterminant du groupe $\mathcal{G} = (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ et est donc — d'après la formule de Dedekind [Lang 1978, chap. 3, §6] — au signe près égal au produit suivant sur les caractères pairs modulo p :

$$\mathcal{D}' = \pm \prod_{\chi} \sum_{\mathcal{G}} \chi(k) B_4(\langle\frac{k}{d}\rangle) = \pm \prod_{\chi} B_{4,\chi} = \mp \prod_{\chi} L(-3,\chi) = \mp\zeta_{\mathbf{Q}(\mu_p)^+}(-3)$$

— un nombre non nul; *cf.* [Washington 1982, Thm. 4.2].
Or, on a $\mathcal{D} = -\frac{1}{30}\mathcal{D}^*$, où $\mathcal{D}^* = \text{dét}\big(B_4^*(\langle\frac{k.i}{d}\rangle)\big)_{1\leq k,i\leq \frac{d-1}{2}}$, avec $B_4^*(X) = B_4(X) + \frac{1}{30} = X^4 - 2X^3 + X^2$. Par la formule de Dedekind et les relations d'orthogonalité on a

$$\mathcal{D}^* = \prod_{\chi\neq\mathbf{1}} \sum_{\mathcal{G}} \chi(k) B_4(\langle\frac{k}{d}\rangle)\ .\ \sum_{\mathcal{G}} B_4^*(\langle\frac{k}{d}\rangle)$$

Les termes de la dernière somme sont positifs et les autres facteurs sont non-nuls parce que $\mathcal{D}' \neq 0$. Donc $\mathcal{D} \neq 0$, si d est premier.

q.e.d.

Exploitons le lemme du point de vue modulaire : Le couple (E, T) décrit un point rationnel de la courbe $X_1(d)$ et i_v apporte des renseignements sur les pointes de $X_1(d)$ qui, modulo v, se confondent avec le point (E, T). Plus précisément, dans l'interprétation modulaire des points de $X_1(d)$, une pointe correspond à un polygone de Néron I_ν, $\nu|d$, avec, sur sa composante numéro 1 (à isomorphisme près on peut normaliser n'importe quel générateur du groupe des composantes pour être sur la première composante), un point ζ^n, *i.e.*, une certaine puissance du générateur fixé ζ de $\mu_d \subset \mathbf{G}_m$. La pointe que nous venons de décrire est souvent notée $[\frac{n}{m}]$, où $m = \frac{d}{\nu}$. Comme plus haut nous inscrivons tous ces polygones I_ν dans I_d. Alors on voit que, en chaque place $v \in \mathcal{S}$, le point $(E, T) \in X_1(d)(F)$ est congru modulo v à une pointe de la forme $[\frac{n}{d/i_v}]$. Notons aussi que, en dehors des places de $\mathcal{S}$, le point (E, T) ne peut être congru à une pointe. Le lemme 3.4.2 se traduit donc comme ceci.

3.4.3 Lemme. *Pour qu'il existe des diviseurs* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[P]^\circ$ *avec* $\partial(\xi(\mathbf{a})) = \partial(\xi(\mathbf{b})) = 0$ *et tels que* $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *soit non-nul, il faut qu'il existe deux pointes*

$[\frac{n_1}{m_1}], [\frac{n_2}{m_2}]$ *de* $X_1(d)$ *avec* $0 \leq \frac{d}{m_1} < \frac{d}{m_2} \leq [\frac{d}{2}]$ *et telles que, sur* Spec $\mathbf{Z}$*, la section du point* (E, T) *de* $X_1(d)$ *ne rencontre nulle part celles de* $[\frac{n_1}{m_1}]$, $[\frac{n_2}{m_2}]$.

Ce lemme nous ramène à vérifier l'énoncé de finitude suivant.

3.4.4 Proposition. *Soit* $\mathcal{C}$ *une courbe affine de la forme*

$$X_1(d) - \{[\frac{n_1}{m_1}],\ [\frac{n_2}{m_2}]\},$$

les notations étant comme plus haut. Alors $\mathcal{C}$ *n'a qu'un nombre fini de points entiers.*

Cette proposition est en fait un cas particulier du théorème de Siegel sur les points entiers, à savoir:

3.4.5 Théorème. [Siegel 1929, *Zweiter Teil*, en particulier §1] *Soit une courbe projective irréductible* $\overline{\mathcal{C}}$ *sur* $\mathbf{Q}$ *et soit* $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} - \{P_1, P_2\}$ *une courbe affine avec deux "points à l'infini". Alors* $\mathcal{C}$ *ne possède une infinité de points entiers que si* $\overline{\mathcal{C}}$ *est de genre* 0 *et* P_1, P_2 *sont quadratiques conjugués.*

Appliquons ceci à la situation de 3.4.4 : D'après [Ogg 1973], une pointe $[\frac{n}{m}]$ de $X_1(d)$ ne peut être quadratique sur $\mathbf{Q}$ que si $m = \frac{d}{2} \in \mathbf{Z}$. Or, dans ce cas, sa conjuguée est aussi de la forme $[\frac{n'}{m}]$. Donc 3.4.5 implique 3.4.4, et nous avons démontré le théorème 3.4.1.

q.e.d.

3.4.6 *Remarques.*

(i) Notons explicitement que nous n'avons pas vraiment utilisé dans la démonstration la liberté offerte par le carré symétrique de passer d'une courbe E à une tordue quadratique, disons E'. En fait, E et E' ne peuvent pas en même temps définir un point rationnel de $X_1(d)$. Autrement dit nous avons démontré l'énoncé suivant:

À $\mathbf{Q}$*-isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de courbes elliptiques* E *sur* $\mathbf{Q}$ *d'invariant* j *non-entier, munies d'un point rationnel* T *d'ordre fini, telles qu'il existe des diviseurs* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[\langle T \rangle]^\circ$ *avec* $\partial(\xi(\mathbf{a})) = \partial(\xi(\mathbf{b})) = 0$ *et tels que* $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *soit non-nul.*

(ii) Nous n'avons pas insisté sur l'analyse des régulateurs R non-nuls dans les cas où les points rationnels de la courbe elliptique E forment un groupe du type $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\nu\mathbf{Z}$, $1 \leq \nu \leq 4$ au lieu d'un groupe cyclique P .... *Cf.* toutefois l'exemple de la courbe 24B.

3.5 Exemples numériques

Nous présentons ici une petite liste d'exemples de courbes admettant un régulateur non-nul. L'intérêt est de voir explicitement les obstructions d'intégralité et des "relations exotiques" analogues à celles décrites en 1.5.3.b, provenant de conditions d'intégralité trivialement satisfaites par les diviseurs utilisés .

Les huit premiers exemples qui suivent sont — à isogénie près — toutes les courbes de conducteur inférieur à 30 qui admettent un régulateur $R(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq 0$ de diviseurs satisfaisant $\partial(\xi(\mathbf{a})) = \partial(\xi(\mathbf{b})) = 0$.

La courbe 11A

Les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 sont respectivement $0, -1, 1, 0, 0$. C'est une courbe semi-stable de conducteur 11, donc le conducteur du carré symétrique vaut $C = 121$. Son groupe de Mordell-Weil sur $\mathbf{Q}$ est engendré par un *point P d'ordre 5*. Le discriminant vaut $\Delta = -11$. Donc, dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$, P (choisi convenablement) est donné par $\frac{1}{5}$. La fibre spéciale de $\mathcal{E}$ en $p = 11$ est de type I_1. Donc les diviseurs composés de points rationnels ne rencontrent pas d'obstruction d'intégralité. Une $\mathbf{Q}$-base de l'espace des $[K_2(0,\mathbf{a},3), K_0(0,\mathbf{a},2)]$ avec $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$ est donnée par les diviseurs $\mathbf{a}_1 = (0) - (P)$; $\mathbf{a}_2 = (0) - (2.P)$ — se rappeller que K_2 et K_0 sont des fonctions paires; donc $(3.P), (4.P)$ donnent les mêmes valeurs que $(2.P), (P)$.
Alors on trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2}L(Sym^2E,3)}{R(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)} \approx -500 = -2^2\ 5^3$$

Ici le fait qu'il n'y a pas d'obstruction à l'intégralité suffit pour assurer l'existence d'un régulateur non-trivial; mais ne se traduit pas par une "relation exotique".

La courbe 14A

Les coefficients sont $1, 0, 1, -1, 0$. C'est une courbe semi-stable de conducteur 14, donc le conducteur du carré symétrique vaut $C = 14^2$. Son groupe de Mordell-Weil sur $\mathbf{Q}$ est engendré par *un point P d'ordre 6*. Dans les coordonnées du modèle de Weierstrass, prenons $P = (1, 0)$. Comme le discriminant $\Delta = -28$ est négatif, l'image de P (convenablement choisi) dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ est donnée par $\frac{1}{6}$. La fibre spéciale de $\mathcal{E}$ en $p = 2$ est de type I_2 où P s'envoie sur la composante non-triviale. En $p = 7$, on trouve le type I_1, de sorte qu'ici, il n'y a pas d'obstruction d'intégralité pour les diviseurs composés de points rationnels. Une $\mathbf{Q}$-base de l'espace

des $[K_2(0,\mathbf{a},3), K_0(0,\mathbf{a},2)]$ avec $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$ tel que $\partial(\xi(\mathbf{a})) = 0$ est donnée par les diviseurs $\mathbf{a}_1 = (P) - (3.P)$, $\mathbf{a}_2 = (0) - (2.P)$.
On trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx -648 = -2^3\ 3^4$$

Ici encore, les conditions d'intégralité permettent simplement d'obtenir un régulateur non-trivial.

La courbe 15A
Les coefficients sont $1, 1, 1, 0, 0$. C'est une courbe semi-stable de conducteur 15, donc le conducteur du carré symétrique vaut $C = 15^2$. Son groupe de Mordell-Weil sur $\mathbf{Q}$ est engendré par *un point P d'ordre 4*. Comme le discriminant $\Delta = -15$ est négatif, l'image de P (convenablement choisi) dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ est donnée par $\frac{1}{4}$. En $p = 3$ aussi bien qu'en $p = 5$, on trouve le type I_1 comme fibre spéciale de $\mathcal{E}$, de sorte qu'il n'y a pas d'obstruction d'intégralité du tout pour les diviseurs composés de points rationnels. Une $\mathbf{Q}$-base de l'espace des $[K_2(0,\mathbf{a},3), K_0(0,\mathbf{a},2)]$ avec $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$ est donnée par les diviseurs $\mathbf{a}_1 = (0) - (P)$; $\mathbf{a}_2 = (0) - (2.P)$.
On trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx -1024 = -2^{10}$$

P étant d'ordre 4, les conditions triviales d'intégralité laissent juste de la place pour un régulateur non-trivial.

La courbe 17A
Les coefficients sont $1, -1, 1, -1, 0$. C'est une courbe semi-stable de conducteur 17, donc le conducteur du carré symétrique vaut $C = 17^2$. Son groupe de Mordell-Weil sur $\mathbf{Q}$ est engendré par *un point P d'ordre 4*. Le discriminant $\Delta = +15$ est positif, et on vérifie que $\frac{1}{4} + \frac{\tau}{2}$ dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ correspond à un point rationnel P. En $p = 17$, la fibre spéciale de $\mathcal{E}$ est de type I_1. Donc on n'a pas d'obstruction d'intégralité pour les diviseurs à support dans les points rationnels. Une $\mathbf{Q}$-base de l'espace des $[K_2(0,\mathbf{a},3), K_0(0,\mathbf{a},2)]$ avec $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$ est, comme dans l'exemple précédent, donnée par les diviseurs $\mathbf{a}_1 = (0) - (P)$; $\mathbf{a}_2 = (0) - (2.P)$.
Et comme dans le calcul précédent, on trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx -1024 = -2^{10}$$

Ici encore, la condition triviale d'intégralité permet simplement d'obtenir un régulateur non-trivial.

La courbe 20A

Les coefficients sont $0, 1, 0, -1, 0$. En $p = 2$, la courbe a bonne réduction potentielle, tandis que la réduction est semi-stable en $p = 5$, avec fibre spéciale de type I_1. Le conducteur est 20; le discriminant $\Delta = +80$; le conducteur du carré symétrique vaut $C = 2^2.5^2 = 100$. Le facteur eulérien en $p = 2$ de $L(Sym^2E, s)$ est $(1+p^{1-s})^{-1}$. Le groupe de Mordell-Weil sur $\mathbf{Q}$ est engendré par *un point P d'ordre 6*. On vérifie que $\frac{1}{6} + \frac{\tau}{2}$ dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ correspond à un point rationnel P. Comme le I_1 en $p = 5$ n'impose pas d'obstruction d'intégralité pour les diviseurs à support dans $E(\mathbf{Q})$, on se retrouve, pour la première fois dans cette liste d'exemples, avec plus de deux diviseurs de degré zéro linéairement indépendants satisfaisant aux conditions d'intégralité. Autrement dit, on devrait trouver une “relation exotique” entre leurs régulateurs. Soient $\mathbf{a}_1 = (0) - (P)$; $\mathbf{a}_2 = (0) - (2.P)$; $\mathbf{a}_3 = (0) - (3.P)$.
Alors on trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2}L(Sym^2E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx 216 = 2^3.3^3 \quad \frac{C^{3/2}L(Sym^2E, 3)}{R(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2)} \approx 432 = 2^4.3^3$$

Ceci suggère — noter que les déterminants se retrouvent au dénominateur dans notre façon d'afficher les résultats — que $\xi(2\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) \in \xi(\mathbf{a}_2).\mathbf{Q}$. En fait, on vérifie aussitôt numériquement la “relation exotique” suivante entre vecteurs de séries de Kronecker.

$$[K_2(0, 2\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1, 3), K_0(0, 2\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1, 2)] \approx \frac{29}{16}\, [K_2(0, \mathbf{a}_2, 3), K_0(0, \mathbf{a}_2, 2)]$$

Donc on trouve par exemple :

$$\frac{C^{3/2}L(Sym^2E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)} \approx \frac{2^8.3^3}{29}.$$

La courbe 21C

Les coefficients sont $1, 0, 0, -39, 90$. C'est une courbe semi-stable de conducteur 21, donc le conducteur du carré symétrique vaut $C = 21^2$. Les points rationnels sont engendrés par *un point P d'ordre 8* rationnel sur $\mathbf{Q}$. L'image de P dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ est donnée par $\frac{1}{8} + \frac{\tau}{2}$. La fibre spéciale de $\mathcal{E}$ en $p = 3$ est de type I_8 où P s'envoie sur la composante numéro 3, pour un sens de numérotation convenablement choisi. En $p = 7$, on trouve le type

I_1, de sorte qu'il n'y a pas d'obstruction d'intégralité pour les diviseurs composés de points rationnels.

Posons $\mathbf{b}_i = (0) - (i.P)$ et $\eta_i = [K_2(0, \mathbf{b}_i, 3), K_0(0, \mathbf{b}_i, 2)]$. Commençons cette fois-ci par la "relation exotique" :

$$7\eta_1 - 78\eta_2 + 9\eta_3 + 36\eta_4 \approx 0.$$

Convenons de l'utiliser afin d'éliminer η_3 de la discussion qui suit. Quant à l'obstruction d'intégralité (en $p = 7$), on a $-\partial(\xi(\mathbf{b}_i)) = -\partial_7(\xi(\mathbf{b}_i)) = B_4(\langle \frac{3i}{8} \rangle) + \frac{1}{30} = (\langle \frac{3i}{8} \rangle)^2 (\langle \frac{3i}{8} \rangle - 1)^2$. Toutes les solutions de $\partial(\xi(\mathbf{a})) = 0$ sont engendrées — modulo la "relation exotique" ci-dessus, et modulo le noyau conjecturalement trivial de $\xi(\mathbf{a}) \mapsto [K_2(0, \mathbf{a}, 3), K_0(0, \mathbf{a}, 2)]$ — par

$$\mathbf{a}_1 = 225\mathbf{b}_4 - 256\mathbf{b}_1; \quad \mathbf{a}_2 = 144\mathbf{b}_4 - 256\mathbf{b}_2.$$

On trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx -\frac{2}{3^2}$$

C'est la combinaison linéaire des $\mathbf{b}_i$ qui donne le résultat le plus simple. Les autres s'en déduisent par la relation exotique. Par exemple, on trouve des résultats comme :

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(25\mathbf{b}_2 - 16\mathbf{b}_1, 49\mathbf{b}_4 - 256\mathbf{b}_3)} \approx -\frac{2^9}{29\ .\ 37}$$

La courbe 24B

Les coefficients sont $0, -1, 0, -4, 4$. En $p = 2$, la courbe a bonne réduction potentielle, tandis que la réduction est semi-stable en $p = 3$, avec fibre spéciale de type I_2. Le conducteur est 24; le discriminant $\Delta = +2^8.3^2$; le conducteur du carré symétrique vaut $C = 2^4.3^2 = 144$. Le facteur eulérien en $p = 2$ de $L(Sym^2 E, s)$ est 1. Le groupe de Mordell-Weil sur $\mathbf{Q}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Soit $P = (0, 2)$ *un point rationnel d'ordre 4*. Dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$, P correspond à $\frac{1}{4} + \frac{\tau}{2}$. P se réduit sur la composante neutre en $p = 3$. (L'autre facteur du groupe des points rationnels passe par tous les côtés du 2-gone de Néron en $p = 3$.) Donc il n'y a pas d'obstruction d'intégralité pour les diviseurs composés de multiples de P. Posons $\mathbf{a}_1 = (0) - (P)$; $\mathbf{a}_2 = (0) - (2.P)$.
On trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx \frac{2^{12}}{3^2}$$

La courbe 26D

Les coefficients sont $1, -1, 1, -3, 3$. La courbe est semi-stable de conducteur 26, donc le conducteur du carré symétrique vaut 26^2. Les points rationnels sont engendrés par *un point P d'ordre 7*. Comme le discriminant $\Delta = -2^7.13$ est négatif, l'image de P (convenablement choisi) dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ est donnée par $\frac{1}{7}$. La fibre spéciale de $\mathcal{E}$ en $p = 2$ est de type I_7 où il s'avère que P s'envoie sur la composante numéro 2, pour un sens de numérotation convenablement choisi. En $p = 13$, on trouve le type I_1 de sorte que là, il n'y a pas d'obstruction d'intégralité pour les diviseurs composés de points rationnels. Une $\mathbf{Q}$-base de l'espace des $[K_2(0, \mathbf{a}, 3), K_0(0, \mathbf{a}, 2)]$ avec $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$ tel que $\partial(\xi(\mathbf{a})) = 0$ est donnée par

$$\mathbf{a}_1 = 4(0) - 4(P) - 9(2.P) + 9(3.P); \quad \mathbf{a}_2 = -3(0) - (P) + 4(2.P).$$

On trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx -196 = -2^2.7^2$$

La courbe 66I

Les coefficients sont $1, 0, 0, -45, 81$. C'est une courbe semi-stable de conducteur 66, donc le conducteur du carré symétrique vaut 66^2. Les points rationnels sont engendrés par *un point P d'ordre 10 rationnel* sur $\mathbf{Q}$. Dans les coordonnées du modèle de Weierstrass, $P = (-6, 15)$; l'image de P dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ est donnée par $\frac{1}{10} + \frac{\tau}{2}$. La fibre spéciale de $\mathcal{E}$ en $p = 2$ est de type I_{10} où P s'envoie sur la composante numéro 3, pour un sens de numérotation convenablement choisi. En $p = 3$, on trouve le type I_5 avec la réduction de P sur la première composante. En $p = 11$, on trouve une fibre spéciale du type I_1, de sorte qu'il n'y a pas d'obstruction d'intégralité pour les diviseurs composés de points rationnels. Une $\mathbf{Q}$-base de l'espace des $[K_2(0, \mathbf{a}, 3), K_0(0, \mathbf{a}, 2)]$ avec $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$ tel que $\partial(\xi(\mathbf{a})) = 0$ est donnée par les diviseurs $\mathbf{a}_i = \sum_{j=0}^{5} a_{ij}(i.P)$; $\quad i = 1, 2, 3$, où: $\mathbf{a}_1 = (a_{1j}) = (-1, 10, -5, 5, -10, 1)$; $\mathbf{a}_2 = (a_{2j}) = (10, -1, 13, -13, 1, -10)$; $\mathbf{a}_3 = (a_{3j}) = (-5, 0, -4, 0, 9, 0)$.
On trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)} \approx -800 = -2^5.5^2 \qquad \frac{C^{3/2} L(Sym^2 E, 3)}{R(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \approx 800 = 2^5.5^2$$

On constate donc numériquement, comme il convient, l'existence d'une dépendance linéaire "exotique" entre les régulateurs de $\xi(\mathbf{a}_3)$ et de $\xi(\mathbf{a}_1 +$

$\mathbf{a}_2$). En fait, on vérifie numériquement pour $\eta_i = [K_2(0, \mathbf{a}_i, 3), K_0(0, \mathbf{a}_i, 2)]$ que

$$2\eta_1 + 2\eta_2 + 5\eta_3 \approx 0.$$

Cette relation devrait déjà exister dans l'image de ξ ....

La courbe 90G

Les coefficients sont $1, -1, 1, -122, 1721$. C'est une courbe semi-stable de conducteur 90, donc le conducteur du carré symétrique vaut 90^2. Les points rationnels sont engendrés par *un point P d'ordre 12*. Comme le discriminant $\Delta = -2^{12}.3^7.5^3$ est négatif, l'image de P (convenablement choisi) dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ est donnée par $\frac{1}{12}$. La fibre spéciale de $\mathcal{E}$ en $p = 2$ est de type I_{12} où P s'envoie sur la composante numéro 5, pour un sens de numérotation convenablement choisi. En $p = 3$, on trouve le type I_1^*. Le groupe des composantes connexes de $\mathcal{E}_3$ est cyclique d'ordre 4 et P s'envoie dans une composante d'ordre 4. Mais après extension des scalaires à l'extension ramifiée $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, la courbe acquiert une fibre spéciale de type I_2 en l'unique place au-dessus de 3. En fait, elle est isomorphe sur ce corps à la courbe 30C, dont le I_1 sur $\mathbf{Q}$ se déploie en un I_2 sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. P s'envoie dans la composante non-triviale de I_2. Finalement, en $p = 5$, on trouve une fibre spéciale du type I_3, où P s'envoie sur une composante non-triviale, disons le numéro 1. Nous avons donc trois conditions d'intégralité et une par le degré des diviseurs, imposées aux 7 multiples $(i.P)$, $i = 0, ..., 6$. On s'attend donc à trouver une "relation exotique" entre les régulateurs de 3 éléments $\xi(\mathbf{a})$ tels que $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$, $\partial(\xi(\mathbf{a})) = 0$. Voici de tels $\mathbf{a}$: $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2, 1, -1, -3, -2)$; $\mathbf{a}_2 = (8, 10, -7, -15, -8, 5, 7)$; $\mathbf{a}_3 = (0, -2, -3, 1, 4, 1, -1)$.
On trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2}L(Sym^2E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx -2^8.3^2 \qquad \frac{C^{3/2}L(Sym^2E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)} \approx 2^8.3^2.13.$$

Ceci suggère déjà que $\xi(\mathbf{a}_2 + 13\mathbf{a}_3) \in \xi(\mathbf{a}_1).\mathbf{Q}$. En fait, on trouve numériquement la "relation exotique" entre les $\eta_i = [K_2(0, \mathbf{a}_i, 3), K_0(0, \mathbf{a}_i, 2)]$:

$$6\eta_1 + \eta_2 + 13\eta_3 \approx 0.$$

Une courbe de conducteur 2730

Soit finalement E la courbe elliptique donnée par l'équation $y^2 + 43xy - 210y = x^3 - 210x^2$, de conducteur $N = 2.3.5.7.13 = 2730$ et discriminant $\Delta = +2^{12}.3^6.5^3.7^4.13$. Elle possède *un point rationnel $P = (0, 210)$*

d'ordre 12, qui, dans $\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$ est donné par $\frac{1}{12}+\frac{\tau}{2}$. E est semi-stable; donc $C = N^2$. Les fibres spéciales de $\mathcal{E}$ aux mauvaises places sont respectivement: de type I_{12} en $p = 2$; de type I_6 en $p = 3$; de type I_3 en $p = 5$; de type I_4 en $p = 7$; de type I_1 en $p = 13$. Pour tout p, notre point P s'envoie sur un générateur du groupe des composantes de I_ν. En dehors de $p = 2, 13$, on peut le normaliser comme étant le côté numéro 1. En $p = 2$, P s'envoie sur le cinquième côté du I_{12}. Ces quatre contraintes d'intégralité nous permettent donc seulement de trouver deux diviseur intégraux dont le régulateur est non-nul: $\mathbf{a}_1 = (20, -42, 39, -26, 15, -12, 6)$; $\mathbf{a}_2 = (-3, -2, 16, -26, 38, -52, 29)$.
Alors on trouve numériquement que

$$\frac{C^{3/2}L(Sym^2E, 3)}{R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \approx -2^{14}.3^4$$

Bibliographie

A. Beilinson (1985), Higher regulators and values of L-functions, *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2036–2070.

A. Beilinson (1986), Higher regulators of modular curves; *in: Contemporary Mathematics* **55** (1986), Part I, 1–34

S. Bloch (1980), Lectures on algebraic cycles; *Duke Univ. Math. Series* **IV** 1980

S. Bloch, D. Grayson (1986), K_2 and the L-functions of elliptic curves. Computer calculations; *in: Contemporary Mathematics* **55** (1986), Part I, 79–88

S. Bloch, K. Kato (1989), $L-$functions and Tamagawa numbers of motives, *preprint*

J. Coates, C.-G. Schmidt (1987), Iwasawa theory for the symmetric square of an elliptic curve; *J. reine angewandte Math.* **375/376** (1987), 104–156

P. Deligne (1979), Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales; *in: Proc. Symp. Pure Math.* **33** (1979), 313–346

P. Deligne (1985), lettre à C. Soulé, 20/1/1985.

C. Deninger (1988), Higher regulators of elliptic curves with complex multiplication; *in: Sém. Théorie de Nombres Paris* 1986/87, C. Goldstein (ed.), Birkhäuser 1988

C. Deninger (1989), Higher regulators and Hecke L-series of imaginary quadratic fields I, *Inventiones Math.* **96** (1989), 1–69; II, *à paraître*

C. Deninger, K. Wingberg (1988), On the Beilinson conjectures for elliptic curves with complex multiplication; *in:* Rapoport, Schappacher, Schneider (ed.s), Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, *Perspectives in Math.* **4**, Acad. Press 1988, 249–272

E. Friedman (1988), Hecke's integral formula, *preprint Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn*, 1988

U. Jannsen (1990), Mixed motives and algebraic K-theory; *Lect. Notes Mathematics (Springer)* **1400**

D. Kubert (1977), Universal bounds on the torsion of elliptic curves, *Proc. London Math. Soc.* **33** (1977), 193–237

S. Lang (1978), Cyclotomic fields; *GTM* **59**, Springer 1978

B. Mazur (1978), Rational Isogenies of prime degree, *Inventiones Math.* **44** (1978), 129–162

Modular Functions of One Variable, IV, Antwerp Proceedings 1972; *Lect. Notes Mathematics (Springer)* **476**, 1975

A.P. Ogg (1973), Rational points on certain elliptic modular curves, Proc. Symp. Pure Math. **24**, AMS 1973, 221–231

D. Ramakrishnan (1989), Regulators, Algebraic Cycles, and Values of L-functions, *Contemporary Mathematics* **83**, 183–310

D. Ramakrishnan (1990), Problems arising from the Tate and Beilinson conjectures in the context of Shimura varieties; *in :* Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, part II, (Clozel, Milne, ed.s), *Perspectives in Math.* **11**, Acad. Press 1990, 227–252

D.E. Rohrlich (1987), Elliptic curves and values of L- functions; *in: Can. Math. Soc. Conf. Proc.* **7** (1987), 371–387

N. Schappacher (1988), Periods of Hecke Characters, *Lecture Notes in Mathematics (Springer)* **1301**

N. Schappacher, A.J. Scholl (1988), Beilinson's Theorem on Modular Curves; *in:* Rapoport, Schappacher, Schneider (ed.s), Beilinson's Conjectures on Special Values of L- Functions, *Perspectives in Math.* **4**, Acad. Press 1988, 273–304

N. Schappacher, A.J. Scholl (19**), On the Tame symbol in Symmetric Powers, *en préparation.*

A.J. Scholl (1990), Motives for modular forms; *Inventiones Math., en presse*

P. Schneider (1988), Introduction to the Beilinson conjectures; *in:* Rapoport, Schappacher, Schneider (ed.s), Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, *Perspectives in Math.* **4**, Acad. Press 1988, 1–35

J.-P. Serre (1972), Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Inventiones Math.* **15** (1972), 259–331; *Œuvres*, III: no. 94

C.L. Siegel (1929), Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen; *Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse 1929, Nr. 1* = Gesammelte Abhandlungen **I**, 209–266.

L. Washington (1982), Introduction to cyclotomic fields; *GTM* **83**, Springer 1982

A. Weil (1976), Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker; *Ergebnisse* **88**, Springer 1976.