Lisa Hefendehl-Hebeker,
Stephan Hußmann (Hg.)

# Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie

## Festschrift für Norbert Knoche

Verlag Franzbecker

**Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek**
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <**http://dnb.ddb.de**> abrufbar.

**Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek**
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the Internet at <**http://dnb.ddb.de**>.

Lisa Hefendehl-Hebeker , Stephan Hußmann (Hg.)
**Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie**
**Festschrift für Norbert Knoche**
**ISBN 3-88120-364-8**

# Welche Rolle spielt ein Klassiker in der Mathematik? Das Beispiel von C.F. Gauß' Disquisitiones Arithmeticae[1]

**Norbert Schappacher (Darmstadt)**

Es gibt einige wenige Werke der mathematischen Weltliteratur, die von jedem Kenner auch dann ohne Zögern und rückhaltlos als **Klassiker** bezeichnet werden, wenn er den höchsten Maßstab anlegt und als klassisch nur das anerkennt, was G.W.F. Hegel so formuliert hat: *die zu freier Totalität in sich abgeschlossene Einigung des Inhalts und der ihm schlechthin angemessenen Gestalt.* Zu diesen unstrittigen Klassikern der Mathematikgeschichte gehören die dreizehn Bücher von Euklids (ca. 300 v.Chr.??) *Elementen der Geometrie* ebenso wie die *Disquisitiones Arithmeticae* des jungen Carl Friedrich Gauß (1777-1855). Aber so selbstverständlich diese beiden Werke Klassiker sind, so verschieden sind sie auch, und so anders ist die historische Rolle, die diese Texte gespielt haben.

## 1. Vergleich der Verfasser

Über Euklid selbst wissen wir so wenig, dass man nicht einmal sicher sein kann, dass es sich überhaupt um eine historische Person handelt, geschweige denn wann und wo er gelebt und ob er auch Verfasser der dreizehn Bücher war, die unter Euklids Namen auf uns gekommen sind.

Gauß' Leben und Schaffen ist uns dagegen sehr detailliert überliefert. Insbesondere steht, ungeachtet aller Unsicherheiten der Mutter, den Geburtstag ihres einzigen Kindes als Datum im gregorianischen Kalender festzumachen - sie wusste lediglich, dass sie den Jungen am Mittwoch der Woche vor Himmelfahrt zur Welt gebracht hatte -, die Kirchenbucheintragung über die Geburt von Carl Friedrich Gauß am 30. April 1777, also heute vor ziemlich genau $226 = 2 \cdot 113$ Jahren, in den beengten Verhältnissen eines Handwerkerhaushalts Am Wendengraben in Braunschweig fest.

Gauß' erste Beweise auf dem Gebiet der Zahlentheorie (die auf eine mehrjährige Phase numerischer Experimente in diesem Gebiet folgten), und somit die ersten systematischen Bausteine der *Disquisitiones Arithmeticae* datieren auf Anfang 1795, also deutlich vor seinem 18. Geburtstag und etwa neun Monate bevor er im Herbst 1795 als Student nach Göttingen geschickt wurde, wo er dann zum ersten Mal in der Universitätsbibliothek die Werke seiner Vorläufer in der Zahlentheorie studieren konnte: Pierre de Fermat (1601(?)-1665), Leonhard Euler

[1] Historischer Vortrag, gehalten auf der Gauß-Vorlesung der DMV in Göttingen am 16.5.2003.

(1707-1783), Jospeh Louis Lagrange (1736-1813) und Adrien Marie Legendre (1752-1833).

An einer ersten, sozusagen **vorklassischen Fassung** seines Buches -die als *Sturm und Drang* zu bezeichnen freilich übertrieben wäre- schrieb Gauß anscheinend in den Monaten um seinen 20. Geburtstag und vollendete sie im Sommer oder Herbst 1797. Dieses Manuskript ist heute über verschiedene Archivbestände in Göttingen und Berlin verteilt, von denen die beiden Berliner Teile (einer damals lag in Ost-, der andere in West-Berlin) erst 1975 von Uta Merzbach als Teile der frühen Fassung der *Disquisitiones Arithmeticae* identifiziert wurden.[2] Das fünfte Kapitel der frühen Fassung, welches Gauß' erste Darstellung der Theorie der binären quadratischen Formen enthalten haben muss, scheint heute verloren zu sein.

Im November 1797 begann Gauß dann, die frühe Fassung in die Form umzuschreiben, die wir heute aus dem Buch kennen. Noch keine 21 Jahre alt vollzog Gauß so stilistisch den Übergang von der Vorklassik zur Klassik. Diese Formulierung ist keine Übertreibung, sondern drückt gut den Unterschied der beiden Textfassungen im Einzelnen aus. Der Gedruckte Text hat eine Intensität und Klarheit der Gedankenführung, die der frühen Fassung abgeht, in der man noch eher die Erregung des Entdeckens spürt.

Der Druck der *Disquisitiones Arithmeticae* begann im April 1798, also immer noch vor Gauß' 21. Geburtstag und fünf Monate vor dem Ende seiner Göttinger Studentenzeit. Freilich verlief der Druck äußerst schleppend. Will man seinen Briefen glauben, ärgerte sich Gauß sehr darüber, und war sicher schon deshalb ungeduldig, das Werk in Händen zu halten, weil er seit September 1798 als Privatgelehrter in Braunschweig lebte. Andererseits aber gaben ihm die zahlreichen Verzögerungen im Druck reichlich Gelegenheit, den zentralen fünften Abschnitt, die *Sectio Quinta* der *Disquisitiones Arithmeticae* über quadratische Formen noch wesentlich weiter zu entwickeln und vom Umfang her zu verdoppeln, bis das Buch dann im Sommer 1801 schließlich erschien.

Auch in der Geschichte der Künste gibt es „im Schaffen großer Meister dergleichen Würfe, die Jugendlichkeit und Reife vereinen". Der Mozartforscher Alfred Einstein, von dem dieses Zitat stammt[3], bezieht sich hier unmittelbar auf Mozarts Es-Dur Klavierkonzert KV 271, das so genannte *Jeunehomme*-Konzert und zählt als Beispiele anderer ebenso monumentaler wie jugendlicher Werke auf: Tizians *Himmlische und Irdische Liebe* (Galleria Borghese, Rom), Goethes

---

[2] Uta C. Merzbach, An early version of Disquisitiones Arithmeticae, in: J. Dauben (ed.): Mathematical Perspectives, Essays on mathematics and its historical development presented to Prof. Dr. Kurt-R. Biermann on the occasion of his 60th birthday; New York etc. (Academic Press) 1981, pp. 167-177.

[3] Alfred Einstein, Mozart - Sein Charakter, sein Werk, Frankfurt a.M. (S. Fischer) 1968, Seite 310.

*Werther* und Beethovens *Eroica*. Beethoven war freilich 1804 bei der Niederschrift der *Eroica* schon 33 Jahre alt, und Goethe schrieb den Werther zwischen Februar und April 1774, in der Mitte seines 25. Lebensjahres. Tizians Geburtsjahr ist zwar nicht genau bekannt, aber jünger als 25 war auch er sicher nicht, als er 1515-16 die *Himmlische und Irdische* Liebe malte. Nur Mozarts *Jeunehomme*-Klavierkonzert, das Alfred Einsteins Assoziationen, insbesondere zu Beethovens *Eroica*, auslöste, entstand in der Tat sehr früh, im Monat seines 21. Geburtstags. Aber bei allem Sturm und Drang, bei aller Tiefe des langsamen Satzes und bei aller Zukunftsträchtigkeit dieses Konzerts ist es doch eher ein früher, vorklassischer Wurf und bei weitem nicht die Summe dessen, was Mozart in dieser Gattung zu sagen hatte, während die *Disquisitiones Arithmeticae* Gauß' gesamtes zahlentheoretisches Schaffen überschatten. Und mehr als das: ohne die Bedeutung der Gauß'schen Beiträge etwa zur Differentialgeometrie und Astronomie gering zu achten, wird man doch die *Disquisitiones Arithmeticae* gerade wegen ihrer methodischen Exemplarität für Gauß' Hauptwerk schlechthin halten, während hingegen Mozart in dem Alter, in dem Gauß sein Buch gedruckt in Händen hielt, gerade die Komposition des *Idomoneo* bevorstand, und der *Figaro*, der *Don Giovanni*, geschweige die *Zauberflöte* noch in der Zukunft geschrieben standen.

Das einzige mir gegenwärtige Beispiel eines dem Gauß'schen etwa synchronen jugendlich-künstlerischen Schaffens, das freilich mehr als ein Jahrhundert und einige Kriege später sich ereignete als Gauß', sind die drei Weltkriegsopern von Erich Wolfgang Korngold (1897-1957): *Der Ring des Polykrates*[4], *Violanta*[5], und vor allem der suchende Abgesang einer gewesenen Epoche in der Oper *Die Tote Stadt*.[6] Der große Unterschied dieser beiden jugendlichen Autoren liegt freilich in ihren Startvoraussetzungen: der Vater Julius Korngold ebnete als Wiener Kritikerpapst, und auch als Mitverfasser des Librettos der *Toten Stadt*, dem Sohn Wege, wie sie Gauß in dieser Form auch vom Braunschweiger Herzog nie ermöglicht wurden. Gauß hatte in der Mathematik auch keinen Lehrer, der irgendwie an Korngolds Kompositionslehrer Zemlinski herangereicht hätte. Anregend mag dieser Vergleich zwischen Gauß und Korngold dadurch sein, dass beide in das Gebiet ihrer großen Jugendleistungen (die Zahlentheorie bei Gauß, für Korngold die Oper) im späteren Schaffen nur noch vergleichsweise wenig erneuernd eingriffen; und insofern jeder auf seine Weise: Gauß in der Hannoverschen Landvermessung, Korngold durch die Hollywoodsche Filmmusik, seine Fähigkeiten willig in praktische Dienste zu stellen bereit war.

[4] Begonnen 1913; 1916 in München uraufgeführt.

[5] Begonnen 1914 und wie Der Ring des Polykrates 1916 in München uraufgeführt.

[6] Begonnen 1917, 1920 beendet und am 6.12.1920 gleichzeitig in Hamburg und Köln uraufgeführt.

## 2. Vergleich der Bücher

Euklids Werk ist ohne Zweifel das erfolgreichste mathematische Lehrbuch aller Zeiten gewesen, auch wenn es natürlich zunächst einmal die systematische, axiomatisierte Darstellung des mathematischen Wissens seiner Zeit war. Jahrhunderte von Schülern wurden mehr oder weniger verdünnten oder kommentierten Euklidausgaben ausgesetzt. Aber neben dieser pädagogischen Benutzung des Werkes standen Euklids Elemente fast zwei Jahrtausende lang fest als ehernes Modell der mathematischen Methode, ja der Wissenschaftlichkeit überhaupt: Spinoza strebte bekanntlich einen Aufbau der Philosophie *more geometrico*, nach Art der Geometrie, d.h. nach Euklidischem Vorbild an. Und so konnten sich noch die Philosophen des 18. Jahrhunderts, allen voran Immanuel Kant in seiner Erklärung der Möglichkeit mathematischer Beweise, an den euklidischen Konstruktionen geometrischer Figuren orientieren.

Gauß' *Disquisitiones Arithmeticae* dagegen sind nie ein erfolgreiches Lehrbuch gewesen. Auch heute lernen Schüler sie in der Regel nicht kennen, und ich wage zu bezweifeln, ob die zahlreichen Exemplare der Übersetzung ins Katalanische dieses Klassikers, die 1996 von der zahlentheoretisch ausgebildeten Studienrätin Griselda Pascual Xufré in Barcelona veröffentlicht und vom Institut für katalanische Studien an Gymnasien der Region Catalunya verschenkt wurden, bei ihren Adressaten das gewünschte Echo fanden.

Tatsächlich aber haben die *Disquisitiones Arithmeticae* nicht nur die Zahlentheorie als eigene theoretische Disziplin der Mathematik kreiert, sondern auch den Boden für sehr viel weiter gehende Forschungen bereitet. Freilich geschah das nicht sofort und vor allem nicht gerade so, wie Gauß die Dinge angestoßen hatte: Die fulminante Erfolgsstory der deutschen algebraischen Zahlentheorie im 19. Jahrhundert scheint sich vielmehr einer kreativen Übersetzung der *Disquisitiones Arithmeticae* in die Sprache der algebraischen Zahlkörper, einer Art Paradigmenwechsel zu verdanken - davon später ein wenig mehr.

Ungeachtet der zunächst schleppenden Rezeption und der späteren mathematischen Umgestaltung jedoch wirkten die *Disquisitiones Arithmeticae* weit in das 19. Jahrhundert hinein als ein **Muster an Methode** und waren in dieser Hinsicht Euklids Elementen durchaus ähnlich. So trugen die *Disquisitiones Arithmeticae* im Verein mit der Humboldtschen Bildungsreform in Preußen nicht wenig zur Etablierung des neuen Berufsstands der reinen Mathematiker an den Universitäten (zunächst besonders in Berlin und Königsberg) bei. Es ist dabei durchaus eine Ironie der Geschichte, dass Gauß selbst als Professor der Astronomie diesem neuen Stand nie angehörte. Und die mustergültige, algebraisch-arithmetische Strenge der *Disquisitiones Arithmeticae legte* auch den ursprünglichen Grundstein für eine radikale Umwälzung der Mathematik nach 1870, nämlich für die so genannte *Arithmetisierung*, welche endgültig die euklidische Geometrie aus der Rolle des Fundaments der mathematischen Wissenschaften verdrängte.

## 3. Frühe Rezeption der D.A.

Schon 1807 erschien in Paris eine französische Übersetzung durch A.C.M. Poullet-Delisle. Aus der Rezension dieses Buches durch Louis Poinsot (professur de mathématiques au Lycée Bonaparte) in Le Moniteur 36 vom 21. März 1807[7]:

> *... Quoique nous ne puissions entrer ici, ni dans l'histoire de la science qui remonte à Diophante et même à Euclide, ni dans la discussion des choses qui appartiennent aux différentes géomètres et particulièrement à M. Gauss, nous ne pouvons néanmoins passer sous silence le résultat aussi nouveau qu'inattendu, qu'on trouve à la VIIe section de ses* Recherches *sur la théorie des divisions égales du cercle, ou de l'inscription des polygones réguliers. On avait lieu de croire depuis Euclide, que les divisions du cercle par les nombres* deux, trois, cinq, *et celles qui en résultent, étaient les seules possibles par la règle et le compas. M. Gauss démontre qu'on peut encore exécuter par les mêmes moyens les divisions par* dix-sept *et par tous les nombres qui, comme deux, trois, cinq et dix-sept sont formés d'une puissance de deux, plus un; et sont en même temps premiers. ........*
>
> *On pourrait s'étonner d'abord de trouver dans ce livre des problèmes de géométrie, et de les voir résolus par les nombres. Mais dans les sciences mathématiques toutes les vérités se tiennent par une chaîne nécessaire. .... et la découverte de M. Gauss ne fait que confirmer cette vérité si souvent reconnue par les géomètres: que leurs spéculations les plus frivoles en apparence, développent à la fin quelqu'utilité nouvelle qu'on n'y avait point cherchée, et qu'on voit toujours leurs méditations, au moins innocentes durant leur vie, tourner avec le tems au profit des arts et à l'avantage de la société.*

Diese Konstruktion des Siebzehnecks sprach sich als relativ leicht formulierbares und vorstellbares Resultat besonders schnell herum, und wurde von den Intellektuellen der Zeit je auf ihre Weise aufgegriffen. So findet man in Georg Wilhelm Friedrich Hegels Wissenschaft der Logik von 1816 im Rahmen einer Diskussion analytischer, bzw. synthetischer Urteile in der Mathematik die folgende Stelle, die nebenbei belegt, dass Hegel (entgegen dem landläufigen Vorurteil gegen seine naturwissenschaftlichen bzw. naturphilosophischen Behauptungen) mit der neuesten Mathematik seiner Zeit z.B. viel besser vertraut war als Kant mit der Mathematik seiner Epoche[8]:

---

[7] Diese Rezension ist ganz abgedruckt in: Karin Reich (Hrsg.), Gauss' Werke in Kurzfassung; Algorismus (Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften herausgegeben von Menso Folkerts) 39, Augsburg 2002.

[8] Die Idee des Erkennens, Teil: Die Idee des Wahren, Abschnitt: Das analytische Erkennen; Meiner Philosophische Bibliothek Band 57, Zweiter Teil, Seite 449. - Mit dem „Residuum von $x^{m-1}-1$ durch $m$ dividiert“ spielt Hegel auf die ($m$-1)-ten Einheitswurzeln

*Die Aufgabe z.B., die Summe der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, wird durch die Betrachtung und dann die Verknüpfung der Funktionen gelöst, welche die Koeffizienten der Gleichung von den Wurzeln sind. Die zur Hilfe genommene Bestimmung der Funktionen der Koeffizienten und deren Verknüpfung ist nicht in der Aufgabe schon ausgedrückt, - übrigens ist die Entwicklung selbst ganz analytisch. So ist die Auflösung der Gleichung* $x^m-1=0$ [9] *mit Hilfe der Sinus, auch die immanente, bekanntlich durch* ***Gauß*** *gefundene algebraische Auflösung mit Hilfe der Betrachtung des* ***Residuums*** *von* $x^{m-1}-1$ *durch m dividiert und der so genannten primitiven Wurzeln, - eine der wichtigsten Erweiterungen der Analysis der neuern Zeit, - eine synthetische Auflösung, weil die zu Hilfe genommenen Bestimmungen, die Sinus oder die Betrachtung der Residuen, nicht eine Bestimmung der Aufgabe selbst sind.*

Zum Abschluss dieses Abschnitts hier noch drei spätere, auf ein Jahrhundert der Weiterentwicklung zurückblickende Würdigungen: Die Öffentliche Vorlesung „Über den Begriff der Zahl in der Mathematik", die Leopold Kronecker (1823-1891) im Sommer 1891 an der Friedrich Wilhelms Universität zu Berlin hielt, begann mit den Worten [10]:

*Wenn ich es heute zum ersten Male unternehme, über einen allerdings echt mathematischen Gegenstand, den Begriff der Zahl in der Mathematik, eine Vorlesung zu halten, so muss ich gestehen, dass ich nicht ohne ein gewisses Zagen mich dazu entschließe. Freilich entspringt dasselbe nicht etwa der Überzeugung, als sei ich auf die Sache ungenügend vorbereitet. Denn setze ich den Anfang dieser Vorbereitungsfrist in die Zeit, wo ich meine ersten Rechenexempel löste, so beträgt sie einige 60 Jahre, setze ich denselben in die Zeit, wo ich begann, unter meines verehrten Lehrer Kummer's Leitung die Disquisitiones von Gauß, das Buch aller Bücher, zu studieren, so beläuft sie sich immerhin noch auf über fünfzig Jahre.*

Und Kroneckers milder aber beharrlicher Opponent in Fragen der Umgestaltung der Zahlentheorie, Richard Dedekind (1831-1916) in Braunschweig schrieb vier Jahre nach Kroneckers Tod in seinem Artikel „Über die Begründung der Idealtheorie" von 1895:

*Ich erinnere zunächst an eine schöne Stelle der* Disquisitiones Arithmeticae, *die schon in meiner Jugend den tiefsten Eindruck auf mich gemacht hat:* At

an, die man in den ganzen Zahlen modulo der Primzahl m wiederfindet. Dank an Olaf Neumann, der mich zuerst auf diese Stelle aufmerksam machte.

[9] In der Ausgabe des Meiner-Verlags findet sich hier der Setzfehler: $x^{m-1}=0$, im Gegensatz zu Hegels Original.

[10] Siehe : Jacqueline Boniface und Norbert Schappacher, `Sur le concept de nombre en mathématique' - cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891), Revue d'histoires des mathématiques **7** (2001), 207-275.

nostro quidem judicio huiusmodi veritates ex notionibus potius quam ex notationibus hauriri debebant. [11] *In diesen letzten Worten liegt, wenn sie im allgemeinsten Sinne genommen werden, der Ausspruch eines großen wissenschaftlichen Gedankens, die Entscheidung für das Innerliche im Gegensatz zu dem Äußerlichen.*

In direkter Erwiderung, wenn auch ohne expliziten Bezug zu Gauß, möge hierauf noch einmal Leopold Kronecker zu Worte kommen, mit einem Zitat aus seinem Brief an Georg Cantor, den Erfinder der Mengenlehre, vom 21. August 1884 [12] :

*Einen wahren wissenschaftlichen Werth erkenne ich - auf dem Felde der Mathematik - nur in concreten mathematischen Wahrheiten, oder schärfer ausgedrückt, ‚nur in mathematischen Formeln'. Diese allein sind, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, das Unvergängliche. Die verschiedenen Theorien für die Grundlagen der Mathematik (so die von Lagrange) sind von der Zeit weggeweht, aber die Lagrangesche Resolvente ist geblieben!*

Die meisten Langrangeschen Resolventen werden übrigens heutzutage als *Gauß'sche Summen* bezeichnet.

Schließen wir diesen Abschnitt von Zitaten mit einer kulturhistorischen Einordnung unseres Klassikers, die von John Theodore Merz stammt und auf die mich Catherine Goldstein aufmerksam machte. Dieser deutsche Chemiker studierte in Giessen und Göttingen, wo er sich zunehmend weit gespannte Interessen und Kenntnisse (insbesondere auch über Philosophie unter Anleitung von Hermann Lotze) aneignete, bevor er 1867 nach Großbritannien auswanderte. Er bemühte sich sehr um die Vermittlung der wissenschaftlichen Kultur mit der künstlerischen und philosophischen. Im ersten Band seiner monumentalen vierbändigen „History of European Thought in the Nineteenth Century", von 1896 liest man:

*[Among the events] which foreboded a revival of the glory for Germany [....] was the publication of the Disquisitiones Arithmeticae in Latin in 1801. [.... Gauss] raised this part of mathematics into an independent science. [....] Superseding the work of Fermat, Euler and Legendre, he produced that great book with seven seals. The seals were only gradually broken. [....] Gauss not only taught us some very remarkable new properties of numbers – he also invented a new instrument or calculus for their investigation [his theory of congruences].*

---

[11] Dieses Zitat ist aus § 76 der *Disquisitiones Arithmeticae*, wo es um Warings [oder ‚Wilsons'] Satz geht: $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$, den weder Waring noch Wilson zu beweisen vermochten, was Waring auf den Mangel an einer Notation für die Primzahl zurückgeführt haben soll. – „Aber nach unserem Urteil jedenfalls sollten derlei Wahrheiten lieber aus Begriffen denn aus Notationen geschöpft werden."

[12] Siehe Georg Cantor, Briefe; Hrsg. von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson, Springer Verlag 1991, p. 196.

## 4. Inhalt der Disquisitiones Arithmeticae in Schlaglichtern

Die *Disquisitiones Arithmeticae* beginnen mit der Definition und neuen Schreibweise der Kongruenz zwischen zwei ganzen Zahlen nach einem „Modul“:

*Si numerus a numerorum b, c differentiam metitur, b et c secundum a congrui dicuntur, sin minus, incongrui: ipsum a modulum appellamus. ...*

*Numerorum congruentiam hoc signo, ≡, in posterum denotabimus, modulem ubi opus erit in clausulis adiungentes, -16 ≡ 9 (mod. 5), -7 ≡ 15 (mod.11).*

Und sie enden mit jenem viel beachteten Resultat über die Konstruierbarkeit regulärer n-Ecke, insbesondere des Siebzehnecks, das Gauß auf dem Wege über die Theorie der algebraischen Gleichungen angeht. Wenn man von heute her darüber spricht, kann man den Inhalt der *Sectio Septima*, dieses siebten Abschnitts der Disquisitiones Arithmeticaeals die „Galoistheorie“ der $p$-ten Einheitswurzeln, für eine ungerade Primzahl $p$, bezeichnen. (Evariste Galois (1811-1832) war bei Erscheinen der Disquisitiones Arithmeticae -10 Jahre alt.)

Die ganze Architektur der Disquisitiones Arithmeticae aber dreht sich um einen Satz, der geradezu zum Symbol dessen geworden ist, was Gauß unter Zahlentheorie verstand: das quadratische Reziprozitätsgesetz. Dieser Satz, den Gauß als *theorema fundamentale* bezeichnet, wird heute üblicherweise in der Form ausgesprochen, die Legendre ihm gegeben hat: Man definiert für eine ungerade Primzahl p und für eine ganze Zahl a, die nicht durch p teilbar ist, das quadratische Restsymbol:

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\begin{cases}+1 \text{ falls } x^2\equiv a(\operatorname{mod} p) & \text{lösbar}\\ -1 \text{ falls } x^2\equiv a(\operatorname{mod} p) & \text{unlösbar}\end{cases}$$

Dann lautet das Reziprozitätsgesetz für zwei verschiedene ungerade Primzahlen $p, q$:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)$$

Bei Gauß findet sich zunächst eine andere äquivalente Formulierung, die (mit Legendres Notation) besagt:

$$\left(\frac{p^*}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right) \quad \text{wo } p^*=\begin{cases}+p \text{ falls } p \text{ von der Form } 4n+1 \text{ ist}\\ -p \text{ falls } p \text{ von der Form } 4n+3 \text{ ist}\end{cases}$$

In der Tat lesen wir im § 131 der *Disquisitiones Arithmeticae* diese letzte Aussage als Satz formuliert:

*Si p est numerus primus formae 4n+1, erit +p, si vero p formae 4n+3, erit -p residuum vel non residuum cuiusuis numeri primi qui positiue acceptus ipsius p est residuum vel non residuum.*

*Quia omnia fere quae de residuis quadraticis dici possunt, huic theoremati innituntur, denominatio* theorematis fundamentalis, *qua in sequentibus utemur, haud absona erit.*

Dieses *theorema fundamentale* wird in der Druckversion der *Disquisitiones Arithmeticae* zweimal bewiesen: einmal elementar in der *Sectio Quarta*, im § 135; dann noch einmal als Korollar aus der Theorie der quadratischen Formen der *Sectio Quinta* im § 262. In der vorklassischen Fassung der *Disquisitiones Arithmeticae* aber wurde das quadratische Reziprozitätsgesetz noch ein drittes Mal bewiesen: als Folgerung aus der Theorie der höheren Kongruenzen, oder (wie man heute sagen würde) unter Benutzung der endlichen Quotientenringe von Ringen zyklotomischer ganzer Zahlen, im *Caput Octavum*, das Gauß nie druckfertig gemacht hat. Insofern war die frühe Textfassung architektonisch vollkommener angelegt als das schließlich erschienene Buch: mit dem dritten Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes schloss sich im ursprünglichen Plan ein Kreis, der das siebente Kapitel über die Kreisteilung nicht mehr isoliert als das einzige Kapitel dastehen lässt, in dem über den Bereich der ganzen Zahlen hinausgegangen wird, und dessen Zusammenhang mit den ersten sechs Sektionen im Buch nicht recht erkennbar wird. In dieser, und nur in dieser Hinsicht hat die frühe, `vorklassische' Textfassung des Buches beim Übergang zur Druckversion an `klassischer' Vollkommenheit eingebüßt.

## 5. Die Übersetzung der Disquisitiones in die Theorie der algebraischen Zahlkörper

Die Abschnitte der *Disquisitiones Arithmeticae*, die in den folgenden Jahrzehnten am stärksten umgeschrieben wurden, betreffen die quadratischen Formen, also Ausdrücke der Form

$$(a,b,c) := ax^2+2bxy+cy^2 \qquad (a,b,c \;\text{ ganze Zahlen})$$

Gauß' arithmetische Behandlungsweise dieser Objekte lässt sich dadurch kennzeichnen, dass er es in den *Disquisitiones Arithmeticae* systematisch vermied, folgende Zerlegung unter Benutzung von Quadratwurzeln zu geben:

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \frac{1}{a}\cdot(ax+by+\sqrt{b^2-ac}\cdot y)\cdot(ax-by-\sqrt{b^2-ac}\cdot y)$$

Der spätere Zugang, der vor allem von Richard Dedekind ab ca. 1870 vertreten wurde, besteht darin, systematisch in Zahlbereichen aller Größen der Form

$m+n\sqrt{D}$ $m$, $n$ beliebige ganze Zahlen; $D$ eine fest gegebene ganze Zahl

zu arbeiten und gewisse unendliche Teilmengen, so genannte Ideale, solcher Größen als neue Objekte in den Mittelpunkt der Theorie zu stellen. Einer der

Kernbegriffe, die Dedekind in die dergestalt umgeschriebene und verallgemeinerte Theorie einführte, war der des **Körpers** (im Sinne der Algebra), genauer des **algebraischen Zahlkörpers**.

Man kann die Umwälzung dieses Gebietes sehr gut durch den Vergleich zweier Berichte zur Höheren Arithmetik ermessen, die im Abstand von fast einem halben Jahrhundert geschrieben wurden:

In seinem mehrbändigen Bericht über den Stand der Höheren Zahlentheorie, den der Engländer Henry John Steven Smith (1826-1883) um 1860 publizierte („Report on the Theory of Numbers") ist von

> *two principal branches of the higher arithmetic; the Theory of Congruences, and the Theory of Homogeneous Forms*

die Rede, was genau der groben Gliederung der ersten sechs Abschnitte der *Disquisitiones Arithmeticae* folgt.

David Hilberts so genannter „Zahlbericht" von 1897 hingegen trug den neuen Standpunkt schon im Titel: „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper". Dieser „Zahlbericht" Hilberts wurde dann mindestens für ein halbes Jahrhundert **das** Lehrbuch der neuen Disziplin, welches die *Disquisitiones Arithmeticae* nie sein konnten. Hilbert war sich der Bedeutung der Umwälzung zumindest in dem Moment bewusst, als er das Vorwort zum „Zahlbericht" schrieb:

> *So sehen wir, wie die Arithmetik, die „Königin" der mathematischen Wissenschaft, weite algebraische und funktionentheoretische Gebiete erorbert und in ihnen die Führerrolle übernimmt. Dass dies aber nicht früher und nicht bereits in noch höherem Maße geschehen ist, scheint mir daran zu liegen, dass die Zahlentheorie erst in neuerer Zeit in ihr reiferes Alter getreten ist. Sogar noch Gauß klagt über die unverhältnismäßig großen Anstrengungen, die ihn die Bestimmung eines Wurzelzeichens in der Zahlentheorie gekostet: es habe ihn „manches andere wohl nicht so viel Tage aufgehalten, als dieses Jahre", und dann auf einmal, „wie der Blitz einschlägt", habe sich „das Rätsel gelöst". An Stelle eines solchen für das frühe Alter einer Wissenschaft charakteristischen, sprunghaften Fortschrittes ist heute durch den systematischen Aufbau der Theorie der Zahlkörper eine sichere und stetige Entwickelung getreten.*

Dieses Zitat fordert mich, bei aller Ehrfurcht vor dem großen David Hilbert sofort zum Widerspruch heraus. Meint er allen Ernstes, nach der Umformulierung in die Körpersprache gebe es keine harte Nuss mehr in der algebraischen Zahlentheorie zu knacken, die völlig unerwartete Wendungen des Gedankens verlangt?

Ich hänge aber diesen Gedanken nicht weiter nach, sondern lasse rasch ein anderes Hilbertzitat dem eben gegebenen nachfolgen …

## 6. Was ist also ein Klassiker in der Mathematik?

David Hilbert (1862-1943), der, wie wir gesehen haben, mit seinem Zahlbericht von 1897 die Umschreibung der Zahlentheorie in die Theorie der algebraischen Zahlkörper für das XX. Jahrhundert festgeschrieben hatte, leugnete zehn Jahre später gewissermaßen die Originalität dieses geschichtlichen Prozesses [13]:

> *Die Zahlentheorie ist ein herrlicher Bau, erschaffen und aufgeführt von Männern die zu den glänzendsten Forschern im Bereich der mathematischen Wissenschaften gehören: Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauß, Jacobi, Dirichlet, Hermite, Kummer, Dedekind und Kronecker. Alle diese Männer haben in den begeistertsten Worten ihrer hohen Meinung über die Zahlentheorie Ausdruck gegeben und bis heute gibt es wohl keine Wissenschaft, von deren Ruhme ihre Jünger so erfüllt sind, wie von der Zahlentheorie. Man preist an der Zahlentheorie die Einfachheit ihrer Grundlagen, die Genauigkeit ihrer Begriffe und die Reinheit ihrer Wahrheiten; man rühmt sie als das Vorbild für die anderen Wissenschaften, als die tiefste unversiegbare Quelle aller mathematischen Erkenntniss und als reiche Spenderin von Anregungen für andere mathematische Forschungsgebiete wie Algebra, Funktionentheorie, Analysis und Geometrie. Dazu kommt, dass die Zahlentheorie vom Wechsel der Mode unabhängig ist und dort nicht wie oft in anderen Wissensgebieten, bald die eine Auffassung oder Methode übermässig sich aufbauscht, bald zu anderer Zeit unverdiente Zurücksetzung erfährt; in der Zahlentheorie ist oft das älteste Problem noch heute modern, wie ein echtes Kunstwerk aus der Vergangenheit.*

Bei aller Anerkennung der Langlebigkeit Mathematischer Probleme lässt sich die These über die nicht vorhandenen Moden angesichts des Schicksals der *Disquisitiones Arithmeticae* schwerlich aufrechterhalten. Die Lektüre der *Disquisitiones Arithmeticae* für uns heute ist eindeutig eine geschichtliche Übung, ein sich-Einlassen auf eine alte Form der Zahlentheorie.

Wissenschafts-Historiker vertreten mitunter die These[14] die Naturwissenschaftler und Mathematiker sollten sich mehr um die Geschichte ihres Faches bemü-

---

[13] Aus Hilberts "Introduction" to: Legh Wilber REID (Prof. at Haverford College): The elements of the Theory of Numbers, with an introduction by David Hilbert (Prof. of Mathematics at the University of Göttingen), New York NY, The Mac Millan Comp., 1910, p. xvii-xviii (dtsch.), xviii-xix (engl.).

[14] Die folgende Aufstellung von Gesichtspunkten entnehme ich einem neueren Text von A.E. Schwarz zum Verhältnis von Limnologie und Geschichte. Vgl. etwa J. Maienschein, Why study history for science? Biology and Philosophy **15** (2000), 339-348; oder: T.J. Horder, Why do scientists need to be historians? The Quarterly Review of Biology **73** (1998), 175-187. Für die Mathematik wurde ein verwandter, wenn auch verschiedener Standpunkt von André Weil verteten in: History of Mathematics, why and how? Œuvres scientifiques, vol. III: (1978b).

hen, und also auch ihre eigenen Klassiker studieren. Dies könne ihnen Klarheit über das eigene wissenschaftliche Tun verschaffen und ihr Urteil schärfen; es könne Wiederholungen vermeiden helfen, insofern man aus Fehlern lernen könne; neue Ideen könne man durch das Studium alter, vergessener oder jedenfalls ungelesener Texte bekommen, ganz allgemein liefere die Geschichte des Faches ein breiteres Repertoire an Ideen; und schließlich könne Geschichtsbewusstsein der eigenen Disziplin dem Trend zunehmender Spezialisierung und Vereinzelung entgegenwirken und das gesellschaftliche Verständnis von und für Wissenschaft fördern.

Sollte ich also hier die Lektüre der *Disquisitiones Arithmeticæ* propagieren? Ich bin mir nicht ganz sicher. Wir Mathematiker haben angesichts des rapiden Fortschreitens unserer Wissenschaft – man denke nur an den Beweis der Fermatschen Vermutung, der Andrew Wiles vor wenigen Jahren unter Verwendung fast aller neuen theoretischen Entwicklungen der Arithmetischen Algebraischen Geometrie der letzten Jahrzehnte gelang - sehr gute Gründe, nicht zuviel zurückzuschauen, sondern auf noch raffiniertere neue Ideen zu setzen.

Allerdings wünsche ich mir nicht nur erfolgreiche sondern auch gebildete Mathematiker - ebenso wie ein mathematisch aufgeschlossenes Publikum. In diesem Sinne schließe ich mit zwei (von zwölf) Definitionen des „Klassikers“ nach Italo Calvino (1923-1985), die ich hier auf die *Disquisitiones Arithmeticae* anwenden will:[15]

> *9. Klassiker sind Bücher, die, je mehr man sie vom Hörensagen zu kennen glaubt, um so neuer, unerwarteter und unbekannter findet, wenn man sie zum ersten Mal richtig liest.*
>
> *3. Klassiker sind Bücher, die einen besonderen Einfluss ausüben --- sowohl wenn sie sich als unvergesslich behaupten, als auch wenn sie sich in den Falten der Erinnerung verstecken und sich als kollektiv oder individuell Unbewusstes tarnen.*

Letzteres scheint mir die Rolle der *Disquisitiones Arithmeticae* im Selbstbewusstsein der reinen Mathematiker recht treffend zu beschreiben.

[15] Nach Calvinos Essayband „Warum Klassiker lesen?“, Edition Akzente bei Hanser, München 2003. --- Dank an Birgit Petri für diesen Hinweis.