Journal of Functional Analysis **195**, 371–443 (2002)
doi:10.1006/jfan.2002.3973

Fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-Finies sur un Espace Symétrique Réductif

Sofiane Souaifi

Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 163, avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France
E-mail: souaifi@iml.univ-mrs.fr souaifi@math.u-strasbg.fr

Communicated by Michèle Vergne

Received November 16, 2001; revised February 21, 2002; accepted March 14, 2002

It is well known that, on $\mathbb{R}^n$, every smooth function annihilated by a finite codimensional ideal in the algebra of constant coefficient differential operators, is a linear combination of polynomial exponential functions, $P(x)e^{\lambda(x)}$, $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Furthermore, the polynomial functions are obtained by applying to the exponential functions $e^{\lambda(x)}$ some constant coefficient differential operator in the parameter λ. We generalize this fact to the reductive symmetric spaces' case, the role of the exponential functions being taken by the Eisenstein integrals.
Key Words: reductive symmetric spaces; Eisenstein integrals; invariant differential operators; asymptotic expansions; Plancherel formula.

1. INTRODUCTION

Let G be a reductive Lie group in the Harish-Chandra class, σ an involution of G, H an open subgroup of the group of its fixed points, and $\mathbb{D}(G/H)$ the algebra of left G-invariant differential operators on G/H. Let θ be a Cartan involution of G commuting with σ. We fix a finite dimensional unitary representation, (τ, V_τ), of the group K of fixed points for θ.

Let $\mathscr{A}(G/H, \tau)$ denote the space of $\mathbb{D}(G/H)$-finite, τ-spherical functions on G/H. We fix a maximal abelian subspace, $\mathfrak{a}_\emptyset$, of the subspace of antiinvariant elements of $\mathfrak{g}$ under the differential of σ and θ. If P is a $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup of G containing $A_\emptyset := \exp \mathfrak{a}_\emptyset$, let $P = M_P A_P N_P$ be its Langlands σ-decomposition, where $A_P \subset A_\emptyset$, ρ_P be the half-sum of the roots of $\mathfrak{a}_P$ in $\mathfrak{n}_P$ counted with their multiplicities, and Σ_P the set of roots of $\mathfrak{a}_P$ in $\mathfrak{n}_P$. We fix a minimal $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup of G containing $A_\emptyset$, denoted by $P_\emptyset$. Let us suppose, for the introduction only, that there exists a unique open $(H, P_\emptyset)$-double coset of G, i.e., $G = \mathrm{Cl}(HP_\emptyset)$. Let $\bar{P}_\emptyset$ denote the $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup $\theta(P_\emptyset)$ of G.

For each $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup P of G containing $A_\emptyset$, each smooth $\mathbb{D}(M_P/M_P \cap H)$-finite $\tau_{|K\cap M_P}$-spherical function ψ on $M_P/M_P \cap H$, which is square integrable, and each element λ of $(\mathfrak{a}_P)^*_{\mathbb{C}}$, such that $\mathrm{Re}\,\lambda - \rho_P$ is

0022-1236/02 \$35.00

strictly Σ_P-dominant, we have the Eisenstein integral $E(P, \psi, \lambda)$, given by an integral, which defines an element of $\mathscr{A}(G/H, \tau)$. This family of functions has a meromorphic continuation in $\lambda \in (\mathfrak{a}_P)^*_{\mathbb{C}}$.

For each $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup P containing $A_\emptyset$ and each element λ of $(\mathfrak{a}_P)^*_{\mathbb{C}}$, we define (P, λ)-regularizing polynomials (cf. Section 3, Definition 2) in the following way. These are nonzero polynomials p on $(\mathfrak{a}_P)^*_{\mathbb{C}}$, products of affine forms, which satisfy, for all such ψ, the following relation:

$$p(v)E(P, \psi, v) \textit{ is holomorphic in } v \textit{ on a neighbourhood of } \lambda.$$

Let us denote by $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H, \tau)$ the vector subspace of $\mathscr{A}(G/H, \tau)$ generated by derivatives of such functions along the parameter v, at λ, for arbitrary λ (cf. Section 3, Definition 3). The elements of this space are called derivatives of Eisenstein integrals.

Let us remark that square integrable elements of $\mathscr{A}(G/H, \tau)$ are elements of $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H, \tau)$. These are Eisenstein integrals for $P = G$.

Theorem. *Let (τ, V_τ) be a finite dimensional unitary representation of K. One has the following vector space equality*:

$$\mathscr{A}(G/H, \tau) = \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H, \tau).$$

The proof rests on an idea used by Franke to obtain the same kind of result for automorphic forms (cf. [16, Section 6] see also the article [24]). A crucial role is played by the projection of real parts of asymptotic exponents of elements of $\mathscr{A}(G/H, \tau)$ along $\bar{P}_\emptyset$, on the Weyl chamber determined by $\bar{P}_\emptyset$ in $\mathfrak{a}_\emptyset$ (one needs to take the opposite of $P_\emptyset$ to solve some technical problems which will not be mentioned in this section). The role of this projection has been pointed out independently by Carmona [7] and Hecht and Schmid [18, Section 4]), in the Langlands' classification for irreducible representations of reductive real groups (see also [12], for the symmetric spaces' case).

We will use here the theory of asymptotic expansions along parabolic subgroups, introduced by Wallach [25] (see also the articles of van den Ban and Schlichtkrull [1, 3, 4]).

Let Φ be a nonzero element of $\mathscr{A}(G/H, \tau)$. Let us suppose that Φ is annihilated by a nontrivial power of a maximal ideal I of $\mathbb{D}(G/H)$. We have the asymptotic expansion of Φ along $\bar{P}_\emptyset$ as follows:

$$\Phi(g \exp(tX)H) \underset{t \to +\infty}{\sim} \sum_{\xi \in S - \mathbb{N}.\Sigma_{\bar{P}_\emptyset}} p_\xi(\bar{P}_\emptyset | \Phi, g, tX) e^{t(\xi - \rho_{\bar{P}_\emptyset})(X)},$$

where $g \in G$ and $X \in \mathfrak{a}^+_{\bar{P}_\emptyset}$, the positive Weyl chamber associated to $\Sigma_{\bar{P}_\emptyset}$, such that S is a finite subset of $(\mathfrak{a}_\emptyset)^*_{\mathbb{C}}$ only depending on $P_\emptyset$ and I, and, for each

$g \in G$ and $\xi \in S - \mathbb{N}.\Sigma_{\bar{P}_\emptyset}$, $p_\xi(\bar{P}_\emptyset|\Phi, g)$ is a polynomial function on $\mathfrak{a}_0$. Here $\mathbb{N}.\Sigma_{\bar{P}_\emptyset}$ denotes the set of elements of the form $\sum_{\alpha \in \Sigma_{\bar{P}_\emptyset}} n_\alpha \alpha$ with each $n_\alpha \in \mathbb{N}$.

We say that $\xi \in S - \mathbb{N}.\Sigma_{\bar{P}_\emptyset}$ is an asymptotic exponent of Φ along $\bar{P}_\emptyset$ if and only if $p_\xi(\bar{P}_\emptyset|\Phi)$ is not identically equal to zero. For such a ξ, the function $p_\xi(\bar{P}_\emptyset|\Phi)$ is called the asymptotic coefficient of Φ along $\bar{P}_\emptyset$ related to ξ. The fact that Φ is nonzero implies that the set of asymptotic exponents of Φ along $\bar{P}_\emptyset$ is not empty.

We start by ordering leading asymptotic exponents ξ of Φ along $\bar{P}_\emptyset$ according to the length of the projection $(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset}$ of $\operatorname{Re}\xi$ on the closure of the convex cone $\mathscr{C}_{\bar{P}_\emptyset} := \{\nu \in \mathfrak{a}_\emptyset^* | (\xi, \alpha) > 0,\ \alpha \in \Sigma_{\bar{P}_\emptyset}\}$.

We denote by $\mathscr{T}(\Phi)$ the subset of $\mathfrak{a}_\emptyset^*$ of elements $(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset}$, where ξ is a leading asymptotic exponent of Φ along $\bar{P}_\emptyset$, of maximal length in the set of projections on $\overline{\mathscr{C}_{\bar{P}_\emptyset}}$ of real parts of asymptotic exponents of Φ along $\bar{P}_\emptyset$. Since Φ is nonzero, this set is not empty. Moreover, it is contained in a finite set which depends only on the ideal I. The set $\mathscr{T}(0)$ is setted to be empty. The main idea is to construct a derivative of Eisenstein integrals F annihilated by a nontrivial power of I such that either $\mathscr{T}(\Phi - F)$ is empty (so $\Phi - F$ is equal to zero), or the length of the elements of $\mathscr{T}(\Phi - F)$ is strictly less than the length of those of $\mathscr{T}(\Phi)$ or the lengths of the elements of $\mathscr{T}(\Phi)$ and $\mathscr{T}(\Phi - F)$ are equal but $\mathscr{T}(\Phi - F) \nsubseteq \mathscr{T}(\Phi)$, the main result being obtained by induction on the length and the number of elements of $\mathscr{T}(\Phi)$.

We first treat the case when $\mathscr{T}(\Phi)$ is reduced to zero (cf. Section 5). Then Φ is tempered and defines a linear form on the Schwartz space of τ-spherical functions, $\mathscr{C}(G/H, \tau)$, which is annihilated by a nontrivial power of I. One shows, using the fact that I is of finite codimension and the characterization by Carmona and Delorme of the Fourier transform of $\mathscr{C}(G/H, \tau)$ (cf. [10, Theorem 6]), that this linear form is defined by a derivative of Eisenstein integrals along imaginary parameters (cf. Theorem 5.1 and its Corollary).

Let us now consider the case when $\mathscr{T}(\Phi)$ is not reduced to zero, which implies that $0 \notin \mathscr{T}(\Phi)$. Let $\eta \in \mathscr{T}(\Phi)$. We denote by P the $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup of G containing $P_\emptyset$, which stabilizes η viewed as an element of $\mathfrak{g}^*$, i.e., its Lie algebra is spanned by the sum of the Lie algebra of $P_\emptyset$ and the weight subspaces associated to the roots which are orthogonal to η. Let ξ be an asymptotic exponent of Φ along $\bar{P}_\emptyset$ such that $(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$, and let us denote by λ_ξ the restriction to $\mathfrak{a}_P$ of $-\xi$.

Thus defined, $-\lambda_\xi$ is a leading asymptotic exponent of Φ along $\bar{P} := \theta(P)$, its real part is equal to η and is strictly $\Sigma_{\bar{P}}$-dominant (in this way, λ_ξ is strictly Σ_P-dominant, which explains in part why one takes $-\xi_{|\mathfrak{a}_P}$ instead of $\xi_{|\mathfrak{a}_P}$ for λ_ξ). Moreover, we show that its related asymptotic coefficient is tempered on $M_P/M_P \cap H$. Then, according to the first step (when $\mathscr{T}(\Phi) = \{0\}$), it is a derivative of Eisenstein integrals on $M_P/M_P \cap H$ along imaginary parameters.

Let λ be an element of $(\mathfrak{a}_P)^*_{\mathbb{C}}$ such that $\operatorname{Re}\lambda - \rho_P$ is strictly Σ_P-dominant. A Langlands' classical lemma (see [22, Lemma 3.12], or [5, Chap. 4, Lemma 4.4]) relates the asymptotic behaviour of matrix coefficients to the action of certain intertwining operators on induced representations. We generalize this result in the sense that we look at asymptotic behaviours of some "generalized" matrix coefficients of generalized principal series in certain directions to infinity (see Lemma 15). Since Eisenstein integrals are τ-spherical versions of such matrix coefficients, we obtain, from the generalization described above, an Eisenstein integral on G/H, given by an integral, such that its asymptotic coefficient along $\bar{P}$ related to $-\lambda$, is equal on $M_P/M_P \cap H$ to an Eisenstein integral on $M_P/M_P \cap H$, also given by an integral (see Proposition 6.0.1).

We then generalize some holomorphic properties of asymptotic coefficients associated to a certain class of holomorphic families of eigenfunctions under the action of $\mathbb{D}(G/H)$ given by van den Ban in [1, Sections 11, 12] (see also [3]), to some holomorphic families of $\mathbb{D}(G/H)$-finite functions (cf. Section 7). These holomorphic properties allow us to extend by holomorphic continuation the asymptotic properties obtained in Section 6 and recalled above to a set where the Eisenstein integrals are not necessarily defined by integrals and which also contains λ_ξ (here, we use the fact that λ_ξ is strictly Σ_P-dominant). Moreover, one gives a link between derivatives along the parameter of some asymptotic coefficients related to these families and asymptotic coefficients of derivatives (cf. Lemma 27). This link allows us to deduce, from the asymptotic properties obtained for Eisenstein integrals, some asymptotic properties for their derivatives along the parameter.

Then, according to the mentioned properties satisfied by λ_ξ and by its related asymptotic coefficient in the asymptotic expansion of Φ along $\bar{P}$, we obtain, by using the construction given by Proposition 8.0.1, the existence of an element F_{λ_ξ} of $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$ annihilated by a nontrivial power of I such that its asymptotic coefficient along $\bar{P}$ related to $-\lambda_\xi$ is equal to the one of Φ (cf. proof of Proposition 9.1.1). Moreover, we show in (ii) (resp. (iii)) of Proposition 8.0.1 that all the real parts of the asymptotic exponents of F_{λ_ξ} along $\bar{P}_\emptyset$ (resp. $\bar{P}$) are, for an order depending on $P_\emptyset$ (resp. P), less than or equal to η (resp. with equality only for the asymptotic exponent $-\lambda_\xi$). We then achieve that ξ is the only asymptotic exponent of Φ along $\bar{P}_\emptyset$ such that $(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset}$ is equal to η, $\xi_{|\mathfrak{a}_P} = -\lambda_\xi$ and also $-\lambda_\xi$ is an asymptotic exponent of F_{λ_ξ} along $\bar{P}$. Summing the F_{λ_ξ} on such ξ with $(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$, we thus construct an element F_η of $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$ annihilated by a nontrivial power of I. It results from some properties of the projection on the closed convex cone $\overline{\mathscr{C}_{\bar{P}_\emptyset}}$ and the mentioned properties of the functions F_{λ_ξ} that each asymptotic exponent ξ of F_η along $\bar{P}_\emptyset$ such that $\|(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset}\| = \|\eta\|$ is not an asymptotic exponent of $\Phi - F_\eta$ along $\bar{P}_\emptyset$ (cf. Eq. (172)). This implies that, if $\mathscr{T}(\Phi)$ is not reduced to η, then $\mathscr{T}(\Phi - F_\eta)$ is contained in $\mathscr{T}(\Phi)\backslash\{\eta\}$.

One can easily check that the required properties for the desired F hold for $F = F_\eta$. This gives the induction step and hence achieves the proof of the main Theorem.

2. NOTATIONS

Si E est un espace vectoriel, on note Id_E l'application identique de E, E^* son dual. S'il est réel, $E_\mathbb{C}$ désigne son complexifié et $S(E)$ l'algèbre symétrique de $E_\mathbb{C}$. Alors $S(E)$ (resp. $S(E^*)$) consiste en les fonctions polynômiales sur $E_\mathbb{C}^*$ (resp. $E_\mathbb{C}$). Le symbole $'$ indiquera le dual topologique d'un espace vectoriel topologique, et le symbole ^{t} indiquera l'application transposée d'une application linéaire continue. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On considère dans la suite la restriction $\lambda_{|F}$ à F de $\lambda \in E^*$ ou $\lambda \in E_\mathbb{C}^*$ comme un élément de $F_\mathbb{C}^*$.

Si S est un groupe de Lie réel, S^0 désigne sa composante neutre, e_S son élément neutre, $Z(S)$ son centre, $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{z}(\mathfrak{s})$ le centre de $\mathfrak{s}$, $U(\mathfrak{s})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{s}_\mathbb{C}$, $Z(\mathfrak{s})$ le centre de $U(\mathfrak{s})$, $\hat{S}$ son dual unitaire.

Soient G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra (cf. e.g., [18, (2.1)]), σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, H un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ, K le sous-groupe des points fixes de θ. Soit $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace propre de la différentielle de θ (resp. σ), notée encore de même, pour la valeur propre -1. Si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, on note L_P son sous-groupe de Levi stable par σ et θ, i.e., $L_P = P \cap \theta(P)$, dite composante de Levi, N_P son radical unipotent et $P = M_P A_P N_P$ sa σ-décomposition de Langlands. En particulier, on note $G = M_G A_G$ la σ-décomposition de Langlands de G. Ici A_G est le sous-groupe de la composante déployée de G formé des éléments a de celle-ci tels que $\sigma(a) = a^{-1}$. On l'appelle composante σ-déployée de G. Clairement, si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, $(L_P, \sigma_{|L_P}, \theta_{|L_P}, H \cap L_P)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H), et de même en remplaçant L_P par M_P. Toutes les notations introduites pour (G, σ, θ, H) sont étendues aux quadruplets vérifiant les mêmes hypothèses.

On dispose d'une application H_G de G/H dans $\mathfrak{a}_G$ qui, à gH, associe $\log a \in \mathfrak{a}_G$ où $g = ma$ avec $m \in M_G$, $a \in A_G$. Il est à noter que H est contenu dans M_G. De plus, on a:

$$\begin{gathered}(M_G/H) \times \mathfrak{a}_G \text{ est difféomorphe à } G/H \text{ par l'application} \\ (x, X) \mapsto (\exp X)x.\end{gathered} \tag{1}$$

On se fixe dans toute la suite un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}_\emptyset$ de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$. On note $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{g}$ et $L_\emptyset$ le centralisateur dans

G de $\mathfrak{a}_\emptyset$. C'est la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal. Il admet pour σ-décomposition de Langlands $L_\emptyset = M_\emptyset A_\emptyset$ où $A_\emptyset = \exp \mathfrak{a}_\emptyset$. On a $G = KL_\emptyset H$.

Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G contenant $L_\emptyset$. Alors $L_\emptyset$ est contenu dans L_P et A_P est contenu dans $A_\emptyset$. On note Σ_P l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$ et $\mathfrak{a}_P^+ := \{X \in \mathfrak{a}_P | \, \alpha(X) > 0, \, \alpha \in \Sigma_P\}$.

On appelle σ-sous-groupe de Levi de G, toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $L_\emptyset$. On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des σ-sous-groupes de Levi de G. Si L est un σ-sous-groupe de Levi de G, on note $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands et $\mathscr{P}(L)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G dont la composante de Levi est égale à L. Si $L = L_\emptyset$, on notera $\mathscr{P}$ au lieu de $\mathscr{P}(L_\emptyset)$.

On note $W_\emptyset$ le quotient du normalisateur $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans K par son centralisateur. Soit $W_\emptyset^H$ (resp. $W_\emptyset^M$) l'ensemble des éléments de $W_\emptyset$ admettant un représentant dans l'intersection de H (resp. M) avec $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On fixe dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ un ensemble $\mathscr{W}_M$ de représentants des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-doubles classes, contenant e_G. C'est, pour tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable Q de G de sous-groupe de Levi L, un ensemble de représentants des (H, Q)-doubles classes ouvertes de G.

On se fixe dans toute la suite de l'article un ensemble de racines positives, $\Sigma_{\sigma\theta}$, du système de racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$, formée des points fixes de $\sigma\theta$. On note $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ (*st* pour standard) le sous-ensemble de $\mathscr{P}$ formé des $P \in \mathscr{P}$ tels que l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de P contienne $\Sigma_{\sigma\theta}$. On note, pour $L \in \mathscr{L}$, $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}(L)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{P}(L)$ contenant un élément de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G contenant un élément de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ dont la composante de Levi est un σ-sous-groupe de Levi. Tous les ensembles ci-dessus sont finis, mais contrairement au cas des groupes, $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ n'est pas nécessairement réduit à un élément.

On dit que deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G, P et Q, sont σ-associés si $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}_Q$ sont conjugués par un élément de K. On choisit un ensemble $\mathbb{F}$ de représentants des classes de σ-association de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables, contenu dans $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}$. Un tel choix est possible (cf. [10, Lemme 8]).

On se fixe une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}$, Ad G-invariante telle que la forme quadratique sur $\mathfrak{g}$,

$$X \mapsto \|X\|^2 := -B(X, \theta X), \tag{2}$$

soit définie positive. On suppose en outre que B est invariante par σ et θ, coïncide avec la forme de Killing sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et que le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est orthogonal à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Si $P \in \mathscr{P}(L)$, on notera ρ_P l'élément de $\mathfrak{a}_\emptyset^*$, demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$, comptées avec leurs multiplicités. La forme B

détermine un produit scalaire sur $\mathfrak{a}$, ce qui détermine une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}$. On munira $i\mathfrak{a}^*$ de la mesure duale. Précisons cette notion. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et dX une mesure de Haar sur E. Pour f élément de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(E)$, on définit sa transformée de Fourier relativement à dX, $\hat{f} \in \mathscr{S}(iE^*)$ par $\hat{f}(\lambda) = \int_E f(X) e^{-\langle \lambda, X \rangle}\, dX$, $\lambda \in iE^*$. On identifie $i(iE^*)^*$ à E en posant $\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle = -\langle \lambda, X \rangle$, pour $X \in E$, $\lambda \in iE^*$. La mesure duale de dX est la mesure de Haar sur iE^*, $d\lambda$, telle que, notant encore $\hat{}$ la transformée de Fourier relativement à $d\lambda$, de $\mathscr{S}(iE^*)$ dans $\mathscr{S}(E)$, on ait $(\hat{f})\hat{} = f$ pour $f \in \mathscr{S}(E)$. La transformée de Fourier s'étend naturellement aux distributions.

On note $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H invariants par les translations à gauche par les éléments de G. On identifiera $\mathbb{D}(G/H)$ à l'algèbre $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/U(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, agissant par représentation régulière droite sur $C^\infty(G/H)$ (cf. [1, Lemme 2.1]). Pour $P \in \mathscr{P}(L)$, on définit comme dans [1, (20)] un homomorphisme $'\mu_P$ de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ par:

$$D - {}'\mu_P(D) \in \bar{\mathfrak{n}}_P U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \;\; (D \in \mathbb{D}(G/H)). \tag{3}$$

On observera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer un élément de $\mathbb{D}(G/H)$ (resp. $\mathbb{D}(L/L \cap H)$) avec un représentant dans $U(\mathfrak{g})^H$ (resp. $U(\mathfrak{l})^{L\cap H}$). On remarque que $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{D}(M/M \cap H) \otimes S(\mathfrak{a})$ (cf. [1, Éq. (19)]) ce qui permet de regarder $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ comme l'algèbre des fonctions polynômiales sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathbb{D}(M/M \cap H)$. On définit alors un morphisme d'algèbres de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathbb{D}(L/L \cap H)$, μ_P, caractérisé par:

$$\mu_P(D)(\lambda) = {}'\mu_P(D)(\lambda + \rho_P) \;\; (\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}). \tag{4}$$

On note $\mathfrak{s}^d = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$ et on fixe un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s}^d$, $\mathfrak{a}^d$, contenant $\mathfrak{a}_\emptyset$. On note $W(\mathfrak{a}^d)$ le groupe formé des restrictions à $\mathfrak{a}^d$ des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ préservant $\mathfrak{a}^d$ et $W^M(\mathfrak{a}^d) := \{w \in W(\mathfrak{a}^d) | w_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}}\}$. On dispose de l'isomorphisme de Harish-Chandra, $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$, de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{a}^d)}$. On note $\gamma_{\mathfrak{a}^d}^{L/L\cap H}$ l'isomorphisme de Harish-Chandra pour $L/L \cap H$ de $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ sur l'algèbre $S(\mathfrak{a}^d)^{W^M(\mathfrak{a}^d)}$. On a (cf. [1, Éq. (21)]):

$$\gamma_{\mathfrak{a}^d}^{L/L\cap H} \circ \mu_P = \gamma_{\mathfrak{a}^d}. \tag{5}$$

Si f est une fonction de classe C^∞ sur G/H et Λ un élément de $(\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$, on dit que f est un vecteur propre (resp. propre généralisé d'ordre n) sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre Λ si et seulement si:

$$\begin{gathered} (D - \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(\Lambda))f = 0 \\ (\text{resp. } (D - \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(\Lambda))^n f = 0) \;\; (D \in \mathbb{D}(G/H)). \end{gathered} \tag{6}$$

On se fixe désormais une représentation unitaire de dimension finie de K, (τ, V_τ).

3. ENONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

3.1. *Dérivées d'intégrales d'Eisenstein*

On note $C^\infty(G/H,\tau)$ l'espace vectoriel des fonctions Φ de classe C^∞ sur G/H à valeurs dans V_τ, τ-sphériques. On note $\mathscr{A}(G/H,\tau)$ le sous-espace de $C^\infty(G/H,\tau)$ formé des éléments $\mathbb{D}(G/H)$-finis. Pour un idéal I de codimension finie dans $\mathbb{D}(G/H)$, on désigne par $\mathscr{A}(G/H,\tau)_{(I)}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}(G/H,\tau)$ annulés par une puissance non nulle de I.

Soit $L \in \mathscr{L}$ avec $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands. On note τ_M (resp. τ_L) la restriction de τ à $K \cap M$ (resp. $K \cap L$) noté aussi K_M (resp. K_L). On définit comme dans [10, (2.9)]:

$$\mathscr{A}_2(M,\tau)_{\mathscr{W}_M} = \oplus_{w\in\mathscr{W}_M}\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M), \tag{7}$$

où $\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞, τ_M-sphériques sur $M/M \cap w^{-1}Hw$ qui sont de carré intégrable et $\mathbb{D}(M/M \cap w^{-1}Hw)$-finies. On rappelle que $\mathscr{W}_M$ a été défini a la Section 2. Ces espaces sont de dimension finie (cf. [14, Proposition 1]).

On rappelle maintenant la définition des intégrales d'Eisenstein (cf. [10, Section 3]). Soient $P \in \mathscr{P}(L)$ et λ un élément de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda - \rho_P$ soit strictement Σ_P-dominant, où ρ_P est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$. A tout $\psi = (\psi_w)_{w\in\mathscr{W}_M} \in \mathscr{A}_2(M,\tau)_{\mathscr{W}_M}$, on associe la fonction $\Psi_\lambda^{\mathscr{W}_M}$, définie, pour $x \in G/H$, par:

$$\Psi_\lambda^{\mathscr{W}_M}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{w\in\mathscr{W}_M} Pw^{-1}H, \\ a^{-\lambda+\rho_P}\psi_w(m) & \text{si } x = namw^{-1}H, \text{ avec} \\ & n \in N_P, a \in A, m \in M, w \in \mathscr{W}_M. \end{cases}$$

L'intégrale d'Eisenstein $E(P,\psi,\lambda)_{\mathscr{W}_M}$ est définie, pour $x \in G/H$, par:

$$E(P,\psi,\lambda)_{\mathscr{W}_M}(x) = \int_K \tau(k^{-1})\Psi_\lambda^{\mathscr{W}_M}(kx)\, dk. \tag{8}$$

Cette intégrale converge et définit un élément de $\mathscr{A}(G/H,\tau)$.

DÉFINITION 1. On utilisera la définition d'une fonction holomorphe ou analytique complexe (resp. C^∞) définie sur un ouvert U d'un espace vectoriel complexe de dimension finie à valeurs dans un espace localement convexe séparé E donnée dans [6, Section 3.2.1]. Rappelons que si E est quasi-complet, f est holomorphe (resp. C^∞) si et seulement si f est faiblement holomorphe (resp. faiblement C^∞), c'est à dire, pour toute forme linéaire continue u sur E, $u \circ f$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est holomorphe (resp. C^∞) (cf. [6, Section 3.3.1]).

On dira qu'une fonction f définie sur un ouvert dense U' d'un ouvert U d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, à valeurs dans E, est méromorphe sur U, si et seulement si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage V de x_0 dans U et une fonction g_{x_0} holomorphe sur V à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $g_{x_0}f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur V à valeurs dans E (cf. [9, Section 2.2]).

Si E est quasi-complet, on dira simplement que f est holomorphe (resp. méromorphe) sur U si et seulement si f est holomorphe (resp. méromorphe) sur U à valeurs dans E.

Avec ces définitions, $E(P, \psi, \lambda)_{\mathscr{W}_M}$ admet un prolongement méromorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (cf. [10, Section 3]).

Lemme 1. *Si $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W}'$ sont deux ensembles de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-doubles classes de $W_\emptyset$. Pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}$, il existe $\psi' \in \mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}'}$ tel qu'on ait l'égalité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:*

$$E(P, \psi', \lambda)_{\mathscr{W}'} = E(P, \psi, \lambda)_{\mathscr{W}}.$$

Preuve. Soit $\psi = (\psi_w)_{w \in \mathscr{W}} \in \mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}$. Pour tout $w' \in \mathscr{W}'$, il existe un unique $w \in \mathscr{W}$ tel que $w' \in W_\emptyset^H w W_\emptyset^M$, donc $w' = h_{w'} w m_{w'}$, où $h_{w'} \in H$, et $m_{w'} \in K_M$ normalisent $\mathfrak{a}_\emptyset$. On pose, pour tout $w' \in \mathscr{W}'$, $\psi'_{w'} = R_{(m_{w'})^{-1}} \psi_w$. On vérifie aisément que $\psi' = (\psi'_{w'})_{w' \in \mathscr{W}'}$ est un élément de $\mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}'}$ et que $E(P, \psi', \lambda)_{\mathscr{W}'} = E(P, \psi, \lambda)_{\mathscr{W}}$. ∎

Si aucune confusion n'est possible, on omettra, dans les notations précédentes, l'indice $\mathscr{W}_M$.

Soit $\Pi(\Sigma_P)$ l'ensemble des fonctions polynômiales non nulles qui sont produits de fonctions affines de la forme $\lambda \mapsto (\lambda, \alpha) - r$ $(\alpha \in \Sigma_P,\ r \in \mathbb{C})$ et pour $R \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathfrak{a}^*(P, R) := \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \operatorname{Re}(\lambda, \alpha) > R, \alpha \in \Sigma_P\}.$$

Lemme 2. *Soit $R \in \mathbb{R}$. Il existe un polynôme $b_R \in \Pi(\Sigma_P)$ tel que, pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$:*

(i) *$\lambda \mapsto b_R(\lambda) E(P, \psi, \lambda)$ soit holomorphe sur $\mathfrak{a}^*(P, R)$ à valeurs dans C^∞ $(G/H, \tau)$,*

(ii) *il existe* $r > 0$ *tel que, pour tout* $D \in U(\mathfrak{g})$, *il existe* $C > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *vérifiant*:

$$\|(L_D b_R(\lambda)E(P,\psi,\lambda))(k\exp(X)H)\| \leqslant C(1+\|\lambda\|)^n e^{(r+\|\mathrm{Re}\,\lambda\|)\|X\|}\|\psi\|,$$

pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*(P,R)$, $k \in K$ *et* $X \in \mathfrak{a}_\emptyset$ *et*

(iii) $\lambda \mapsto b_R(\lambda)E(P,\psi,\lambda)$ *est élément de* $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}(G,L,\tau)$ (*cf.* [14, *fin de la* Section 7], *pour la définition de cet espace*).

Preuve. On se restreint, grâce à la décomposition (2.2) de [10], au cas où $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)^\delta$, où δ est une représentation unitaire irréductible de M, avec $\mathscr{A}_2(M,\tau)^\delta$ désignant l'espace défini dans [10, (2.10)]. Alors (i) et (ii) résultent de (2.13) et (3.4) de loc.cit. joint à [13, Proposition 2]. Pour (iii), on se réfère à [10, Proposition 1]. ∎

DÉFINITION 2. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. On dit qu'un polynôme p sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ est (P,λ)-régularisant (ou λ-régularisant s'il n'y a pas d'ambiguité) si p est un élément non nul de $S(\mathfrak{a})$, produit de formes affines sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, tel qu'il existe un voisinage $V(\lambda)$ de λ dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ pour lequel $p(\nu)E(P,\psi,\nu)$, $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, soit holomorphe en $\nu \in V(\lambda)$.

Les polynômes (P,λ)-régularisants minimaux (pour le degré) sont dits (P,λ)-normalisants (ou plus simplement, λ-normalisants).

LEMME 3. *Soient* $P \in \mathscr{P}(L)$ *et* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$.

(i) *Il existe un polynôme* (P,λ)*-régularisant.*

(ii) *Tout polynôme* (P,λ)*-normalisant s'écrit comme produit de formes affines de la forme* $\nu \mapsto (\nu,\alpha) - r$ $(\alpha \in \Sigma_P,\ r \in \mathbb{C})$, *i.e., élément de* $\Pi(\Sigma_P)$, *s'annulant en* λ.

(iii) *Si p est* (P,λ)*-normalisant, les polynômes* (P,λ)*-régularisants en sont ses multiples, par des produits de formes affines sur* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. *En particulier, on a unicité de p à une multiplication par une constante près.*

Preuve. On choisit $R \in \mathbb{R}$ tel que $\mathfrak{a}^*(P,R)$ contienne λ. Alors (i) résulte du Lemme 2(i), ainsi que l'existence d'un polynôme $p \in \Pi(\Sigma_P)$, (P,λ)-normalisant. Notons $p = \prod l_i^{n_i}$ avec l_i formes affines du type $\nu \mapsto (\nu,\alpha_i) - r_i$ $(\alpha_i \in \Sigma_P,\ r_i \in \mathbb{C})$ non proportionnelles deux à deux, et $n_i \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe i_0 tel que $l_{i_0}(\lambda) \neq 0$. Il existe alors un voisinage $V(\lambda)$ de λ dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que, sur celui-ci, $\nu \mapsto (l_{i_0}(\nu))^{-1}$ et $\nu \mapsto p(\nu)E(P,\psi,\nu)$ $(\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau))$ soient holomorphes. Si on pose $p^{i_0} = \prod_{i \neq i_0} l_i^{n_i}$, on a alors $\nu \mapsto p^{i_0}(\nu)E(P,\psi,\nu)$ holomorphe sur $V(\lambda)$ pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, ce qui implique que p^{i_0} est λ-régularisant. Comme le degré de p^{i_0} est strictement inférieur à celui de p, ceci contredit la minimalité du degré de p dans l'ensemble des polynômes λ-régularisants. On a donc, pour tout i, $l_i(\lambda) = 0$.

Pour montrer (iii), on utilise le fait simple suivant:

$$\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ est une fonction holomorphe sur un voisinage de } 0 \\ \text{dans } \mathbb{C}^n, \text{ les conditions suivantes sont équivalentes :} \\ \text{(a) } z_1^{-n} f \text{ admet un prolongement holomorphe en } 0 \\ \text{(b) } f, \frac{\partial}{\partial z_1} f, \ldots, \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_1^{n-1}} f \text{ s'annulent sur un voisinage de } 0 \\ \quad \text{dans l'hyperplan d'équation } z_1 = 0. \end{array} \tag{9}$$

On a (a) entraine (b) car en notant g le prolongement holomorphe de $z_1^{-n}f$, on a $f = z_1^n g$. Si (b) est vrai, le développement de Taylor de f en 0, écrit selon les puissances croissantes de z_1, montre qu'il n'y a que des puissances de z_1 strictement plus grandes que n, d'où le résultat.

Soit p' un polynôme λ-régularisant et supposons qu'il existe i tel que $l_i^{n_i}$ ne divise pas p'. On pose $p_i = l_i^{-n_i} p$. La minimalité du degré de p dans l'ensemble des polynômes λ-régularisants implique que p_i n'est pas λ-régularisant. Par ailleurs, l'identité de fonctions holomorphes au voisinage de λ:

$$p(v)p'(v)E(P, \psi, v) = p'(v)p(v)E(P, \psi, v) \ (\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau))$$

implique que:

$$\begin{array}{l} (l_i(v))^{-n_i} p'(v)p(v)E(P, \psi, v) \text{ holomorphe,} \\ \text{pour tout } \psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau), \text{ sur un voisinage de } \lambda. \end{array} \tag{10}$$

Soit n le plus grand entier tel que $(l_i(v))^{-n} p'(v)$ soit holomorphe au voisinage de λ. Alors $n < n_i$. On voit, grâce à la traduction de (10) à l'aide de (9), que $(l_i(v))^{n-n_i} p(v)E(P, \psi, v)$ est holomorphe au voisinage de λ pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$. Tenant compte du fait que $\mathscr{A}_2(M, \tau)$ est de dimension finie, cela implique que $l_i^{n-n_i} p$ est λ-régularisant. Ce qui contredit la minimalité du degré de p dans l'ensemble des polynômes λ-régularisants. Donc p' est divisible par $l_i^{n_i}$ pour tout i, donc est multiple de p. L'assertion sur l'unicité des polynômes λ-normalisants est immédiate. ∎

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Si $\lambda \in E_{\mathbb{C}}^*$, soit $\partial(\lambda)$ l'opérateur différentiel sur $E_{\mathbb{C}}^*$ à coefficients complexes constants donné par:

$$(\partial(\lambda) f)(v) = \frac{d}{dt} (f(v + t\lambda))_{|t=0} \ (f \in C^\infty(E_{\mathbb{C}}^*)).$$

L'application $\lambda \mapsto \partial(\lambda)$ s'étend en un isomorphisme de $S(E^*)$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels sur $E_{\mathbb{C}}^*$ à coefficients complexes constants.

Le résultat technique énoncé dans le lemme suivant joue un rôle important dans la suite.

Lemme 4. *Soit* $\lambda_0 \in E^*_{\mathbb{C}}$. *Pour tous* p, p' *éléments non nuls de* $S(E)$, *produits de formes affines sur* $E^*_{\mathbb{C}}$, *et tout élément* u *de* $S(E^*)$, *il existe* $u' \in S(E^*)$ *tel que, pour toute fonction* $f \in C^\infty(E^*_{\mathbb{C}})$,

$$\partial(u')(p'(v)f(v))_{|v=\lambda_0} = \partial(u)(p(v)f(v))_{|v=\lambda_0}.$$

Preuve. Soit $p \in S(E)$, non nul, produit de formes affines sur $E^*_{\mathbb{C}}$. Montrer l'assertion du lemme revient à montrer que l'espace vectoriel F_p des distributions sur $E^*_{\mathbb{C}}$ engendré par $\{p\partial(u)\delta_{\lambda_0} \,|\, u \in S(E^*)\}$, où δ_{λ_0} désigne la masse de Dirac en λ_0, est indépendant de p. Par translation par λ_0, on se ramène au cas où $\lambda_0 = 0$, ce que l'on fait dans la suite. Tout d'abord, on a:

$$F_p \subseteq F_1, \tag{11}$$

car F_1 est l'espace des distributions à support 0. On écrit $p = qp_0$, avec q produit de formes affines non nulles sur $E^*_{\mathbb{C}}$ ne s'annulant pas en 0, et p_0 produit de formes linéaires sur $E^*_{\mathbb{C}}$, donc d'éléments non nuls de $E_{\mathbb{C}}$, $p_0 = \Pi_{i=1}^{d_0} X_i$ ($X_i \in E_{\mathbb{C}} - \{0\}$). On note $\mathscr{H}_i = \{v \in E^*_{\mathbb{C}} \,|\, v(X_i) = 0\}$. Soit $\lambda \in E^*_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup \mathscr{H}_i$. Alors

$$\begin{aligned} (\partial(\lambda)^{d_0} p_0)(0) &= d_0! \prod \lambda(X_i) \neq 0, \\ (\partial(\lambda)^k p_0)(0) &= 0 \quad si\ k \neq d_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Par application de la formule de Leibnitz à $(\partial(\lambda)^{n+d_0} p_0 f)(0)$, f un élément de $C^\infty(E^*_{\mathbb{C}})$, on trouve grâce à (12):

$$(\partial(\lambda)^n f)(0) = (C_{n+d_0}^{d_0} (\partial(\lambda)^{d_0} p_0)(0))^{-1} (\partial(\lambda)^{n+d_0} p_0 f)(0) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{13}$$

Par densité, on voit que les puissances $\partial(\lambda)^n$ de $\partial(\lambda)$ ($\lambda \in E^*_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup \mathscr{H}_i$, $n \in \mathbb{N}$) engendrent l'algèbre des opérateurs différentiels sur $E^*_{\mathbb{C}}$ à coefficients complexes constants. Il résulte donc de (13) que $F_1 \subseteq F_{p_0}$ puis, en multipliant f par q, que:

$$F_q \subseteq F_p. \tag{14}$$

Montrons maintenant que:

$$F_1 \subseteq F_p. \tag{15}$$

Pour cela, on montre par récurrence sur n que, pour $\lambda \in E^*_{\mathbb{C}}$,

$$q\partial(\lambda)^n f = \partial(\lambda)^n (qf) + \sum_{i<n} \partial(\lambda)^i (q_i f) \qquad (f \in C^\infty(E^*_{\mathbb{C}})), \tag{16}$$

où les q_i sont des éléments de $S(E)$, ce qui résulte immédiatement de l'égalité:

$$q\partial(\lambda)f = \partial(\lambda)(qf) - (\partial(\lambda)q)f.$$

Il est à noter que (16) est vraie pour tout $q \in S(E)$. En transposant l'égalité (16) pour l'appliquer aux distributions, et tenant compte du fait que $q(0) \neq 0$, une récurrence immédiate montre que $F_1 \subseteq F_q$. Tenant compte de (11) et (14), on a alors l'égalité de F_1 et F_p comme désiré. ∎

LEMME 5. *On note $\mathfrak{a}_M^d$ l'orthogonal dans $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{a}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$ et Ω un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Soit F une fonction holomorphe sur Ω à valeurs dans $C^\infty(G/H, \tau)$ telle que, pour $\lambda \in \Omega$:*

$$(D - \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D, \Lambda - \lambda))^n F(\lambda) = 0 \qquad (D \in \mathbb{D}(G/H)).$$

Alors, pour tout $u \in S(\mathfrak{a}^*)$ et $\lambda \in \Omega$, $\partial(u)(F(\nu))_{|\nu=\lambda}$ vérifie:

$$(D - \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D, \Lambda - \lambda))^{n+d^0u}\partial(u)(F(\nu))_{|\nu=\lambda} = 0,$$

pour tout $D \in \mathbb{D}(G/H)$, où d^0u désigne le degré de u.

Preuve. Soit $D \in \mathbb{D}(G/H)$ et p le polynôme sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $\lambda \mapsto \gamma_{a^d}(D, \Lambda - \lambda)$. D'après (16), on a, pour tout $u \in S(\mathfrak{a}^*)$, l'égalité d'opérateurs différentiels sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$p\partial(u) = \partial(u)p + \sum \partial(u_i)q_i,$$

où les u_i sont des éléments de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ de degré strictement inférieur à celui de u et q_i des éléments de $S(\mathfrak{a})$. Comme D commute à tout opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, tous deux regardés comme opérateurs différentiels sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times G/H$, on en déduit que, pour tout opérateur différentiel U sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$(D - p)U = U(D - p) - U', \tag{17}$$

où U' est un opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ d'ordre strictement inférieur à l'ordre de U. Par récurrence sur n, on en déduit que, pour U d'ordre 1, il existe U_n, un opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ d'ordre 0, tel que:

$$(D - p)^n U = U(D - p)^n + U_n(D - p)^{n-1}. \tag{18}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout opérateur différentiel U sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ d'ordre m, il existe un opérateur différentiel T sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times G/H$ tel que:

$$(D - p)^{m+n} U = T(D - p)^n. \tag{19}$$

Si l'ordre de U est nul, l'assertion est claire. Si U est d'ordre 1, (19) résulte de (18).

Alors (19) résulte enfin d'une récurrence faite sur l'ordre de U. Le lemme en résulte immédiatement. ∎

DÉFINITION 3. Soit $P \in \mathscr{P}(L)$. On note $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)_P$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(G/H,\tau)$ engendré par les éléments de la forme

$$\partial(u)(p(v)E(P,\psi,v))_{|v=\lambda},$$

avec $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, p un polynôme (P,λ)-régularisant (cf. Définition 1), $u \in S(\mathfrak{a}^*)$ et $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$.

Compte tenu du Lemme 3, on remarque que l'espace ainsi défini ne dépend pas des choix des polynômes régularisants.

On rappelle que l'on a choisi un ensemble $\mathbb{F}$ de représentants des classes de σ-association de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables, contenu dans $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}$.

On définit

$$\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau) = \sum_{P\in\mathbb{F}} \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)_P.$$

Les éléments de cet espace seront appelés dérivées d'intégrales d'Eisenstein.

Remarque 1. Tout $P \in \mathscr{F}_{\mathrm{st}}$ est de la forme Q^w où $Q \in \mathbb{F}$ et $w \in \mathscr{W}_Q$ (cf. [14, Lemme 10(iii)]). Alors, il résulte de la comparaison des intégrales d'Eisenstein pour P et Q (cf. [10, (3.21)]) que $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$ contient $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)_P$ pour tout $P \in \mathscr{F}_{\mathrm{st}}$.

3.2. *Enoncé du Théorème principal*

PROPOSITION 3.2.1. *On a*

$$\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau) \subseteq \mathscr{A}(G/H,\tau).$$

Preuve. Cela résulte du fait qu'une intégrale d'Eisenstein est un élément de $\mathscr{A}(G/H,\tau)$, du Lemme 5 et de la Définition 3. ∎

On va maintenant énoncer le Théorème principal, les autres parties étant consacrées à sa démonstration.

THÉORÈME 3.1. *Soit* (τ, V_τ) *une représentation unitaire de dimension finie de* K. *On a l'égalité d'espaces vectoriels*:

$$\mathscr{A}(G/H,\tau) = \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau).$$

4. FILTRATION DANS L'ESPACE $\mathscr{A}(G/H,\tau)$

Soient P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G avec $P = MAN$ sa σ-décomposition de Langlands et Φ un élément de $\mathscr{A}(G/H,\tau)$.

D'après le Théorème 12.8 de [13], il existe un ensemble fini S_P d'éléments de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et, pour $g \in G$ et $\xi \in S_P - \mathbb{N}.\Sigma_P$, où $\mathbb{N}.\Sigma_P := \{\sum_{\alpha\in\Sigma_P} n_\alpha \alpha \mid n_\alpha \in \mathbb{N}\}$, des fonctions polynômiales $p_\xi(P|\Phi,g)$ sur $\mathfrak{a}$ à valeurs dans V_τ telles que:

$$\begin{gathered}\text{pour tout } X \in \mathfrak{a} \text{ strictement } \Sigma_P\text{-dominant, } \Phi(g\exp(tX)H)\\ \text{admette pour développement asymptotique au sens de [3, Section 3]}\\ \text{(voir aussi [25, Section 5]), le long de } P, \text{ quand } t \text{ tend vers} + \infty,\\ \textstyle\sum_{\xi\in S_P-\mathbb{N}.\Sigma_P} p_\xi(P|\Phi,g,tX)e^{t(\xi-\rho_P)(X)}.\end{gathered} \tag{20}$$

On convient que, pour $\xi \notin S_P - \mathbb{N}.\Sigma_P$, on a $p_\xi(P|\Phi,g) = 0$, pour tout $g \in G$.

On dit que $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est un exposant asymptotique de Φ le long de P si et seulement si $g \mapsto p_\xi(P|\Phi,g)$ n'est pas identiquement nul sur G.

On appelle exposant asymptotique directeur de Φ le long de P, tout exposant asymptotique de Φ le long de P maximal pour l'ordre $\preccurlyeq_P$ sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ défini par:

$$\xi \preccurlyeq_P \xi' \text{ si et seulement si } \xi' - \xi \in \mathbb{N}.\Sigma_P.$$

On note $e(P,\Phi)$ (resp. $e_l(P,\Phi)$) l'ensemble des exposants asymptotiques (resp. directeurs, l'indice l pour *leading*) de Φ le long de P.

Soit $P_\emptyset \in \mathscr{P}$. On note $\mathscr{C}_{P_\emptyset}$ le cône ouvert de $\mathfrak{a}_\emptyset^*$ défini par:

$$\mathscr{C}_{P_\emptyset} = \{\lambda \in \mathfrak{a}_\emptyset^* | (\lambda,\alpha) > 0,\ \alpha \in \Sigma_{P_\emptyset}\}.$$

A tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$, on associe $\lambda_{P_\emptyset}$ sa projection sur le cône convexe fermé $\overline{\mathscr{C}_{P_\emptyset}}$. C'est l'unique élément de $\overline{\mathscr{C}_{P_\emptyset}}$ de distance minimale avec λ. Les propriétés énoncées ci-dessous sont une conséquence de cette définition. On se réfère à la discussion de [7], où plus de détails sont donnés. On a, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$,

$$\begin{aligned}&\lambda - \lambda_{P_\emptyset} \in \mathscr{C}_{P_\emptyset}^0 := \{\nu \in \mathfrak{a}_\emptyset^* | (\nu,\nu') \leqslant 0,\ \nu' \in \mathscr{C}_{P_\emptyset}\}\\ \text{et}\quad &(\lambda - \lambda_{P_\emptyset}, \lambda_{P_\emptyset}) = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Pour un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable P de G de σ-décomposition de Langlands $P = MAN$, on note $\leqslant_P$ la relation d'ordre sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ défini par

$$\xi \leqslant_P \xi' \text{ si et seulement si } \xi' - \xi \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.\Sigma_P,$$

où $\mathbb{R}_{\geqslant 0}.\Sigma_P := \{\sum_{\alpha\in\Sigma_P} r_\alpha \alpha | r_\alpha \geqslant 0\}$.

La définition de $\mathscr{C}^0_{P_\emptyset}$ entraine que:

$$\text{pour tout } \xi,\ \xi' \in \mathfrak{a}^*_\emptyset,\ \xi \leqslant_{P_\emptyset} \xi' \text{ équivaut à } \xi - \xi' \in \mathscr{C}^0_{P_\emptyset}. \tag{22}$$

On va maintenant rappeler un point essentiel de la preuve du Théorème 3 de [12] (voir aussi corrections dans l'Appendice de [10]) qui nous sera utile pour la suite. Celui-ci dit que:

$$\begin{gathered} \xi \leqslant_{P_\emptyset} \xi' \text{ ou } (\xi' - \xi, \xi_{P_\emptyset}) \geqslant 0 \\ \text{implique } \|\xi_{P_\emptyset}\| \leqslant \|\xi'_{P_\emptyset}\| \ (\xi,\ \xi' \in \mathfrak{a}^*_\emptyset) \\ \text{avec égalité seulement si } \xi_{P_\emptyset} = \xi'_{P_\emptyset}. \end{gathered} \tag{23}$$

En effet, d'après (21), on a $(\xi' - \xi'_{P_\emptyset}, \xi'_{P_\emptyset}) = 0$ et ainsi:

$$\|\xi'\|^2 = \|\xi' - \xi'_{P_\emptyset}\|^2 + \|\xi'_{P_\emptyset}\|^2. \tag{24}$$

Grâce aux propriétés de la projection $\xi'_{P_\emptyset}$ de ξ' sur $\overline{\mathscr{C}_{P_\emptyset}}$, comme $\xi_{P_\emptyset} \in \overline{\mathscr{C}_{P_\emptyset}}$:

$$\|\xi' - \xi'_{P_\emptyset}\| \leqslant \|\xi' - \xi_{P_\emptyset}\|.$$

Compte tenu de (24), cela implique:

$$\|\xi'\|^2 - \|\xi' - \xi_{P_\emptyset}\|^2 \leqslant \|\xi'_{P_\emptyset}\|^2. \tag{25}$$

D'après (22), on a, compte tenu de nos hypothèses sur ξ et ξ', $(\xi' - \xi, \xi_{P_\emptyset}) \geqslant 0$. Joint à ce qui précède et au fait que la différence $\|\xi'\|^2 - \|\xi' - \xi_{P_\emptyset}\|^2$ soit égale à $\|\xi_{P_\emptyset}\|^2 + 2(\xi' - \xi, \xi_{P_\emptyset})$, on obtient:

$$\|\xi_{P_\emptyset}\|^2 \leqslant \|\xi'\|^2 - \|\xi' - \xi_{P_\emptyset}\|^2. \tag{26}$$

Il résulte alors de (25) que:

$$\|\xi_{P_\emptyset}\| \leqslant \|\xi'_{P_\emptyset}\|.$$

Lorsque $\|\xi_{P_\emptyset}\| = \|\xi'_{P_\emptyset}\|$, ce qui précède (cf. (25) et (26)) montre que $\|\xi'\|^2 - \|\xi' - \xi_{P_\emptyset}\|^2 = \|\xi_{P_\emptyset}\|^2$, ce qui, compte tenu de (24), implique:

$$\|\xi' - \xi'_{P_\emptyset}\| = \|\xi' - \xi_{P_\emptyset}\|.$$

D'après les propriétés de la projection sur un cône convexe fermé, cette égalité implique que $\xi'_{P_\emptyset} = \xi_{P_\emptyset}$. Ceci achève de prouver (23).

On fixe un idéal I de codimension finie dans $\mathbb{D}(G/H)$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_\emptyset \in \mathscr{P}$, $e(P_\emptyset, I^n)$ (resp. $e_I(P_\emptyset, I^n)$) l'ensemble des exposants asymptotiques (resp. directeurs) le long de $P_\emptyset$ des éléments de $\mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$

annulés par I^n. On pose, pour $P_\emptyset \in \mathscr{P}$,

$$e_l(P_\emptyset, (I)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} e_l(P_\emptyset, I^n).$$

LEMME 6. *Pour tout $P_\emptyset \in \mathscr{P}$, l'ensemble des exposants asymptotiques directeurs, $e_l(P_\emptyset, (I))$, le long de P des éléments de $\mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$ est fini.*

Preuve. Rappelons certaines propriétés des éléments de $e(P_\emptyset, I^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. D'après [8, Proposition 3, Éq. (18); 1, Lemme 2.2]:

$$\begin{aligned}&\text{pour tout idéal } J \text{ de codimension finie dans } \mathbb{D}(L_\emptyset/L_\emptyset \cap H),\\ &\text{l'idéal } J' \text{ de } \mathbb{D}(G/H), \text{engendré par } {}'\mu_{\bar{P}_\emptyset}(J) \text{ (cf. (3), pour la}\\ &\text{définition de } {}'\mu_{\bar{P}_\emptyset}), \text{est de codimension finie dans} \mathbb{D}(L_\emptyset/L_\emptyset \cap H).\end{aligned} \tag{27}$$

et

$$\begin{gathered}\text{pour tout } \Phi \in \mathscr{A}(G/H, \tau) \text{ annulé par } J \text{ et tout } \xi \in e_l(P_\emptyset, \Phi),\\ D' p_\xi(P_\emptyset | \Phi, .)_{|L_\emptyset/L_\emptyset \cap H} = 0, \text{ pour } D' \in J'.\end{gathered} \tag{28}$$

Rappelons maintenant un fait élémentaire. Soit $\mathscr{A} = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et $\mathscr{I}$ un idéal de codimension finie dans $\mathscr{A}$. En considérant une suite de Jordan-Hölder du $\mathscr{A}$-module $\mathscr{A}/\mathscr{I}$, on voit que celui-ci est annulé par un idéal de la forme $\mathscr{I}_1^{n_1} \ldots \mathscr{I}_p^{n_p}$ où $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*$ et les $\mathscr{I}_i$ sont des idéaux maximaux de $\mathscr{A}$. En d'autres termes, on vient de voir que:

$$\begin{aligned}&\text{tout idéal de codimension finie dans } \mathscr{A} \text{ contient}\\ &\text{un idéal de la forme } \mathscr{I}_1^{n_1} \ldots \mathscr{I}_p^{n_p}, \text{ où } n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*\\ &\text{et les } \mathscr{I}_i \text{ sont des idéaux maximaux de } \mathscr{A}.\end{aligned} \tag{29}$$

Nous allons appliquer ce résultat aux algèbres $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{a}^d)}$, $\mathbb{D}(L_\emptyset/L_\emptyset \cap H)$ et $\mathbb{D}(G/H)$. Soit I un idéal de codimension finie dans $\mathbb{D}(G/H)$. D'après (27) et (29), l'idéal I' de $\mathbb{D}(L_\emptyset/L_\emptyset \cap H)$ contient un idéal de la forme $(I'_{\nu_1})^{n_1} \ldots (I'_{\nu_p})^{n_p}$, où $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*$, $\nu_1, \ldots, \nu_p \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ et I'_{ν_i} est l'idéal de $\mathbb{D}(L_\emptyset/L_\emptyset \cap H)$ formé des éléments D tels que $(\gamma_{\mathfrak{a}^d}^{L_\emptyset/L_\emptyset \cap H}(D))(\nu_i) = 0$ (on rappelle que $\gamma_{\mathfrak{a}^d}^{L_\emptyset/L_\emptyset \cap H}$ désigne l'isomorphisme de Harish-Chandra pour l'espace symétrique réductif $L_\emptyset/L_\emptyset \cap H$).

Posons $\xi_i := \nu_{i\,|\mathfrak{a}_\emptyset}$ et notons I''_{ξ_i} l'idéal de $S(\mathfrak{a}_\emptyset)$ formé des éléments s'annulant en ξ_i. Alors I' contient $I'' := (I''_{\xi_1})^{n_1} \ldots (I''_{\xi_p})^{n_p}$.

Soit $\Phi \in \mathscr{A}(G/H, \tau)$, annulé par I^n, et $\xi \in e_l(P_\emptyset, \Phi)$. On a (cf., e.g., [8, Proposition 2(a)]):

$$\begin{aligned}&p_\xi(P_\emptyset | \Phi, g \exp X, Y) = p_\xi(P_\emptyset | \Phi, g, X + Y) e^{(\xi - \rho_{P_\emptyset})(X)},\\ &\text{pour tout } g \in G,\ X, Y \in \mathfrak{a}_\emptyset.\end{aligned} \tag{30}$$

Ceci, joint à ce qui précède, et à (28) montre que $X \mapsto p_\xi(P_\emptyset|\Phi, m\exp X)$ ($m \in L_\emptyset$) est le produit d'une fonction polynômiale par $e^{\xi - \rho_{P_\emptyset}}$, annulé par $(I'')^n$, car l'idéal de $\mathbb{D}(L_\emptyset/L_\emptyset \cap H)$ engendré par $'\mu_{P_\emptyset}(I^n)$ contient la puissance n-ième de celui engendré par $'\mu_{P_\emptyset}(I)$. Alors, cela force $\xi - \rho_{P_\emptyset}$ à appartenir à l'ensemble $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$. ∎

D'après le Lemme 6, l'ensemble $e_I(\bar{P}_\emptyset, (I))$ est donc fini.

Définition 4. On fixe une fonction T_I strictement croissante de

$$\{0\} \cup \bigcup_{P_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}} \{\|(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset}\| \mid \xi \in e_I(\bar{P}_\emptyset, (I))\}$$

à valeurs dans $\mathbb{N}$, valant 0 en 0.

On définit une filtration $\mathscr{F}_I$, indexée sur $\mathbb{N}$, de l'espace $\mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$, en notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}_{I,n}$ le sous-espace de $\mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$ des éléments Φ pour lesquels:

$$T_I(\|(\operatorname{Re}\xi)_{\bar{P}_\emptyset}\|) \leqslant n \qquad (P_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}},\ \xi \in e_I(\bar{P}_\emptyset, \Phi)).$$

On définit (cf. [1, Éq. (139)]) la fonction Θ_G sur G/H par:

$$\Theta_G(gH) = (\Xi_G(g\sigma(g)^{-1}))^{1/2} \qquad (g \in G), \tag{31}$$

où Ξ_G est la fonction de Harish-Chandra sur G. On définit également, pour $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$,

$$N_n(gH) = (1 + \|X\|)^n, \tag{32}$$

si $g = k(\exp X)h$ avec $k \in K$, $X \in \mathfrak{a}_\emptyset$, $h \in H$ et

$$N_n(\lambda) = (1 + \|\lambda\|)^n, \tag{33}$$

si $\lambda \in (\mathfrak{a}_\emptyset)^*_{\mathbb{C}}$.

Soit $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tau)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(G/H, \tau)$ formé des éléments Φ vérifiant:

$$\text{pour tout } D \in U(\mathfrak{g}), \text{ il existe } C > 0 \text{ et } m \in \mathbb{N} \text{ vérifiant :}$$
$$\|(L_D\Phi)(x)\| \leqslant CN_m(x)\Theta_G(x) \ (x \in G/H).$$

Les fonctions dans $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tau)$ sont appelées fonctions tempérées.

Lemme 7. *La filtration $\mathscr{F}_I$ de $\mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$ est de longueur finie et $\mathscr{F}_{I,0}$ est contenue dans l'intersection $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tau)_{(I)}$ de $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tau)$ avec $\mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$.*

Preuve. Comme la fonction T_I ne prend qu'un nombre fini de valeurs, $\mathscr{F}_I$ est bien de longueur finie.

Le reste de l'assertion résulte de la comparaison entre notre définition de la tempérance et celle de [13, Définition 2, p. 439] (cf. [14, début de la Section 5]). ∎

5. LE CAS TEMPÉRÉ

Dans cette section, on se propose de montrer que $\mathscr{A}_{\text{temp}}(G/H,\tau)$ est contenu dans $\mathscr{A}_{\text{Eis}}(G/H,\tau)$. On commence par établir certaines propriétés des dérivées d'intégrales d'Eisenstein.

5.1. *Dérivées d'intégrales d'Eisenstein et tempérance*

Soient G_1 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, et $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$.

On note $\mathfrak{c} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{s}$ et ${}^0G$ l'intersection des noyaux des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{R}_{>0}$. On a (cf. [23, Part II Section 1.3, Théorèmes 12, 13 et 14]) les décompositions suivantes:

$$\begin{aligned}
&G = {}^0G\exp(\mathfrak{c}) \text{ et } {}^0G \cap \exp(\mathfrak{c}) = \{e_G\},\\
&G = K\exp(\mathfrak{s}) \text{ (décomposition de Cartan)},\\
&G_1 = K_1\exp(\mathfrak{s}_1), \text{ où } K_1 = K \cap G_1,\ \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}\cap\mathfrak{g}_1 \text{ et}\\
&{}^0G = KG_1.
\end{aligned} \tag{34}$$

On munit G d'une fonction notée $\|.\|$ définie, comme dans [4, p. 643], par:

$$\begin{gathered}
\text{pour } X \in \mathfrak{s}_1,\ \|\exp X\| \text{ est égale à la norme de l'opérateur}\\
\mathrm{Ad}(\exp X) \text{ dans } \mathfrak{g} \text{ muni de la norme définie en (2), et}\\
\text{pour } (k, X, Y) \in K \times \mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{c},\\
\|k\exp(X)\exp(Y)\| = \|\exp X\|\exp\|Y\|.
\end{gathered} \tag{35}$$

En particulier (cf. [3, Lemme 2.1]), il existe $c_1,\ c_2 > 0$ tels que:

$$e^{c_1\|X\|} \leqslant \|k\exp X\| \leqslant e^{c_2\|X\|} \qquad (k \in K,\ X \in \mathfrak{s}).$$

Soit $r \in \mathbb{R}$. On introduit comme dans [1, Section 12], l'espace $C_r^\infty(G/H)$ des fonctions C^∞ sur G/H à valeurs complexes telles que, pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$,

$$s_{r,D}(f) := \sup_{x\in G/H} \|x\|^{-r}|L_D f(x)| < \infty. \tag{36}$$

Muni de la collection de semi-normes $s_{r,D}$, cet espace est un Fréchet.

Pour $L \in \mathscr{L}$ avec $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands, Ω un ouvert de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*_{\mathbb{C}}$, on définit alors $\mathscr{A}_r(G/H, \Lambda, \Omega)_n$ comme l'espace des fonctions holomorphes F de Ω à valeurs dans $C^\infty_r(G/H)$ (la définition de l'holomorphie d'une fonction à valeurs dans un Fréchet étant donnée dans la Définition 1) telles que, pour tout $\lambda \in \Omega$, la fonction $F(\lambda)$ est propre généralisée d'ordre $n+1$ pour la valeur propre $\Lambda - \lambda$.

On note $\mathscr{A}_*(G/H, \Lambda, \Omega)_n$ l'espace des fonctions F de $\Omega \times G/H$ à valeurs complexes telles que:

$$\text{pour tout } \lambda \in \Omega, \text{ il existe } r \in \mathbb{R} \text{ et un voisinage ouvert}$$
$$V(\lambda) \text{ de } \lambda \text{ dans } \Omega \text{ tels que } F \text{ restreinte à } V(\lambda) \times G/H$$
$$\text{soit un élément de } \mathscr{A}_r(G/H, \Lambda, V(\lambda))_n.$$

Soit $\mathscr{A}_r(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$ (resp. $\mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$) l'espace des fonctions F de $\Omega \times G/H$ à valeurs dans V_τ telles que:

$$\begin{gathered}\text{pour tout } \lambda \in \Omega,\ F(\lambda) \in C^\infty(G/H, \tau), \text{ et, pour tout } \xi \in V^*_\tau, \\ \xi \circ F \in \mathscr{A}_r(G/H, \Lambda, \Omega)_n \text{ (resp. } \mathscr{A}_*(G/H, \Lambda, \Omega)_n).\end{gathered} \tag{37}$$

Enfin on note $\mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Omega)_n$ l'espace des fonctions F de $\Omega \times G/H$ à valeurs dans V_τ qui s'expriment comme sommes finies $F = \sum_{\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*_{\mathbb{C}}} F_\Lambda$ avec $F_\Lambda \in \mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$.

Lemme 8. *Soient Ω un ouvert de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, Λ un élément de $(\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ et F un élément de l'espace $\mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors, pour tout $u \in S(\mathfrak{a}^*)$,*

$$\lambda \mapsto \partial(u)(F(v))_{|v=\lambda} \in \mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_{n+d^0u},$$

où d^0u est le degré de u.

Preuve. Soit $\lambda \in \Omega$. Le Lemme 5 permet de vérifier que la fonction sur G/H, $\partial(u)(F(v))_{|v=\lambda}$, se transforme de la façon voulue sous $\mathbb{D}(G/H)$. L'holomorphie de $\lambda \mapsto \partial(u)(F(v))_{|v=\lambda}$ résulte de [6, Section 3.2.4]. ∎

Lemme 9. *Soient $P \in \mathscr{P}(L)$, $u \in S(\mathfrak{a}^*)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, p un polynôme (P, λ)-régularisant et ϕ une fonction holomorphe au voisinage de λ, à valeurs dans l'espace des endomorphismes de $\mathscr{A}_2(M, \tau)$.*

Alors, pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$,

(i)

$$\partial(u)(p(v)E(P, \phi(v)\psi, v))_{|v=\lambda} = \sum_i \partial(u)(\phi_i(v)p(v)E(P, \psi_i, v))_{|v=\lambda},$$

où les $\psi_i \in \mathcal{A}_2(M,\tau)$ *et les* ϕ_i *sont des fonctions sur* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *à valeurs complexes, holomorphes au voisinage de* λ;

(ii) $\partial(u)(p(\nu)E(P,\phi(\nu)\psi,\nu))_{|\nu=\lambda}$ *est un élément de* $\mathcal{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)_P$.

Preuve. Comme $\mathcal{A}_2(M,\tau)$ est de dimension finie, on écrit $\phi(\nu)\psi = \sum_i \phi_i(\nu)\psi_i$, pour ν dans un voisinage de λ, où les ψ_i forment une base de $\mathcal{A}_2(M,\tau)$ et les ϕ_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de λ, à valeurs complexes. On obtient alors (i).

Montrons (ii). En développant l'action de $\partial(u)$ sur le produit de $\phi_i(\nu)$ par $p(\nu)E(P,\psi_i,\nu)$, on voit grâce à (i) que $\partial(u)(p(\nu)E(P,\phi(\nu)\psi,\nu))_{|\nu=\lambda}$ est un élément de $\mathcal{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)_P$ (cf. Définition 3, pour la définition de cet espace). ∎

Proposition 5.1.1. *Soient* $R \in \mathbb{R}$, $P \in \mathcal{P}(L)$ *et* ϕ *une fonction holomorphe au voisinage de* λ, *à valeurs dans l'espace des endomorphismes de* $\mathcal{A}_2(M,\tau)$. *Soit* p *un multiple de* b_R, *où* $b_R \in \Pi(\Sigma_P)$ *est donné par le Lemme* 2.

Alors, pour tout $u \in S(\mathfrak{a}^*)$ *et* $\psi \in \mathcal{A}_2(M,\tau)$,

$$\lambda \mapsto \partial(u)(p(\nu)E(P,\phi(\nu)\psi,\nu))_{|\nu=\lambda} \in \mathcal{A}_*(G/H,\tau,\mathfrak{a}^*(P,R))_{d^0u}.$$

Preuve. On écrit $p = p' \cdot b_R$ et on applique le lemme 9(i), en y remplaçant ϕ par $p' \cdot \phi$. En développant l'action de $\partial(u)$ sur le produit de $\phi_i(\nu)$ par $b_R(\nu)E(P,\psi_i,\nu)$, on se ramène au cas où $p = b_R$ et ϕ est constant et égal à $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_2(M,\tau)}$.

En utilisant la décomposition (2.9) dans [10] de $\mathcal{A}_2(M,\tau)$, on peut, par linéarité, se ramener, grâce à (1.8) de loc.cit., au cas où $\psi \in \mathcal{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw,\tau)$ $(w \in \mathcal{W}_M)$ est propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$ sous $\mathbb{D}(M/M \cap w^{-1}Hw)$.

Les équations (3.30) et (3.31) de [15] montrent comment les intégrales d'Eisenstein se transforment sous $\mathbb{D}(G/H)$. Joint au Lemme 2(ii), on voit alors que $\lambda \mapsto p(\lambda)E(P,\psi,\lambda)$ est un élément de $\mathcal{A}_*(G/H,\tau,\Lambda,\Omega)_0$. Dans ce cas, le Lemme 8 permet de conclure. ∎

Proposition 5.1.2. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *et* $P \in \mathcal{P}(L)$.

Alors pour tout $\psi \in \mathcal{A}_2(M,\tau)$, $u \in S(\mathfrak{a}^*)$, $\lambda \in \Omega \cap i\mathfrak{a}^*$ *et* ϕ *une fonction holomorphe au voisinage de* λ, *à valeurs dans l'espace des endomorphismes de* $\mathcal{A}_2(M,\tau)$, *on a*

$$\partial(u)(p(\nu)E(P,\phi(\nu)\psi,\nu))_{|\nu=\lambda} \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau),$$

pour tout polynôme p, (P,λ)-*régularisant* (*voir Définition* 2).

Preuve. D'après le Lemme 9(i), il suffit de montrer l'assertion pour $\phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_2(M,\tau)}$. Il est clair qu'on peut se ramener au cas où Ω est borné. On choisit alors $R \in \mathbb{R}$ de sorte que Ω soit contenu dans $\mathfrak{a}^*(P, R)$. Soit b_R un élément de $\Pi(\Sigma_P)$ comme dans le Lemme 2. Il résulte du Lemme 2(iii) et des propriétés des fonctions Π_{hol} (cf. [2, Lemme 2]) que l'on a:

$$\partial(u')(b_R(v)E(P, \psi, v))_{|v=\lambda} \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tau),$$

pour $\lambda \in \Omega \cap i\mathfrak{a}^*$, $u' \in S(\mathfrak{a}^*)$ et $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$.

En utilisant les Lemmes 3(iii) et 4, on déduit l'assertion pour p, (P, λ)-régularisant. ∎

5.2. Intégrales d'Eisenstein et transformées de Fourier normalisées

Pour traiter le cas tempéré, nous devons rappeler les notions d'intégrales d'Eisenstein et transformée de Fourier normalisées données dans [10].

Soit $L = MA$ la σ-décomposition de Langlands d'un élément L de $\mathscr{L}$. Soit P un élément de $\mathscr{P}(L)$. On note δ_P la fonction sur $L/L \cap H$ définie par:

$$\delta_P(l) = e^{\rho_P(H_L(l))} \qquad (l \in L/L \cap H).$$

On rappelle (cf. [8]) que le terme constant de $\Phi \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tau)$ le long de $P \in \mathscr{P}(L)$ est l'élément Φ_P de $\mathscr{A}_{temp}(L/L \cap H, \tau_L)$ caractérisé par:

$$\lim_{t \to +\infty} (\delta_P(\exp(tX)l)\Phi(\exp(tX)l) - \Phi_P(\exp(tX)l)) = 0,$$

pour tout $l \in L/L \cap H$ et $X \in \mathfrak{a}$ strictement Σ_P-dominant.

Si P et Q sont des éléments de $\mathscr{P}(L)$, il existe (cf. [15, Éq. (3.3)], où le Théorème 1 de [10] est reformulé), pour $s \in W(\mathfrak{a})$, une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathscr{A}_2(M, \tau))$, $\lambda \mapsto C_{Q|P}(s, \lambda)$, telle que, pour $w \in \mathscr{W}_M$, $l \in L$, $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$, $a \in A$ et λ dans un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$, on ait:

$$\tau(w^{-1})E(P, \psi, \lambda)_{Q^{w^{-1}}}(wlaw^{-1}) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a})} (C_{Q|P}(s, \lambda)\psi)_w(l)a^{-s\lambda}. \tag{38}$$

Ici Q^w désigne wQw^{-1}.

L'endomorphisme $C_{Q|P}(s, \lambda)$ admet un inverse méromorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (cf. [10, Propositions 2(ii) et 3]) ce qui permet de définir (cf. loc.cit., Section 5.1) les intégrales d'Eisenstein normalisées par:

$$E^0(P, \psi, \lambda) = E(P, C_{P|P}(1, \lambda)^{-1}\psi, \lambda). \tag{39}$$

L'application $\lambda \mapsto E^0(P, \psi, \lambda)$ ainsi définie est holomorphe au voisinage de $i\mathfrak{a}^*$ (cf. [10, Théorème 3]).

On note $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(G/H,\tau)$ formé des éléments f vérifiant pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in G/H} \Theta_G(x)^{-1}N_n(x)\|(L_Df)(x)\| < +\infty,$$

avec Θ_G (resp. N_n) la fonction sur G/H donnée par (31) (resp. (32)).

On dispose des paquets d'ondes dans $\mathscr{C}(G/H,\tau)$. Si Ψ est un élément de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$, où $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$ est l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur $i\mathfrak{a}^*$, l'intégrale

$$\mathscr{I}_P^0\Psi(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*} E^0(P,\Psi(\lambda),\lambda)(x)\,d\lambda, \tag{40}$$

est bien définie et $\mathscr{I}_P^0\Psi$ est un élément de $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ (cf. [10, Proposition 7]).

Pour $\Phi \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ et $f \in \mathscr{C}(G/H,\tau)$, la fonction $x \mapsto (\Phi(x), f(x))$ est un élément de $L^1(G/H)$ (cf., e.g., [14, (5.6)]). On note (Φ, f) l'intégrale de cette fonction sur G/H.

Soit $\Phi \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$. On définit, pour $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, une distribution $T_\Phi^P(\psi)$ sur $i\mathfrak{a}^*$ par la relation:

$$\langle T_\Phi^P(\psi), a\rangle = (\# W(\mathfrak{a}))^{-1}(\mathscr{I}_P^0(a\otimes\psi),\Phi) \quad (a \in C_c^\infty(i\mathfrak{a}^*)). \tag{41}$$

Lemme 10. *Soit $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$. La distribution $T_\Phi^P(\psi)$, sur $i\mathfrak{a}^*$ est à support fini.*

Preuve. En utilisant la relation entre les intégrales d'Eisenstein pour P et pour P^w, $w \in \mathscr{W}_M$ (cf. [10, (3.21)]), on se ramène, grâce à la décomposition (7) de $\mathscr{A}_2(M,\tau)$, au cas où $\psi \in \mathscr{A}_2(M/M\cap H, \tau_M)$. On peut même se ramener au cas où ψ est $\mathbb{D}(M/M\cap H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$ (cf. [15, Lemme 5(i)]). On a alors (cf. preuve du Lemme 9 de [14]):

$$D\mathscr{I}_P^0(a\otimes\psi) = \mathscr{I}_P^0((p_Da)\otimes\psi) \qquad (D \in \mathbb{D}(G/H)), \tag{42}$$

où p_D est le polynôme sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ définie par $p_D(\lambda) = \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D, \Lambda-\lambda)$, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Comme $\Phi \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ est $\mathbb{D}(G/H)$-finie, il existe un idéal I de codimension finie dans $\mathbb{D}(G/H)$ tel que $D\Phi = 0$ pour tout $D \in I$. Si $D \in \mathbb{D}(G/H)$, on note D^* l'adjoint formel de D. C'est un élément de $\mathbb{D}(G/H)$. On note I^* l'idéal de $\mathbb{D}(G/H)$ engendré par $\{D^* \mid D \in I\}$, qui est de codimension finie dans $\mathbb{D}(G/H)$.

De la définition (41) de $T_\Phi^P(\psi)$, on déduit que:

$$\langle p_D T_\Phi^P(\psi), a\rangle = (\# W(\mathfrak{a}))^{-1}(\mathscr{I}_P^0(p_Da\otimes\psi),\Phi) \ (a \in C_c^\infty(i\mathfrak{a}^*)).$$

Donc, grâce à (42), on a:

$$\langle p_D T_\Phi^P(\psi), a\rangle = (\# W(\mathfrak{a}))^{-1}(D\mathscr{I}_P^0(a \otimes \psi), \Phi) \ (a \in C_c^\infty(i\mathfrak{a}^*)).$$

Donc:

$$\langle p_D T_\Phi^P(\psi), a\rangle = 0 \ \text{si} \ D \in I^*.$$

Le support de la distribution est donc contenu dans $\{\lambda \in i\mathfrak{a}^* | p_D(\lambda) = 0, D \in I^*\}$, qui est fini car $\gamma_{\mathfrak{a}^d}(I^*)$ est un idéal de codimension finie dans $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{a}^d)}$. ∎

Soit $\Phi \in \mathscr{A}_{\text{temp}}(G/H, \tau)$. Il résulte du Lemme 10 que pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$, le support de $T_\Phi^P(\psi)$ est fini donc compact. Ainsi,

$$T_\Phi^P(\psi) \text{ définit un élément du dual } \mathscr{S}'(i\mathfrak{a}^*) \text{ de } \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*).$$

Par représentation de Riesz, on peut alors définir un élément T_Φ^P du dual $\mathscr{S}'(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M, \tau)'$ de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M, \tau)$ par la relation:

$$\langle T_\Phi^P, a \otimes \psi\rangle = \langle T_\Phi^P(\psi), a\rangle, \ (a \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*), \qquad \psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)). \tag{43}$$

On identifie dans la suite $\mathscr{A}_2(M, \tau)'$ à $\mathscr{A}_2(M, \tau)$ grâce au produit scalaire.

De (41) et (43), il résulte que:

$$\langle T_\Phi^P, \Psi\rangle = (\# W(\mathfrak{a}))^{-1}(\mathscr{I}_P^0(\Psi), \Phi) \ (\Psi \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M, \tau)). \tag{44}$$

Remarque 2. Le Lemme 10, la définition de T_Φ^P (cf. (43)) et le fait que $\mathscr{A}_2(M, \tau)$ soit de dimension finie (cf. [14, Proposition 1]) impliquent que T_Φ^P est une somme finie de produits tensoriels de dérivées de masses de Dirac sur $i\mathfrak{a}^*$ avec des éléments de $\mathscr{A}_2(M, \tau)$.

Rappelons maintenant la définition de la transformation de Fourier normalisée donnée dans [10].

Soient $P \in \mathscr{P}(L)$ et $f \in \mathscr{C}(G/H, \tau)$. Si $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, il existe, par représentation de Riesz, un unique élément $(\mathscr{F}_P^0 f)(\lambda)$ de $\mathscr{A}_2(M, \tau)$, vérifiant, pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$,

$$(\mathscr{F}_P^0 f(\lambda), \psi) = \int_{G/H} (f(x), E^0(P, \psi, \lambda)(x))\, dx. \tag{45}$$

De plus, $\mathscr{F}_P^0 f$ est un élément de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M, \tau)$ (cf. [10, Théorème 4]).

Soient P et P' des éléments de $\mathscr{F}_{\text{st}}$ et MA (resp. $M'A'$) la σ-décomposition de Langlands de L_P (resp. $L_{P'}$). Grâce au Théorème 3 de [10] et au Lemme 2 de [2], on a, pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$, $u \in S(\mathfrak{a}^*)$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$:

$$\partial(u)(E^0(P, \psi, \nu))_{|\nu=\lambda} \in \mathscr{A}_{\text{temp}}(G/H, \tau). \tag{46}$$

Donc $T^{P'}_{\partial(u)(E^0(P,\psi,\nu))_{|\nu=\lambda}}$ est bien défini pour $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, $u \in S(\mathfrak{a}^*)$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$. En particulier, on a, grâce à (45) et (44):

$$\begin{gathered}\langle T^{P'}_{E^0(P,\psi,\lambda)}, \Psi\rangle = (\# W(\mathfrak{a}))^{-1}((\mathscr{F}^0_P \circ \mathscr{I}^0_{P'})(\Psi)(\lambda), \psi), \\ \text{pour tout } \Psi \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M',\tau),\ \lambda \in i\mathfrak{a}^*,\ \psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau),\end{gathered} \tag{47}$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire sur $\mathscr{A}_2(M,\tau)$.

On dispose des fonctions C normalisées, définies en remplaçant dans (38) E par E^0, notées C^0 (cf. [10, (5.2), (5.3)]), qui sont holomorphes au voisinage de $i\mathfrak{a}^*$ (cf. loc.cit., Théorème 3(ii)).

Soit $\mathscr{S}^0_P(\tau)$ l'espace formé des éléments Ψ de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$ vérifiant la loi de transformation suivante:

$$\Psi(s\lambda) = C^0_{P|P}(s,\lambda)\Psi(\lambda) \quad (\lambda \in i\mathfrak{a}^*,\ s \in W(\mathfrak{a})).$$

LEMME 11. *Soient $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ et $u \in S(\mathfrak{a}^*)$.*

(i) *Si P et P', comme ci-dessus, ne sont pas σ-associés, i.e., $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ ne sont pas conjuqués par un élément de K,*

$$T^{P'}_{\partial(u)(E^0(P,\psi,\nu))_{|\nu=\lambda}} = 0.$$

(ii) *La restriction, ${}^0T^P_\Phi$, de T^P_Φ à $\mathscr{S}^0_P(\tau)$ vérifie:*

$${}^0T^P_{\partial(u)(E^0(P,\psi,\nu))_{|\nu=\lambda}} = (\partial(u)\delta_\lambda) \otimes \psi,$$

où δ_λ est la masse de Dirac en λ.

Preuve. Montrons tout d'abord le lemme pour $u = 1$, c'est à dire:

$$T^{P'}_{E^0(P,\psi,\lambda)} = 0, \tag{48}$$

$$\langle {}^0T^P_{E^0(P,\psi,\lambda)}, \Psi\rangle = (\Psi(\lambda), \psi)\ (\Psi \in \mathscr{S}^0_P(\tau)). \tag{49}$$

Comme P et P' ne sont pas σ-associés, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ ne sont pas conjugués par un élément de K. On a donc (cf. [10, Théorème 5(ii)]) $\mathscr{F}^0_P \circ \mathscr{I}^0_{P'} = 0$. Il résulte donc de (47) que $T^{P'}_{E^0(P,\psi,\lambda)} = 0$, ce qui prouve (48). Montrons (49). D'après [10, Théorème 5(ii)], on a $\mathscr{F}^0_P \circ \mathscr{I}^0_P \Psi = (\# W(\mathfrak{a}))\Psi$, pour tout $\Psi \in \mathscr{S}^0_P(\tau)$. Grâce à (47), on a donc, pour tout $\Psi \in \mathscr{S}^0_P(\tau)$,

$$\begin{aligned}\langle {}^0T^P_{E^0(P,\psi,\lambda)}, \Psi\rangle &= \langle T^P_{E^0(P,\psi,\lambda)}, \Psi\rangle \\ &= (\Psi(\lambda), \psi).\end{aligned}$$

D'où (49). On va obtenir, à partir de (48) et (49), le lemme par dérivation sous le signe intégrale. Soient $\lambda_0 \in i\mathfrak{a}^*$ et Ω un ouvert borné de $i\mathfrak{a}^*$ contenant λ_0. On déduit du Lemme 2 de [2] associé au Théorème 3 de [10] qu'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que:

$$\|\partial(u)(E^0(P,\psi,v)(x))_{|v=\lambda}\| \leqslant CN_m(x)\Theta(x) \qquad (\lambda \in \Omega,\ x \in G/H) \tag{50}$$

avec Θ_G (resp. N_n) la fonction sur G/H donnée par (31) (resp. (32)).

Comme (50) est vrai pour tout $u \in S(\mathfrak{a}^*)$ et que $\mathscr{I}^0_{P'}\Psi \in \mathscr{C}(G/H,\tau)$ pour tout $\Psi \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$, on peut, grâce au fait que $N_k^{-1}\Theta_G^2 \in L^1(G/H)$ pour k assez grand (cf. [1, Corollaire 17.6]), appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale à

$$\int_{G/H} (\mathscr{I}^0_{P'}\Psi(x), E^0(P,\psi,v)(x))\,dx,$$

ce qui permet de conclure. ∎

Dans le Théorème suivant, on donne une description des fonctions tempérées à l'aide de dérivées d'intégrales d'Eisenstein normalisées (cf. Éq. (39), pour la définition des intégrales d'Eisenstein normalisées), ce qui n'est pas le résultat désiré. Dans la section suivante, on montre qu'en fait, les intégrales d'Eisenstein normalisées sont des dérivées d'intégrales d'Eisenstein.

THÉORÈME 5.1. *Soit Φ un élément de $\mathscr{A}_{\text{temp}}(G/H,\tau)$. Alors*

$$\Phi = \sum_{P\in\mathbb{F}} \Phi^P,$$

où chaque Φ^P s'écrit sous la forme

$$\Phi^P = \sum_{i=1}^{d_P} \partial(u_i)(E^0(P,\psi_i,v))_{|v=\lambda_i},$$

où $d_P \in \mathbb{N}^*$, les λ_i sont des éléments de $i\mathfrak{a}^*_P$, les u_i des éléments de $S(\mathfrak{a}^*_P)$ et les ψ_i des éléments de $\mathscr{A}_2(M_P,\tau)$.

Preuve. Il résulte de la Remarque 2 et du Lemme 11(ii) que, pour tout $P \in \mathbb{F}$, il existe Φ^P, ayant l'écriture voulue, telle que:

$${}^0T^P_\Phi = {}^0T^P_{\Phi^P}. \tag{51}$$

Comme les éléments de $\mathbb{F}$ sont deux à deux non σ-associés, il résulte du Lemme 11(i) que:

$${}^0T^{P'}_{\Phi^P} = 0 \qquad (P,\ P' \in \mathbb{F},\ P \neq P'). \tag{52}$$

On pose $\Phi_1 = \Phi - \sum_{P\in\mathbb{F}} \Phi^P$. Comme $\Phi_1 \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ (cf. (46)), on déduit de (51) et (52) que:

$$^0T^P_{\Phi_1} = 0 \qquad (P \in \mathbb{F}). \tag{53}$$

Ceci revient à dire, compte tenu de (44), de la définition de $^0T^P_{\Phi_1}$ (cf. Lemme 11(ii)) et du Théorème 5 de [10], qui dit que l'image de $\mathscr{F}^0_P$ est égale à $\mathscr{S}^0_P(\tau)$, que Φ_1 est orthogonale à l'image de $\mathscr{I}^0_P\mathscr{F}^0_P$ pour tout $P \in \mathbb{F}$. D'après le Théorème 5(iii) de [4], Φ_1 est donc orthogonale à l'image de $\mathscr{I}^0_Q\mathscr{F}^0_Q$ pour $Q \in \mathscr{P}(L_P)$, $P \in \mathbb{F}$, qui est égale, d'après loc.cit, Théorème 5(i), à l'image de $\mathscr{I}^0_Q$. On montre comme dans la preuve du Théorème 1 de [15] qu'alors le terme constant $(\Phi_1)_{Q^w}$ de Φ_1 le long de Q^w, $Q \in \mathscr{P}(L_P)$, $w \in \mathscr{W}_{M_P}$, $P \in \mathbb{F}$, est un élément du sous-espace $\mathscr{A}_{\mathrm{temp},c}$ $(L_{Q^w}/L_{Q^w} \cap H, \tau_{|K\cap L_{Q^w}})$ de $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(L_{Q^w}/L_{Q^w} \cap H, \tau_{|K\cap L_{Q^w}})$ des éléments ψ vérifiant, pour tout $X \in \mathfrak{a}_{Q^w}$, $mM_{Q^w} \cap H \mapsto \psi(\exp(X)mM_{Q^w} \cap H)$ est orthogonale au sous-espace $\mathscr{A}_2(M_{Q^w}/M_{Q^w} \cap H, \tau_{|K\cap M_{Q^w}})$ de $\mathscr{C}(M_{Q^w}/M_{Q^w} \cap H, \tau_{|K\cap M_{Q^w}})$. Ceci implique grâce au Lemme 4(ii) de [15] que Φ_1 est alors nulle. ∎

5.3. *Intégrales d'entrelacement, matrices B*

Dans cette section, nous montrons qu'une intégrale d'Eisenstein normalisée est une dérivée d'intégrales d'Eisenstein, pour déduire ensuite, du Théorème 5.1, une description de l'espace $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ à l'aide de dérivées d'intégrales d'Eisenstein. Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire la notion d'intégrales d'entrelacement et de petites matrices B.

Soient $L \in \mathscr{L}$ avec $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands, $P \in \mathscr{P}(L)$, (δ, V_δ) un élément du dual unitaire de M et λ un élément de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. On note $(\pi^P_{\delta,\lambda}, I^P_{\delta,\lambda})$ la série principale généralisée correspondante. Ici $I^P_{\delta,\lambda}$ est l'espace des fonctions de classe C^∞, $\varphi:\ G \mapsto V^\infty_\delta$, vérifiant

$$\varphi(gman) = a^{-\lambda-\rho_P}\delta(m^{-1})\varphi(g),$$

avec $g \in G$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N_P$, et le groupe G agit par représentation régulière gauche.

La restriction des fonctions à K induit un isomorphisme de $I^P_{\delta,\lambda}$ sur l'espace $C^\infty(K,\delta)$ des fonctions de classe C^∞, $\varphi : K \to V^\infty_\delta$, vérifiant $\varphi(km) = \delta(m^{-1})\varphi(k)$, $k \in K$, $m \in K_M$. On note $\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}$ la représentation de G dans $C^\infty(K,\delta)$ induite de $\pi^P_{\delta,\lambda}$ par transport de structure. Pour $\varphi \in C^\infty(K,\delta)$, on notera φ_λ ou φ^P_λ son image dans $I^P_{\delta,\lambda}$.

Soit Q un autre élément de $\mathscr{P}(L)$. On rappelle (cf. [20, Théorème 6.6]) qu'il existe une constante $c_\delta \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ vérifiant:

$$\mathrm{Re}(\lambda,\alpha) > c_\delta \qquad (\alpha \in \Sigma_P \cap \theta(\Sigma_Q)), \tag{54}$$

on ait, pour tout $\varphi \in I^P_{\delta,\lambda}$ et $g \in G$, l'intégrale $\int_{N_Q \cap \theta(N_P)} \varphi(gv)\,dv$ (où dv est une mesure de Haar sur $N_Q \cap \theta(N_P)$) converge absolument et l'application $g \mapsto \int_{N_Q \cap \theta(N_P)} \varphi(gv)\,dv$ définit un élément de $I^Q_{\delta,\lambda}$ noté $A(Q,P,\delta,\lambda)\varphi$. De plus, $A(Q,P,\delta,\lambda)$ est un opérateur d'entrelacement non nul qui entrelace $(\pi^P_{\delta,\lambda}, I^P_{\delta,\lambda})$ et $(\pi^Q_{\delta,\lambda}, I^Q_{\delta,\lambda})$.

On note encore $\lambda \mapsto A(Q,P,\delta,\lambda)$ le prolongement méromorphe (cf. [20]) des intégrales d'entrelacement qui envoient $I^P_{\delta,\lambda}$ dans $I^Q_{\delta,\lambda}$.

On note $\bar{A}(Q,P,\delta,\lambda)$ l'opérateur correspondant dans la réalisation compacte $C^\infty(K,\delta)$.

Il existe (cf. [20, Proposition 7.3]) une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ non identiquement nulle, à valeurs complexes, $\lambda \mapsto \eta(P,Q,\delta,\lambda)$, telle que:

$$\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda)\bar{A}(Q,P,\delta,\lambda) = \eta(P,Q,\delta,\lambda)\mathrm{Id}_{C^\infty(K,\delta)} \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}). \tag{55}$$

Il résulte de (55) que $\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda)$ admet un inverse méromorphe en λ.

Soit $w \in \mathscr{W}_M$. On note $\mathscr{V}(\delta,w) = (V_\delta^{-\infty})^{M \cap w^{-1}Hw}_{\mathrm{disc}}$, où le second membre désigne l'espace des vecteurs distributions η de (δ, V_δ), invariants par $M \cap w^{-1}Hw$ et tels que, pour tout $v \in V_\delta^\infty$, les fonctions $m \mapsto \langle \delta'(m)\eta, v\rangle$ sont de carré intégrable sur $M/M \cap w^{-1}Hw$. Le produit scalaire L^2 permet de définir un produit scalaire sur cet espace (cf. [10, Éq. (1.6)]). On pose

$$\mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}_M} := \bigoplus_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{V}(\delta,w). \tag{56}$$

On note (cf. loc.cit., Section 2) $\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw)^\delta$ la somme des images des applications linéaires T_η de V_δ^∞ à valeurs dans $C^\infty(M/M \cap w^{-1}Hw)$, définies dans [10, Éq. (1.1)], par:

$$T_\eta(v)(mM \cap w^{-1}Hw) = \langle \delta'(m)\eta, v\rangle \qquad (v \in V_\delta^\infty),$$

lorsque η varie dans $\mathscr{V}(\delta,w)$. On pose (cf. [10, Éq. (2.1)]):

$$\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)^\delta := (\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw)^\delta \otimes V_\tau)^{K_M}. \tag{57}$$

On a (cf. loc.cit., Éq. (2.2)):

$$\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M) = \oplus_{\delta \in \hat{M}} \mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)^\delta. \tag{58}$$

On note (cf. [10, (2.10)]):

$$\mathscr{A}_2(M,\tau)^\delta_{\mathscr{W}_M} := \prod_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)^\delta. \tag{59}$$

On omettra l'indice $\mathscr{W}_M$, dans les notations précédentes, s'il n'y a pas de confusion possible.

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\operatorname{Re}\lambda - \rho_P$ soit strictement Σ_P-dominant. Soit $\eta = (\eta_w)_{w\in\mathscr{W}_M} \in \mathscr{V}(\delta)$. On dispose d'une fonction continue sur G à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$, $j(P,\delta,\lambda,\eta)$, H-invariante à gauche valant η_w pour $w \in \mathscr{W}_M$ et se transformant par $a^{\lambda-\rho_P}\delta'(m^{-1})$ par translation à droite par man, pour $m \in M$, $a \in A$ et $n \in N_P$. Ces propriétés caractérisent cette fonction (cf. [9, Section 2.4, Éq. (6)]) qui détermine un vecteur distribution H-invariant de $\pi_{\delta,\lambda}^P$ (cf. loc.cit., Proposition 2). On notera $\bar{j}(P,\delta,\lambda,\eta)$ la forme linéaire continue correspondante sur $C^\infty(K,\delta)$. L'application $\lambda \mapsto \bar{j}(P,\delta,\lambda,\eta)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ à valeurs dans le dual topologique de $C^\infty(K,\delta)$ (cf. [9, Théorème 3(i)]), qu'on note de même.

Soit

$$C^\infty(K,\delta,\tau) = (C^\infty(K,\delta) \otimes V_\tau)^K.$$

On définit (cf. [10, Éq. (2.6)]) une application de $C^\infty(K,\delta,\tau) \otimes (V_\delta^{-\infty})_{\text{disc}}^{M\cap H}$ dans $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$ donnée par:

$$\psi_{f\otimes\eta}(mM\cap H) = \langle \delta'(m)\eta, f(e)\rangle \in V_\tau \qquad (m \in M). \tag{60}$$

L'application $f \otimes \eta \mapsto \psi_{f\otimes\eta}$ ainsi définie est (cf. [10, (2.7)]) une isométrie d'image $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta$ (cf. [10, (2.7)]).

On note $\lambda \mapsto B(Q,P,\delta,\lambda)$ l'application méromorphe de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ à valeurs dans l'espace des endomorphismes de $\mathscr{V}(\delta)$ telle que l'on ait l'identité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$A'(P,Q,\delta,\lambda)j(P,\delta,\lambda,\eta) = j(Q,\delta,\lambda,B(Q,P,\delta,\lambda)\eta) \qquad (\eta \in \mathscr{V}(\delta)). \tag{61}$$

L'existence de B résulte de [9, Proposition 4], et de [13, Théorème 2]. On rappelle (cf., e.g., [10, Éq. (3.11)]) que l'on a l'identité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$B(P,Q,\delta,\lambda) \circ B(Q,P,\delta,\lambda) = \eta(P,Q,\delta,\lambda)\mathrm{Id}_{\mathscr{V}(\delta)}. \tag{62}$$

En particulier, $B(P,Q,\delta,\lambda)$ admet un inverse méromorphe en λ.

Soit $P \in \mathscr{P}(L)$. On notera $\bar{P}$ le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable $\theta(P)$ de G, et $\bar{N}_P := \theta(N_P)$. Soit $\alpha \in \Sigma_P$, on notera $\mathfrak{n}_P^\alpha := \oplus_{t\in\mathbb{R}_{>0}}\mathfrak{g}^{t\alpha}$, où $\mathfrak{g}^{t\alpha}$ est le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ correspondant au poids $t\alpha$ de $\mathfrak{a}$. Soit Q un autre élément de $\mathscr{P}(L)$. On dit (cf. [9, Section 5.2]) que P et Q sont σ-adjacents s'ils sont distincts et si $\mathfrak{n}_P \cap \theta(\mathfrak{n}_Q) = \mathfrak{n}_P^\alpha$, où α est une racine simple de Σ_P. On note $G_1(\alpha)$ le centralisateur de $\operatorname{Ker}(\alpha)$ dans G, $\mathfrak{g}_1(\alpha) := \operatorname{Lie}(G_1(\alpha))$, et, dans ce cas, $G(\alpha) := (G_1(\alpha) \cap K)\exp(\mathfrak{g}_1(\alpha) \cap \mathfrak{s} \cap (\operatorname{Ker}(\alpha))^\perp)$ est un sous-groupe réductif dans la classe de Harish-Chandra (cf., e.g., [9, p. 207]). Soit $P(\alpha)$ le sous-groupe parabolique de $G(\alpha)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \mathfrak{n}_P^\alpha$, avec $\mathfrak{a}(\alpha) := \mathfrak{a} \cap (\operatorname{Ker}(\alpha))^\perp$. C'est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de $G(\alpha)$ de σ-décomposition de Langlands $P(\alpha) = MA(\alpha)N_P^\alpha$, où $A(\alpha) := \exp\mathfrak{a}(\alpha)$.

On appelle chaîne σ-minimale de P à Q une suite $P_0, \ldots, P_n$ d'éléments de $\mathscr{P}(L)$ telle que $P_0 = P$, $P_n = Q$ et P_i, P_{i+1} soient σ-adjacents, pour $i = 0, \ldots, n-1$, et de longueur minimale parmi les chaînes vérifiant ces conditions. Il existe des chaînes σ-minimales de P à Q (cf. [20, p. 538], pour le cas $\sigma = \theta$ et la démonstration en général est analogue).

LEMME 12. *Soient $R \in \mathbb{R}$ et δ une représentation unitaire irréductible de M. Il existe*:

(i) *un élément a_R de $\Pi(\Sigma_P \cap \theta(\Sigma_Q))$ tel que, pour tout $\varphi \in C^\infty(K, \delta)$ et $\varphi' \in C^\infty(K, \delta')$, l'application $\lambda \mapsto a_R(\lambda)\langle \bar{A}(Q, P, \delta, \lambda)\varphi, \varphi'\rangle$ soit holomorphe sur $\mathfrak{a}^*(P, R)$,*

(ii) *un élément a'_R de $\Pi(\Sigma_P \cap \theta(\Sigma_Q))$ tel que $\lambda \mapsto a'_R(\lambda)B(Q, P, \delta, \lambda)$ soit holomorphe sur $\mathfrak{a}^*(P, R) \cap \mathfrak{a}^*(\bar{P}, -R)$ et*

(iii) *un élément e_R de $\Pi(\Sigma_P \cap \theta(\Sigma_Q))$ tel que $\lambda \mapsto e_R(\lambda)\eta(Q, P, \delta, \lambda)^{-1}$ soit holomorphe sur $\mathfrak{a}^*(P, R) \cap \mathfrak{a}^*(\bar{P}, -R)$.*

Preuve. Soit $(P_i)_{i=0,\ldots,n}$ une chaîne σ-minimale de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de P à Q. On a (cf. [10, Corollaire 7.7]) l'égalité de fonctions méromorphes en λ:

$$\bar{A}(Q, P, \delta, \lambda) = \bar{A}(P_n, P_{n-1}, \delta, \lambda) \circ \cdots \circ \bar{A}(P_1, P_0, \delta, \lambda). \tag{63}$$

On note, pour $i = 1, \ldots, n$, α_i, la racine simple de $\Sigma_{P_{i-1}}$ telle que $\mathfrak{n}_{P_{i-1}}^{\alpha_i} = \mathfrak{n}_{P_{i-1}} \cap \theta(\mathfrak{n}_{P_i})$. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a, comme dans la Proposition 7.5 de [20], qu'il existe $C \neq 0$ tel que:

$$(\bar{A}(P_i, P_{i-1}, \delta, \lambda)\varphi)(k) = C(\bar{A}(\overline{P(\alpha_i)}, P(\alpha_i), \delta, \lambda_{|\mathfrak{a}(\alpha_i)})\varphi_k)(1),$$
$$\text{pour tout } k \in K,\ \varphi \in C^\infty(K, \delta), \tag{64}$$

où φ_k est la restriction à $G(\alpha_i)$ de $L_{k^{-1}}\varphi$ et $\bar{A}(\overline{P(\alpha_i)}, P(\alpha_i), \delta, \lambda_{|\mathfrak{a}(\alpha_i)})$ est relatif à $G(\alpha_i)$.

Alors (cf., e.g., [10, Lemme 3(i)]), pour tout $R \in \mathbb{R}$, il existe $a_{R,i}$, produit de formes affines du type $\lambda \mapsto (\lambda, \alpha_i) - c$ ($c \in \mathbb{C}$) vérifiant:

$$\lambda \mapsto a_{R,i}(\lambda)\langle \bar{A}(P_i, P_{i-1}, \delta, \lambda)\varphi, \varphi'\rangle,$$
$$\text{holomorphe sur } \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Re}(\lambda, \alpha_i) > R\},$$
$$\text{pour tout } \varphi \in C^\infty(K, \delta),\ \varphi' \in C^\infty(K, \delta').$$

Alors, pour tout $R \in \mathbb{R}$, $a_R := \prod_{i=1}^n a_{R,i}$ vérifie (i).

D'après la Proposition 5 de [9] et le Théorème 2 de [13], on a l'égalité de fonctions méromorphes en λ:

$$B(Q, P, \delta, \lambda) = B(P_n, P_{n-1}, \delta, \lambda) \circ \cdots \circ B(P_1, P_0, \delta, \lambda). \tag{65}$$

Pour montrer (ii), on se ramène, grâce à (65), au cas où P et Q sont σ-adjacents. D'après la définition des matrices B (cf. [9, Proposition 4]), la variété polaire de $B(Q,P,\delta,\lambda)$ est contenue dans la réunion des variétés polaires de $A'(P,Q,\delta,\lambda)$ et des $j(P,\delta,\lambda,\eta)$, $\eta\in\mathscr{V}(\delta)$. Or, d'après [20, Théorème 6.6], la variété polaire de $A(P,Q,\delta,\lambda)$ est contenue dans un ensemble de la forme $\bigcup_{1\leqslant j\leqslant k}\lambda_j+\mathbb{Z}c\alpha+\alpha^\perp$, où les λ_j sont des éléments de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $c\in\mathbb{R}$, α est la racine simple de Σ_P telle que $\mathfrak{n}_P^\alpha=\mathfrak{n}_P\cap\theta(\mathfrak{n}_Q)$, et $\alpha^\perp$ est l'orthogonal de α dans $\mathfrak{a}^*$. De même, la variété polaire des $j(P,\delta,\lambda,\eta)$, $\eta\in\mathscr{V}(\delta)$, est contenue dans un ensemble de la forme $\bigcup_{1\leqslant j\leqslant l,p\in\mathbb{N}}\mathscr{H}_j-p\gamma$, où les $\mathscr{H}_j$ sont des hyperplans affines de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et γ est un élément de $\mathfrak{a}^*$ strictement Σ_P-dominant (cf. [9, Théorème 3(ii)]). Il est clair que $\mathfrak{a}^*(P,R)\cap\mathfrak{a}^*(\bar{P},-R)$ ne rencontre qu'un nombre fini d'hyperplans de ces variétés polaires. D'où (ii).

Montrons (iii). On déduit de (55) et (63) que:

$$\eta(P,Q,\delta,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\eta(P_i,P_{i-1},\delta,\lambda).$$

Comme précédemment, on se ramène au cas où P et Q sont σ-adjacents. Par ailleurs, la définition de $\eta(P,Q,\delta,\lambda)$ (cf. Éq. (55)) montre que sa variété polaire est contenue dans la réunion de la variété polaire de $A(P,Q,\delta,\lambda)$ et de celle de $A(Q,P,\delta,\lambda)$. Grâce à [20, Théorème 6.6] (voir ci-dessus), on voit que $\mathfrak{a}^*(P,R)\cap\mathfrak{a}^*(\bar{P},-R)$ ne rencontre la variété polaire de $\eta(P,Q,\delta,\lambda)$ qu'en un nombre fini d'hyperplans, D'où le résultat. ∎

Lemme 13. *On conserve les notations du Lemme* 12. *Il existe dans $\Pi(\Sigma_P)$ un polynôme $\underline{a}_R$ (resp. $\underline{a}'_R$) vérifiant*:

$$\lambda\mapsto\underline{a}_R(\lambda)\langle\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda)^{-1}\varphi,\varphi'\rangle\ (\textit{resp. }\lambda\mapsto\underline{a}'_R(\lambda)B(P,Q,\delta,\lambda)^{-1})$$

$$\textit{holomorphe sur }\mathfrak{a}^*(P,R)\cap\mathfrak{a}^*(\bar{P},-R),$$

pour tout $\varphi\in C^\infty(K,\delta)$ et $\varphi'\in C^\infty(K,\delta')$.

Preuve. On pose $\underline{a}_R=e_Ra_R$ (resp. $\underline{a}'_R=e_Ra'_R$) avec a_R (resp. a'_R) et e_R donnés par le Lemme 12. D'après ce dernier, il résulte de (55) (resp. (62)) l'assertion voulue. ∎

Lemme 14. *Soit $P\in\mathscr{P}(L)$. Pour tout $\lambda\in i\mathfrak{a}$, $u\in S(\mathfrak{a}^*)$ et $\psi\in\mathscr{A}_2(M,\tau)$, $\partial(u)(E^0(P,\psi,\nu))_{|\nu=\lambda}$ est un élément de $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)_P$ de la forme*

$$\sum_i\partial(u')(\phi_i(\nu)p(\nu)E(P,\psi_i,\nu))_{|\nu=\lambda},$$

où p est un polynôme (P, λ)-régularisant choisi arbitrairement, $u' \in S(\mathfrak{a}^*)$ et les ϕ_i sont des fonctions sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, à valeurs complexes, holomorphes au voisinage de λ.

Preuve. Par linéarité et grâce à (3.21) et (2.2) de [10] et à (60), on se ramène au cas où $\psi = \psi_{f\otimes\eta}$ avec $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ et $\eta \in (V_{\bar{\delta}}^{-\infty})_{\text{disc}}^{M\cap H}$. D'après [10, Proposition 2(i)], on a l'identité de fonctions méromorphes en $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$C_{P|P}(1, \nu)^{-1}\psi_{f\otimes\eta} = \psi_{f\otimes B(\bar{P},P,\delta,\nu)\eta}.$$

Tenant compte de (62), on a alors l'identité de fonctions méromorphes en $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$C_{P|P}(1, \nu)^{-1}\psi_{f\otimes\eta} = \psi_{f\otimes\eta(\bar{P},P,\delta,\nu)^{-1}B(P,\bar{P},\delta,\nu)\eta}.$$

D'après le Lemme 13, il existe un polynôme q sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, élément de $\Pi(\Sigma_P)$, tel que la fonction ϕ, à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathscr{A}_2(M, \tau))$, définie par $\phi(\nu)\psi_{f\otimes\eta} := \psi_{f\otimes q(\nu)\eta(\bar{P},P,\delta,\nu)^{-1}B(P,\bar{P},\delta,\nu)\eta}$, soit holomorphe au voisinage de λ de sorte que l'on ait l'identité de fonctions méromorphes en ν:

$$q(\nu)E^0(P, \psi_{f\otimes\eta}, \nu) = E(P, \phi(\nu)\psi_{f\otimes\eta}, \nu). \tag{66}$$

Soient $u \in S(\mathfrak{a}^*)$ et p un polynôme (P, λ)-régularisant. D'après le Lemme 4, il existe $u' \in S(\mathfrak{a}^*)$ tel que:

$$\partial(u)(E^0(P, \psi_{f\otimes\eta}, \nu))_{|\nu=\lambda} = \partial(u')(q(\nu)p(\nu)E^0(P, \psi_{f\otimes\eta}, \nu))_{|\nu=\lambda}.$$

On a donc:

$$\partial(u)(E^0(P, \psi_{f\otimes\eta}, \nu))_{|\nu=\lambda} = \partial(u')(p(\nu)E(P, \phi(\nu)\psi_{f\otimes\eta}, \nu))_{|\nu=\lambda}.$$

On obtient alors l'assertion grâce au Lemme 9. ∎

Il résulte du Lemme 14, un Corollaire immédiat au Théorème 5.1.

COROLLAIRE 5.2. *Soit Φ un élément de $\mathscr{A}_{\text{temp}}(G/H, \tau)$. Alors*

$$\Phi = \sum_{P\in\mathbb{F}} \Phi^P,$$

où chaque Φ^P s'écrit sous la forme

$$\Phi^P = \sum_{i=1}^{d'_P} \partial(u_i)(p_i(\nu)E(P, \psi_i, \nu))_{|\nu=\lambda_i},$$

où $d'_P \in \mathbb{N}^*$, *les* λ_i *sont des éléments de* $i\mathfrak{a}_P^*$, *les* p_i *des polynômes* (P, λ_i)-*régularisants arbitrairement choisis, les* u_i *des éléments de* $S(\mathfrak{a}_P^*)$ *et les* ψ_i *des éléments de* $\mathscr{A}_2(M_P, \tau)$. *En particulier,* $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tau)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H, \tau)$.

6. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES INTÉGRALES D'EISENSTEIN

Il s'agit de généraliser le Lemme 16 de [13], lui-même généralisation d'un lemme classique de Langlands (cf. [22, Lemme 3.12; 5, Chapitre 4, Lemme 4.4]).

Pour tout élément P de $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}$, on note $\mathscr{W}_P$ un ensemble, contenant e_G, de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de l'ensemble des éléments w de $W_\emptyset/W_\emptyset^{M_P}$ tel que wPw^{-1} soit standard (cf. [14, Lemme 10(iii)] pour l'existence d'un tel ensemble). D'après loc.cit., Lemme 10(iii), $\mathscr{W}_P$ est un ensemble de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^{M_P})$-doubles classes de $W_\emptyset$.

Soit $L \in \mathscr{L}$ avec $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands. Soient $P \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}(L)$ et Q un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de M. On note P_Q (resp. $(\bar{P})_Q$) le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G de σ-décomposition de Langlands $P_Q = M_Q(A_Q A)(N_Q N_P)$ (resp. $(\bar{P})_Q = M_Q(A_Q A)(N_Q \bar{N}_P)$, avec $\bar{N}_P = \theta(N_P)$).

On fixe un ensemble $\mathscr{W}_{M_Q}^M$ de représentants des $(W_\emptyset^{H\cap M}, W_\emptyset^{M_Q})$-doubles classes de $W_\emptyset^M$ dans $N_{K_M \cap H}(\mathfrak{a}_\emptyset)$, contenant e_G.

Soient w et w' des éléments de $\mathscr{W}_{M_Q}^M$. Supposons que les doubles classes de w et w' modulo $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^{M_Q})$ correspondantes sont égales. Alors, il existe $h \in N_{K\cap H}(\mathfrak{a}_\emptyset)$, $m \in N_{K\cap M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset)$ avec $w' = hwm$. Mais comme $M_Q \subset M$ et $w, w' \in \mathscr{W}_{M_Q}^M$, on a $h \in H \cap M$. Alors les $(W_\emptyset^{H\cap M}, W_\emptyset^{M_Q})$-doubles classes de w et w' sont égales, i.e., w et w' sont égaux. Ceci montre que l'application de $\mathscr{W}_{M_Q}^M$ dans l'ensemble des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^{M_Q})$-doubles classes de $W_\emptyset$ est injective. Donc, on peut choisir un ensemble $\mathscr{W}_{M_Q}$ de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^{M_Q})$-doubles classes de $W_\emptyset$ contenant $\mathscr{W}_{M_Q}^M$.

De plus, il existe une surjection naturelle de l'ensemble des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^{M_Q})$-doubles classes de $W_\emptyset$ sur celui des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-doubles classes de $W_\emptyset$.

On peut donc choisir un ensemble de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ pour les $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-doubles classes de $W_\emptyset$, $\mathscr{W}_M$, contenant e_G et contenu dans $\mathscr{W}_{M_Q}$. Notons que l'intersection $\mathscr{W}_{M_Q}^M \cap \mathscr{W}_M$ est réduit à e_G.

Si S est une partie de G et x un élément de G, on pose $S^x = xSx^{-1}$.

Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}^d$ (resp. $\mathfrak{a}_\emptyset$) et $v \in W(\mathfrak{a}^d)$ (resp.

$v \in W_{\emptyset}$). Si $\lambda \in E^*$, $v\lambda$ désigne l'élément de $(E^v)^*$ (où $E^v = \operatorname{Ad} v(E)$) défini par:

$$(v\lambda)(\operatorname{Ad} v(X)) = \lambda(X) \qquad (X \in E).$$

PROPOSITION 6.0.1. *Soit* (δ, V_δ) *une représentation unitaire irréductible de* M_Q. *Soit* $\lambda \in (\mathfrak{a}_{P_Q})^*_{\mathbb{C}}$ *vérifiant* (54) *pour* P_Q (*en prenant pour* P (*resp.* Q) P_Q (*resp.* $(\bar{P})_Q$)), *de sorte que* $\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)$ *est donné par une intégrale, et tel que* $\operatorname{Re}\lambda - \rho_{P_Q}$ *soit strictement* Σ_{P_Q}-*dominant*.

Soit $v \in \mathcal{W}_P$. *Pour* $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ *et* $\eta \in \mathcal{V}(\delta)_{\mathcal{W}^M_{M_Q}}$, *la limite, quand t tend vers* $+\infty$, *de*

$$e^{(v\lambda - \rho_{P^v})(tX)} E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(g \exp(tX)H)$$

(i) *est nulle, si* $v \neq e_G$, *pour tout* $g \in G$ *et* $X \in \mathfrak{a}^v$ *strictement* $\Sigma_{\overline{P^v}}$-*dominant*,

(ii) *est égale, pour* $v = e_G$, *à*:

$$E(Q, \psi_{((\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\otimes \operatorname{Id}_{V_\tau})f)_{|K_M}\otimes\eta}, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q})(gM \cap H),$$

pour tout $g \in M$ *et* $X \in \mathfrak{a}$ *strictement* $\Sigma_{\bar{P}}$-*dominant*.

Nous avons besoin, pour démontrer la Proposition, d'un lemme technique qui généralise le Lemme 16 de [13]. On rappelle tout d'abord quelques notations introduites dans la Section 5.3 (voir aussi après (59)). On note $(\bar{\pi}^{P_Q}_{\delta,\lambda}, C^\infty(K, \delta))$ la réalisation compacte de la série principale généralisée $(\pi^{P_Q}_{\delta,\lambda}, I^{P_Q}_{\delta,\lambda})$. On rapelle que l'application *restriction à K* est un isomorphisme de $I^{P_Q}_{\delta,\lambda}$ sur $C^\infty(K, \delta)$, que, pour $\varphi \in C^\infty(K, \delta)$, $\varphi^{P_Q}_\lambda$ désigne l'image de φ dans $I^{P_Q}_{\delta,\lambda}$, et que $\bar{j}(P_Q, \delta, \lambda, \eta)$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta)_{\mathcal{W}^M_{M_Q}}$, (voir Éq. (56) pour la définition de cet espace), est la forme linéaire continue correspondante au vecteur distribution H-invariant $j(P_Q, \delta, \lambda, \eta)$ de $I^{P_Q}_{\delta,\lambda}$ (voir après (59) pour plus de détails).

LEMME 15. *On conserve ici les notations et hypothèses de la Proposition* 6.0.1. *Alors, pour* $\varphi \in C^\infty(K, \delta)$ *et* $\eta \in \mathcal{V}(\delta)_{\mathcal{W}^M_{M_Q}}$, *la limite, quand t tend vers* $+\infty$, *de*

$$e^{(v\lambda - \rho_{P^v})(tX)} \langle \varphi, (\bar{\pi}^{P_Q}_{\delta,\lambda})'(g \exp(tX))\bar{j}(P_Q, \delta, \lambda, \eta)\rangle \tag{67}$$

(i) *est nulle, si* $v \neq e_G$, *pour tout* $g \in G$ *et* $X \in \mathfrak{a}^v$ *strictement* $\Sigma_{\overline{P^v}}$-*dominant*,

(ii) *est égale, pour* $v = e_G$, *à*:

$$\langle (\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\varphi)_{|M}, (\bar{\pi}^Q_{\delta,\lambda_{|\mathfrak{a}_Q}})'(g)\bar{j}(Q, \delta, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q}, \eta)\rangle,$$

pour tout $g \in M$ *et* $X \in \mathfrak{a}$ *strictement* $\Sigma_{\bar{P}}$*-dominant.*

Preuve. Par linéarité, on peut supposer $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$ pour un $w \in \mathscr{W}^M_{M_Q}$, ce que l'on fera dans la suite.

On pose $Y := \mathrm{Ad}\, v^{-1} X$. Avec nos hypothèses, $j(P_Q, \delta, \lambda, \eta)$ est une fonction continue sur G à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$ (cf. [9, Proposition 2]). Donc, pour $g \in G$ et $a = \exp(tY)$, $t > 0$, (67) est égal à:

$$a^{\lambda - \rho_P} \int_{K/K\cap M_Q} \langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gvak), j_\lambda(vk)\rangle\, d\dot{k},$$

en posant $j_\lambda = j(P_Q, \delta, \lambda, \eta)$ et où $d\dot{k}$ est la mesure invariante sur $K/K \cap M_Q$ déduite de dk.

Alors (cf., e.g., [26, Lemme 2.4.5]), cette quantité est égale à

$$a^{\lambda - \rho_P} \int_{\bar{N}_{P_Q}} \langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gva\bar{n}), j_\lambda(v\bar{n})\rangle\, d\bar{n}.$$

Puis, en changeant $\bar{n}$ en $a\bar{n}a^{-1}$, cette quantité est égale à

$$\int_{\bar{N}_{P_Q}} \langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gv\bar{n}), j_\lambda(va^{-1}\bar{n}a)\rangle\, d\bar{n}.$$

On reprend les majorations de la quantité sous le signe intégrale donné dans la démonstration du Lemme 16 de [13]. Nous en redonnons ici les arguments.

Si $va^{-1}\bar{n}a \notin HwP_Q$, $j_\lambda(va^{-1}\bar{n}a) = 0$. Sinon, on voit que:

$$|\langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gv\bar{n}), j_\lambda(va^{-1}\bar{n}a)\rangle| \leqslant a(\bar{n})^{-2\rho_{P_Q}} |\langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gvk(\bar{n})), \delta'(m(\bar{n})m_0^{-1})\eta\rangle|,$$

où $va^{-1}\bar{n}a = h_0 w m_0 a_0 n_0$ (resp. $\bar{n} = k(\bar{n})m(\bar{n})a(\bar{n})n(\bar{n})$) avec $h_0 \in H$, $m_0 \in M_{P_Q}$, $a_0 \in A_{P_Q}$, $n_0 \in N_{P_Q}$ (resp. $k(\bar{n}) \in K$, $m(\bar{n}) \in \exp(\mathfrak{m}_{P_Q} \cap \mathfrak{s})$, $a(\bar{n}) \in A_{P_Q}$, $n(\bar{n}) \in N_{P_Q}$).

Comme g et v sont fixés, l'ensemble $\{\varphi_\lambda^{P_Q}(gvk(\bar{n})) \mid \bar{n} \in \bar{N}_{P_Q}\}$ est un sous-ensemble relativement compact de V_δ^∞, d'après la continuité de la fonction $\varphi_\lambda^{P_Q}$ et la compacité de K.

Procédant comme dans la démonstration du Lemme 16 de [13], on déduit de ce qui précède qu'il existe $C > 0$ tel que:

$$|\langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gv\bar{n}), j_\lambda(v\exp(-tY)\bar{n}\exp(tY))\rangle| \leqslant Ca(\bar{n})^{-2\rho_{P_Q}},$$

$$\text{pour tout } \bar{n} \in \bar{N}_{P_Q}, t > 0. \tag{68}$$

Comme $X \in \mathfrak{a}^v$ est strictement $\Sigma_{\overline{P^v}}$-dominant, $Y \in \mathfrak{a}$ est strictement $\Sigma_{\bar{P}}$-dominant. Il est clair que, quand t tend vers $+\infty$, on a, pour tout $\bar{n}_P \in \bar{N}_P$, $\exp(-tY)\bar{n}_P \exp(tY)$ qui tend vers e_G. Comme $\exp(-tY)$ commute avec $\bar{N}_Q$ (Y appartenant à $\mathfrak{a}$ et $\bar{N}_Q$ étant contenu dans M), on a:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty} \langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gv\bar{n}), j_\lambda(v \exp(-tY)\bar{n} \exp(tY))\rangle \\ &\quad = \langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gv\bar{n}_Q\bar{n}_P), j_\lambda(v\bar{n}_Q)\rangle, \\ &\text{pour tout } \bar{n} = \bar{n}_Q\bar{n}_P, \text{ avec } \bar{n}_Q \in \bar{N}_Q \text{ et } \bar{n}_P \in \bar{N}_P. \end{aligned} \tag{69}$$

La majoration (68) (que l'on appliquera au second membre de (69) avec $\bar{n} = \bar{n}_Q\bar{n}_P$) permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il résulte alors de (69) et de ce qui précède, que la limite de (67), quand t tend vers $+\infty$, est égale à:

$$\int_{\bar{N}_Q\times\bar{N}_P} \langle \varphi_\lambda^{P_Q}(gv\bar{n}_Q\bar{n}_P), j_\lambda(v\bar{n}_Q)\rangle \, d\bar{n}_Q \, d\bar{n}_P. \tag{70}$$

Supposons $v \neq e_G$. Montrons que $v\bar{n}_Q \notin HwP_Q$. Supposons le contraire. Alors $v\bar{n}_Q \in HwP_Q$, i.e., $v \in HwP_Q\bar{n}_Q^{-1}$. Mais $P_Q \subset P$ et $\bar{n}_Q^{-1} \in M_P \subset P$. Donc $v \in HwP$. Mais l'hypothèse sur w ($w \in \mathcal{W}_{M_Q}^M$) montre que $HwP = HP$. Mais alors $v \in HP$ et donc $v = e_G$, d'après la définition de $\mathcal{W}_P$. Une contradiction qui achève de prouver $v\bar{n}_Q \notin HwP_Q$. Alors on a, d'après les propriétés caractérisant les fonctions j:

$$j_\lambda(v\bar{n}_Q) = 0, \qquad \text{pour tout } \bar{n}_Q \in \bar{N}_Q.$$

Donc, compte tenu de (70), si $v \neq e_G$, la limite de (67) est nulle. D'où (i).

Supposons désormais que $v = e_G$ (en particulier, $P^v = P$ et $X = Y$) et $g = m \in M$. Calculons l'intégrale (70).

Comme $\int_{\bar{N}_{P_Q}} a(\bar{n})^{-2\rho_{P_Q}} \, d\bar{n}$ est fini, il résulte du passage à la limite de la majoration (68), grâce à (69), que le Théorème de Fubini s'applique. On a donc:

$$\begin{aligned}&\int_{\bar{N}_Q\times\bar{N}_P} \langle \varphi_\lambda^{P_Q}(m\bar{n}_Q\bar{n}_P), j_\lambda(\bar{n}_Q)\rangle \, d\bar{n}_Q \, d\bar{n}_P \\ &\quad = \int_{\bar{N}_Q} \left\langle \int_{\bar{N}_P} \varphi_\lambda^{P_Q}(m\bar{n}_Q\bar{n}_P) \, d\bar{n}_P, j_\lambda(\bar{n}_Q)\right\rangle d\bar{n}_Q.\end{aligned} \tag{71}$$

Se rappelant la définition de $(\bar{P})_Q$, notre hypothèse sur λ montre que:

$$\int_{\bar{N}_P} \varphi_\lambda^{P_Q}(m\bar{n}_Q\bar{n}_P) \, d\bar{n}_P = (A((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\varphi_\lambda^{P_Q})(m\bar{n}_Q) \qquad (\bar{n}_Q \in \bar{N}_Q),$$

où l'intégrale de gauche est bien définie.

Montrons que:

$$j(P_Q, \delta, \lambda, \eta)_{|M} = j(Q, \delta, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q}, \eta). \tag{72}$$

Comme $\operatorname{Re} \lambda - \rho_{P_Q}$ est strictement Σ_{P_Q}-dominant, $\operatorname{Re} \lambda_{|\mathfrak{a}_Q} - \rho_Q$ est strictement Σ_Q-dominant. Alors les deux membres de (72) sont des fonctions continues sur M, invariantes à droite par H et ayant les mêmes propriétés de covariance sous Q. La réunion des $(H \cap M, Q)$-doubles classes ouvertes étant dense dans M (cf., e.g., [9, Lemme 2]), il suffit de voir l'égalité des deux membres de (72) sur $\bigcup_{\mathcal{W}^M_{M_Q}} H \cap MwQ$ (cf. loc.cit., Lemme 3), ce qui résulte immédiatement de la définition des fonctions j.

On voit aisément que $(A((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\varphi_\lambda^{P_Q})_{|M} \in I^Q_{\delta, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q}}$.

Comme $\bar{N}_Q$ est contenu dans M, il résulte alors de (71) et (72) que (70) est égal à:

$$\int_{\bar{N}_Q} \langle (A((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\varphi_\lambda^{P_Q})_{|M}(m\bar{n}_Q), j(Q, \delta, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q}, \eta)(\bar{n}_Q)\rangle \, d\bar{n}_Q. \tag{73}$$

Grâce à la $K \cap M_Q$-invariance à droite du terme sous le signe intégrale de (73), on voit (cf. [26, Lemme 2.4.5]) que (70) est égal à:

$$\int_{K_M} \langle (A((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\varphi_\lambda^{P_Q})_{|M}(mk_M), j(Q, \delta, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q}, \eta)(k_M)\rangle \, dk_M,$$

c'est à dire

$$\langle (\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\varphi)_{|M}, (\bar{\pi}^Q_{\delta, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q}})'(m)\bar{j}(Q, \delta, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q}, \eta)\rangle.$$

Donc (67) a bien la limite voulue en (ii). ∎

Preuve de la Proposition 6.0.1. On écrit $f = \sum_i \varphi_i \otimes v_i$ avec $\varphi_i \in C^\infty(K, \delta)$ et $v_i \in V_\tau$ et où la somme est finie.

Soit $v \in \mathcal{W}_P$. On rappelle le lien entre les vecteurs distributions H-invariants et les intégrales d'Eisenstein (cf. [10, Éq. (3.4)]). On a l'égalité suivante:

$$E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, v)(gH) = \langle (\bar{\pi}^{P_Q}_{\delta, v})'(g)\bar{j}(P_Q, \delta, v, \eta), f\rangle,$$

où la définition de l'application $f \otimes \eta \mapsto \psi_{f\otimes\eta}$ est donnée dans (60).

Alors, pour $g \in G$, $t > 0$ et $X \in \mathfrak{a}^v$ comme dans l'énoncé:

$$\begin{aligned} &e^{(v\lambda - \rho_{Pv})(tX)} E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, v)(g\exp(tX)H) \\ &= \sum_i e^{(v\lambda - \rho_{Pv})(tX)} \langle \varphi_i, (\bar{\pi}^{P_Q}_{\delta, v})'(g\exp(tX))\bar{j}(P_Q, \delta, v, \eta)\rangle v_i. \end{aligned}$$

Le premier membre admet donc la limite voulue en (i) (resp. (ii)), grâce au Lemme 15(i) (resp. (ii)) et à [10, Éq. (3.4)]. ∎

Corollaire de la Proposition 6.0.1. *Soit* (δ, V_δ) *une représentation unitaire irréductible de* M_Q. *Soit* $\lambda \in (\mathfrak{a}_{P_Q})^*_{\mathbb{C}}$ *vérifiant* (54) *pour* P_Q (*en prenant pour* P (*resp.* Q) P_Q (*resp.* $(\bar{P})_Q$)), *et tel que* $\operatorname{Re}\lambda - \rho_{P_Q}$ *soit strictement* Σ_{P_Q}-*dominant.*

Soient $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ *et* $\eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}^M_{M_Q}}$. *Alors*

(i)

$$p_{-\lambda_{|\mathfrak{a}}}(\bar{P}|E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda), m, X)$$

$$= E(Q, \psi_{((\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)\otimes \mathrm{Id}_{V_\tau})f)_{|K_M}\otimes\eta}, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q})(mM\cap H) \qquad (m \in M,\ X \in \mathfrak{a})$$

et, pour tout $v \in \mathscr{W}_P$, $v \neq e_G$, $-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v} \notin e(\overline{P^v}, E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda))$.

(ii) *Si, de plus,* λ *est tel que* $\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)^{-1}$ *soit défini, alors*:

$$p_{-\lambda_{|\mathfrak{a}}}(\bar{P}|E(P_Q, \psi_{(\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)^{-1}\otimes \mathrm{Id}_{V_\tau})f\otimes\eta}, \lambda), m, X)$$

$$= E(Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q})(mM\cap H) \qquad (m \in M,\ X \in \mathfrak{a})$$

et $-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v}$ *n'est pas un exposant asymptotique le long de* $\overline{P^v}$ *de l'intégrale d'Eisenstein* $E(P_Q, \psi_{(\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)^{-1}\otimes \mathrm{Id}_{V_\tau})f\otimes\eta}, \lambda)$, *et ceci pour tout* $v \in \mathscr{W}_P$, $v \neq e_G$.

Preuve. On dispose du développement asymptotique au sens de (20) de $E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)$ le long de $\overline{P^v}$, $v \in \mathscr{W}_P$, car $E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda) \in \mathscr{A}(G/H, \tau)$ (cf. Proposition 3.2.1).

On fixe $X \in \mathfrak{a}^+_{\bar{P}}$ et, pour $v \in \mathscr{W}_P$, on pose $X_v := \operatorname{Ad} v(X)$. On a $X_v \in \mathfrak{a}^+_{\overline{P^v}}$. Comme $\Sigma_{P^v} = \{v\alpha \mid \alpha \in \Sigma_P\}$, il résulte du fait que $\operatorname{Re}\lambda - \rho_{P_Q}$ est strictement Σ_{P_Q}-dominant, qui implique, par restriction à $\mathfrak{a}$ que $\operatorname{Re}\lambda_{|\mathfrak{a}} - \rho_P$ est strictement Σ_P-dominant, que $(\operatorname{Re} v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v} - \rho_{P^v}$ est strictement Σ_{P^v}-dominant. Comme $X_v \in \mathfrak{a}^+_{\overline{P^v}}$, on a donc $(-\operatorname{Re} v\lambda + \rho_{P^v})(X_v) > 0$.

On fixe $N < 0$ et on pose

$$S_v := \{\xi \in e(\overline{P^v}, E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)) \mid (\operatorname{Re}\xi + \rho_{P^v})(X_v) \geqslant N\}.$$

Alors, comme $e(\overline{P^v}, E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda))$ est contenu dans l'ensemble $S_{\overline{P^v}} - \mathbb{N}.\Sigma_{\overline{P^v}}$, donné dans (20), et comme $S_{\overline{P^v}}$ est fini,

$$S_v \text{ est un ensemble fini.} \tag{74}$$

On fixe $g \in G$ et $m \in M$. On pose, pour $v \in \mathcal{W}_P$, $v \neq e_G$,

$$f_{1,v}(t) \coloneqq \textstyle\sum_{\xi \in S_v} p_\xi(\overline{P^v}|E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda), g, tX_v)e^{(\xi+\rho_{P^v})(X_v)t},$$
$$f_v(t) \coloneqq E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(g\exp(tX_v)H),$$

et

$$f_{1,e_G}(t) \coloneqq \sum_{\xi \in S_{e_G}} p_\xi(\bar{P}|E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda), m, tX)e^{(\xi+\rho_P)(X)t} - E(Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q})(mM \cap H)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)t},$$

$$f_{e_G}(t) \coloneqq E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(m\exp(tX)H) - E(Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q})(mM \cap H)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)t}.$$

D'après (74), les sommes données ci-dessus sont des sommes finies.

On se ramène tout d'abord à étudier le comportement asymptotique (i.e., quand t tend vers $+\infty$) des fonctions en t, f_v, $v \in \mathcal{W}_P$. Il résulte de la définition des développements asymptotiques (cf. [3, Section 3]), compte tenu que $\mathcal{W}_P$ est fini, qu'il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $v \in \mathcal{W}_P$:

$$\|f_v(t) - f_{1,v}(t)\| \leqslant Ce^{(N-\epsilon)t}. \tag{75}$$

De plus, il résulte de la Proposition 6.0.1 et de la définition de f_v ($v \in \mathcal{W}_P$) que:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(v\lambda-\rho_{P^v})(X_v)t} f_v(t) = 0. \tag{76}$$

On déduit de (75), (76) et du fait que $N < 0$, que:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(v\lambda-\rho_{P^v})(X_v)t} f_{1,v}(t) = 0. \tag{77}$$

Rappelons maintenant ce que dit la Proposition A.2.1(ii) de [11].

Soit $\phi_{s,m}$, $s \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, une famille finie de fonctions de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ telles que $\lim_{t\to+\infty} \phi_{s,m}(t) \neq 0$. On pose, pour $t \in]1, +\infty[$,

$$\phi(t) \coloneqq \sum_{s,m} \phi_{s,m}(t)t^m e^{-st}.$$

La Proposition A.2.1(ii) de [11] dit que, s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{lt}\phi(t) = 0,$$

on a $\operatorname{Re} s > l$, pour tout s intervenant dans l'expression de ϕ. Il résulte de (77), joint au fait que S_v, $v \in \mathcal{W}_P$, est fini, que la Proposition A.2.1(ii) de [11] s'applique à $f_{1,v}$. Cette dernière permet de dire que, si $\xi \in S_v \cup \{-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v}\}$, $v \in \mathcal{W}_P$, est tel que le coefficient dans l'expression de $f_{1,v}(t)$ correspondant à l'exponentielle $e^{(\xi+\rho_{P^v})(X_v)t}$ soit de limite non nulle quand t tend vers $+\infty$, on a:

$$\operatorname{Re} \xi(X) + \rho_{P^v}(X_v) < -(\operatorname{Re} v\lambda)(X_v) + \rho_{P^v}(X_v).$$

En particulier, ceci implique que le coefficient dans l'expression de $f_{1,v}(t)$, $v \in \mathcal{W}_P$, correspondant à l'exponentielle $e^{(-v\lambda+\rho_{P^v})(X_v)t}$ est alors de limite nulle quand t tend vers $+\infty$.

Autrement dit, compte tenu de la définition de $f_{1,v}$, $v \in \mathcal{W}_P$, on obtient que $-(v\lambda)$, $v \in \mathcal{W}_M$, $v \neq e_G$, (resp. $-\lambda$) n'est pas un exposant asymptotique le long de $X_v \in \mathfrak{a}^+_{P^v}$ (resp. $X \in \mathfrak{a}^+_P$) de la fonction

$$\begin{aligned} &g \mapsto E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(g(\exp X)H), \\ &(\text{resp. } m \mapsto E(P_Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(m(\exp X)H) \\ &\qquad\qquad - E(Q, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q})(mM \cap H)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)}). \end{aligned}$$

Alors, (i) en résulte par unicité du développement asymptotique.

Le point (ii) est une conséquence immédiate de (i). ∎

7. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES FAMILLES HOLOMORPHES DE FONCTIONS $\mathbb{D}(G/H)$-FINIES

On se propose ici de généraliser des résultats des Sections 11, 12 de [1] sur les propriétés asymptotiques de familles holomorphes de fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-propres à des familles holomorphes de fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-propres généralisées. Pour une très grande partie, nous utiliserons, dans les démonstrations, des techniques employées dans [1].

7.1. On suppose provisoirement que G est connexe

On fixe un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}_0$ de $\mathfrak{s}$. Soit Σ_0 le système de racines de $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{g}$ et on fixe un système de racines positives Σ_0^+. On note Δ l'ensemble des racines simples dans Σ_0^+. Soit $W_0 = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$ et γ_0 l'isomorphisme de Harish-Chandra de $\mathbb{D}(G/K)$ sur $\mathscr{A} := S(\mathfrak{a}_0)^{W_0}$. On a (cf., e.g., [19, Section 3, Théorème 3.1]):

$$\mathscr{A} = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_l],$$

avec $p_1,\ldots,p_l$ des éléments de $S(\mathfrak{a}_0)^{W_0}$ homogènes, algébriquement indépendants.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On note $\mathscr{A}_n$ le sous-espace de $\mathscr{A}$ engendré par les polynômes en $p_1,\ldots,p_l$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Soit $\lambda\in\mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$. Soient $\mathscr{I}_\lambda:=\{v\in\mathscr{A}|\, v(\lambda)=0\}$, $I_\lambda:=\gamma_0^{-1}(\mathscr{I}_\lambda)$ et $\tilde{p}_{\lambda,n}$ la projection canonique de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}/\mathscr{I}_\lambda^n$. Alors:

$$\text{la restriction de } \tilde{p}_{\lambda,n} \text{ à } \mathscr{A}_n \text{ est un isomorphisme de } \mathscr{A}_n \text{ sur } \mathscr{A}/\mathscr{I}_\lambda^n. \tag{78}$$

On note $\mathscr{A}_{n,\lambda}$ la structure d'algèbre sur $\mathscr{A}_n$ obtenue par transport de structure de celle de $\mathscr{A}/\mathscr{I}_\lambda^n$ à l'aide de $\tilde{p}_{\lambda,n}$ et $\tilde{\chi}_{\lambda,n}$ la représentation de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}_{n,\lambda}$.

On note $\mathbb{D}_n:=\gamma_0^{-1}(\mathscr{A}_n)$. On notera $\tilde{\mathbb{D}}_n\subset U(\mathfrak{g})$, un sous-espace de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$, contenant $1_{U(\mathfrak{g})}$, qui s'envoie bijectivement sur $\mathbb{D}_n$ sous la projection canonique de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ dans $\mathbb{D}(G/K)$. On identifie ici $\mathbb{D}(G/K)$ à $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}/U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}\cap U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$. On notera $D\mapsto\tilde{D}$ l'application canonique de $\mathbb{D}_n$ dans $\tilde{\mathbb{D}}_n$. On note $\mathbb{D}_{\lambda,n}$ la structure d'algèbre obtenue par transport de structure de celle de $\mathscr{A}_{n,\lambda}$ par γ_0 et $p_{\lambda,n}$ la projection canonique de $\mathbb{D}(G/K)$ sur $\mathbb{D}(G/K)/I_\lambda^n$.

Il résulte des définitions et de (78) que la restriction de $p_{\lambda,n}$ à $\mathbb{D}_n$ est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{D}_{\lambda,n}$ et $\mathbb{D}(G/K)/I_\lambda^n$. On note $\chi_{\lambda,n}$ la représentation de $\mathbb{D}(G/K)$ sur $\mathbb{D}_n$ obtenue par transport de structure de la représentation naturelle sur $\mathbb{D}(G/K)/I_\lambda^n$ par $p_{\lambda,n}$.

Soit F un sous-ensemble de Δ. On note P_F le sous-groupe parabolique standard associé, $P_F=M_FA_FN_F$ sa décomposition de Langlands, $L_F:=M_FA_F$ et $\bar{N}_F:=\theta(N_F)$. Si $F=\emptyset$, on utilisera l'indice 0 au lieu de $\emptyset$. Alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}_0\oplus\bar{\mathfrak{n}}_0$ est une décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes W_0-harmoniques de $S(\mathfrak{a}_0)$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$ et $\lambda\in\mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$,

$$\begin{aligned} \mathscr{Y}_n &:= U(\bar{\mathfrak{n}}_0)\otimes E\otimes\mathbb{D}_n,\\ \text{et}\quad Y_{\lambda,n} &:= (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})\otimes_{\mathbb{D}(G/K)}\mathbb{D}_{\lambda,n}, \end{aligned}\tag{79}$$

où $\mathscr{Y}_n$ est regardé comme $U(\bar{\mathfrak{n}}_0)$-module à gauche.

D'après le Corollaire 11.4 de [1], l'application linéaire $\phi_{\lambda,n}$ de $\mathscr{Y}_n$ dans $Y_{\lambda,n}$, induite par $x\otimes e\otimes w\mapsto xe\otimes w$ est un isomorphisme de $U(\bar{\mathfrak{n}}_0)$-modules à gauche. Comme $Y_{\lambda,n}$ est un $(\mathfrak{g},K)$-module admissible de type fini (utiliser [26, Corollaire 3.4.7]), on construit une $(\mathfrak{g},K)$-représentation sur $\mathscr{Y}_n$ par transport de structure à l'aide de $\phi_{\lambda,n}^{-1}$. On notera $\pi_{\lambda,n}$ les représentations de $\mathfrak{g}$ et K correspondantes.

On fixe $F\subset\Delta$. Comme L_F normalise $\bar{\mathfrak{n}}_F$, les espaces quotients $Y_{\lambda,n}^j:=Y_{\lambda,n}/\bar{\mathfrak{n}}_F^jY_{\lambda,n}$, $n\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathfrak{a}_{0\,\mathbb{C}}^*$, $j\geqslant1$, sont des $(\mathfrak{l}_F,K\cap L_F)$-modules admissibles de type fini (cf., e.g., [26, Lemme 4.3.1] qui s'étend facilement du cas $j=1$ au cas général).

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, $j \geqslant 1$, $\mathscr{Y}_n^j := \mathscr{Y}_n / \bar{\mathfrak{n}}_F^j \mathscr{Y}_n$ et $\pi_{\lambda,n}^j$ sa structure de $(\mathfrak{l}_F, K \cap L_F)$-module issue de $\pi_{\lambda,n}$.

LEMME 16. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $j \geqslant 1$. La famille $(\pi_{\lambda,n}^j)_{\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*}$ est une famille de $(\mathfrak{l}_F, K \cap L_F)$-modules de Harish-Chandra dans $\mathscr{Y}_n^j$ au sens de* [1, *Définition* 11.1].

Preuve. Montrons que la famille $(\chi_{\lambda,n})_{\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*}$ est une famille polynômiale de représentations de $\mathbb{D}(G/K)$.

Par transport de structure par γ_0, il suffit de voir que $(\tilde{\chi}_{\lambda,n})_{\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*}$ est une famille holomorphe de représentations de $\mathscr{A}$.

On identifie $\mathscr{A}$ à $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l]$ grâce à $p_1, \ldots, p_l$. On pose, pour $i = 1, \ldots, l$, $x_i(\lambda) = p_i(\lambda)$ et $x(\lambda) = (x_1(\lambda), \ldots, x_l(\lambda))$. Alors, pour p, $q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l]$,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{\lambda,n}(p)q = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{n_1+\cdots+n_l=k} \Big(& \frac{1}{n_1! \ldots n_l!} \frac{\partial^k}{\partial X_1^{n_1} \ldots \partial X_l^{n_l}} (pq)(x(\lambda)) \\ & \times (X_1 - x_1(\lambda))^{n_1} \cdot (X_l - x_l(\lambda))^{n_l} \Big). \end{aligned}$$

L'assertion en résulte en tenant compte de [1, Proposition 11.6]. ∎

Soit Γ l'application de $U(\bar{\mathfrak{n}}_0) \otimes E \otimes \mathbb{D}(G/K)$ dans $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ induite par $u \otimes e \otimes D \mapsto ueD$. D'après [21, Proposition 5.2], l'application Γ est un isomorphisme de $U(\bar{\mathfrak{n}}_0)$-modules à gauche et de $\mathbb{D}(G/K)$-modules à droite.

On note m l'application de $\mathscr{Y}_n$ dans $U(\mathfrak{g})$ définie par:

$$m(u \otimes e \otimes D) = ue\tilde{D},$$

qui est surjective.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \geqslant 1$. D'après le Lemme 16, la famille $(\pi_{\lambda,n}^j)_{\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*}$ est polynômiale au sens de [1, Définition 11.1]. Par application du Lemme 11.2 de loc.cit. à la famille $(\pi_{\lambda,n}^j)_{\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*}$, on voit qu'il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie $\bar{\mathscr{V}}_j$ de $\mathscr{Y}_n^j$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, le sous-espace des vecteurs $K \cap L_F$-invariants sous $\pi_{\lambda,n}^j$, noté $\mathscr{Y}_n^j(\lambda, 1)$, soit contenu dans $\bar{\mathscr{V}}_j$. On note $\tilde{\mathscr{V}}_j$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{Y}_n$ de dimension finie qui s'envoie bijectivement sur $\bar{\mathscr{V}}_j$ sous la projection canonique $p_{n,j}$ de $\mathscr{Y}_n$ sur $\mathscr{Y}_n^j$ et qui contient $1 \otimes 1 \otimes 1$. On pose $\mathscr{V}_j := m(\tilde{\mathscr{V}}_j)$. Soit $\eta : \mathscr{V}_j \to \tilde{\mathscr{V}}_j$ l'inverse de l'isomorphisme linéaire $m_{|\tilde{\mathscr{V}}_j}$ de $\tilde{\mathscr{V}}_j$ sur $\mathscr{V}_j$ et on pose $\xi := p_{n,j} \circ \eta$. Donc ξ est un isomorphisme linéaire de $\mathscr{V}_j$ sur $\bar{\mathscr{V}}_j$.

On a l'analogue de la Proposition 11.7 de [1].

LEMME 17. *Soit $j \geqslant 1$. Il existe:*

(i) *un endomorphisme $x_{\lambda,n} \in \mathrm{End}(\mathscr{V}_j)$ dépendant polynômialement de $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$ et tel que $x_{\lambda,n}(1_{U(\mathfrak{g})}) = 1_{U(\mathfrak{g})}$,*

(ii) *un homomorphisme d'algèbres $b_{n,j}(\lambda, .)$ de $U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}$ dans $\mathrm{End}(\mathscr{V}_j)$ dépendant polynômialement de $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\,\mathbb{C}}^*$ et*

(iii) *une application bilinéaire*

$$y_{\lambda,n} : U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F} \times \mathscr{V}_j \to \bar{\mathfrak{n}}_F^j U(\bar{\mathfrak{n}}_0 + \mathfrak{a}_0)$$

dépendant polynômialement de $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, tels que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\,\mathbb{C}}^*$, $D \in U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}$ et $v \in \mathscr{V}_j$:

$$D x_{\lambda,n}(v) \equiv x_{\lambda,n}(b_{n,j}(\lambda, D)v) + y_{\lambda,n}(D, v) \text{ modulo } J_{\lambda,n},$$

où $J_{\lambda,n}$ est l'idéal à gauche dans $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{k}$ et $q^{-1}(I_\lambda^n)$, q désignant la projection de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ sur $\mathbb{D}(G/K) \simeq U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}/U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} \cap U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$.

Preuve. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, on note $P_{\lambda,n}$ la projection dans $\mathscr{Y}_n^j$ sur le sous-espace $\mathscr{Y}_n^j(\lambda, 1)$ des vecteurs $K \cap L_F$-invariants sous $\pi_{\lambda,n}^j$, parallèlement aux autres composantes. Comme, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, $\mathscr{Y}_n^j(\lambda, 1) \subset \bar{\mathscr{V}}_j$, $P_{\lambda,n}$ envoie $\mathscr{Y}_n^j$ sur $\bar{\mathscr{V}}_j$. On pose, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, $\bar{x}_{\lambda,n} := P_{\lambda,n\,|\bar{\mathscr{V}}_j}$. On montre, comme dans la preuve du Lemme 11.2 de [1], que $\bar{x}_{\lambda,n}$ est polynômiale en λ.

On définit, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, un homomorphisme d'algèbres $\bar{b}_{n,j}(\lambda, .)$ de $U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}$ dans $\mathrm{End}(\bar{\mathscr{V}}_j)$ par:

$$\bar{b}_{n,j}(\lambda, D) := P_{\lambda,n} \circ \pi_{\lambda,n}^j(D) \circ P_{\lambda,n\,|\bar{\mathscr{V}}_j} \; (D \in U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}).$$

On a alors d'après le Lemme 16 et ce qui précède que $\bar{b}_{n,j}(\lambda, D)$, $D \in U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}$, a une dépendance polynômiale en λ.

Tenant compte du fait que $P_{\lambda,n}$ commute avec $\pi_{\lambda,n}^j(D)$, $D \in U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}$, on a:

$$\pi_{\lambda,n}^j(D) \circ \bar{x}_{\lambda,n} = \bar{x}_{\lambda,n} \circ \bar{b}_{n,j}(\lambda, D) \quad (D \in U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}). \tag{80}$$

Pour $j \geqslant 1$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$ et $D \in U(\mathfrak{l}_F)^{K \cap L_F}$, on pose:

$$\begin{aligned} x_{\lambda,n} &:= \xi^{-1} \circ \bar{x}_{\lambda,n} \circ \xi \in \mathrm{End}(\mathscr{V}_j) \\ \text{et} \quad b_{n,j}(\lambda, D) &:= \xi^{-1} \circ \bar{b}_{n,j}(\lambda, D) \circ \xi \in \mathrm{End}(\mathscr{V}_j). \end{aligned} \tag{81}$$

On note $1_{\mathscr{Y}_n}$ l'élément $1 \otimes 1 \otimes 1$ de $\mathscr{Y}_n$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$, l'application p_λ^n de $U(\mathfrak{g})$ dans $\mathscr{Y}_n$, qui associe à u, $\pi_{\lambda,n}(u)1_{\mathscr{Y}_n}$, est surjective. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$. On pose, pour $v \in \mathscr{V}_j$:

$$\tilde{y}_{\lambda,n}(D, v) := p_\lambda^n(D x_{\lambda,n}(v) - x_{\lambda,n}(b_{n,j}(\lambda, D)v)) \in \mathscr{Y}_n. \tag{82}$$

Alors:

$$\tilde{y}_{\lambda,n}(D,v) = \pi_{\lambda,n}(D)(\eta \circ x_{\lambda,n})(v) - (\eta \circ x_{\lambda,n})(b_{n,j}(\lambda,D)v). \tag{83}$$

Il résulte de (80), (81) et (83) que:

$$p_{n,j}(\tilde{y}_{\lambda,n}(D,v)) = 0. \tag{84}$$

On pose:

$$y_{\lambda,n}(D,v) := m(\tilde{y}_{\lambda,n}(D,v)). \tag{85}$$

On vérifie aisément que l'application $p_\lambda^n \circ m$ est l'identité sur $\mathcal{Y}_n$. Donc Éq. (85) implique que:

$$p_\lambda^n(y_{\lambda,n}(D,v)) = \tilde{y}_{\lambda,n}(D,v). \tag{86}$$

Il résulte de (84) que $y_{\lambda,n}(D,v) \in \bar{\mathfrak{n}}^j U(\bar{\mathfrak{n}}_0 + \mathfrak{a}_0)$. Tenant compte de (82) et (86), on a alors:

$$Dx_{\lambda,n}(v) - x_{\lambda,n}(b_{n,j}(\lambda,D)v) - y_{\lambda,n}(D,v) \in \mathrm{Ker}(p_\lambda^n). \tag{87}$$

Soient $J_{\lambda,n}$ comme dans l'énoncé et $J'_{\lambda,n}$ le noyau de p_λ^n. Ils contiennent tous les deux $U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$. On voit facilement que la projection de $J'_{\lambda,n}$ dans $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ est égale à l'image par l'isomorphisme Γ de $U(\bar{\mathfrak{n}}_0) \otimes E \otimes I_\lambda^n$. Donc $J'_{\lambda,n}$ contient $J_{\lambda,n}$, car il contient les générateurs de $J_{\lambda,n}$. Mais aussi, $J'_{\lambda,n}$ est contenu dans $J_{\lambda,n}$. Donc $J'_{\lambda,n} = J_{\lambda,n}$. ∎

Soit $\mathfrak{b}$ une algèbre de Lie abélienne réelle. On suppose que X est un espace vectoriel complexe sur lequel $U(\mathfrak{b})$ a une représentation localement finie π, c'est à dire que, pour tout $x \in X$, $\pi(U(\mathfrak{b}))x$ est de dimension finie.

Si $\lambda \in \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$, on note $X(\pi,\lambda)$ le sous-espace des vecteurs propres généralisés pour la valeur propre λ. Soit $\Lambda(\pi)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$ tels que $X(\pi,\lambda) \neq \{0\}$. On a $X = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(\pi)} X(\pi,\lambda)$.

On dit que $\lambda \in \Lambda(\pi)$ est un $\mathfrak{b}$-poids d'ordre fini s'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $H \in \mathfrak{b}$, $(\pi(H) - \lambda(H))^k$ s'annule sur $X(\pi,\lambda)$. Le plus petit k satisfaisant cette propriété est appelé l'ordre de λ et noté $o(\pi,\lambda)$. Si $\lambda \in \Lambda(\pi)$ n'est pas d'ordre fini, on pose $o(\pi,\lambda) = \infty$ et si $\lambda \in \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^* \backslash \Lambda(\pi)$, on pose $o(\pi,\lambda) = 0$.

La preuve du lemme suivant est analogue à celle de la Proposition 11.8 de [1].

Lemme 18. *Soient $j \geqslant 1$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{C}}^*$.*

(i) $\Lambda(b_{n,j}(\lambda,.)_{|\mathfrak{a}_F}) \subset \Lambda((\pi^j_{\lambda,n})_{|\mathfrak{a}_F}) \cup \{0\}$.

(ii) *Si* $\xi \in \Lambda(b_{n,j}(\lambda,.)_{|\mathfrak{a}_F})$, *on a*

$$o(b_{n,j}(\lambda,.)_{|\mathfrak{a}_F},\xi) \leqslant \max\{o((\pi^j_{\lambda,n})_{|\mathfrak{a}_F},\xi),1\}.$$

LEMME 19. *Il existe un entier positif m tel que, pour tout* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{0\mathbb{C}}$ *et* $\xi \in \Lambda((\pi^1_{\lambda,n})_{|\mathfrak{a}_F})$, *on ait* $o((\pi^1_{\lambda,n})_{|\mathfrak{a}_F},\xi) \leqslant m$.

Preuve. Identique à celle du Lemme 11.9 de [1], en remplaçant dans celle-ci $\mathbb{C} \otimes E \otimes \mathbb{C}$ par $\mathbb{C} \otimes E \otimes \mathbb{D}_n$. ∎

On a un analogue de [1, Proposition 11.10].

LEMME 20. *Soient* $j \geqslant 1$ *et* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{0\mathbb{C}}$.
Les poids de $(\pi^j_{\lambda,n})_{|\mathfrak{a}_F}$ *sont tous de la forme* $(w\lambda - \rho_0)_{|\mathfrak{a}_F} - \mu$, *où* $w \in W_0$ *et* μ *s'écrit* $\mu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$, $0 \leqslant l < j$, *avec* $\alpha_i \in \Sigma(\mathfrak{n}_F,\mathfrak{a}_F)$.
Soit Ω *un sous-ensemble de* $\mathfrak{a}^*_{0\mathbb{C}}$ *tel que* $\operatorname{Re}\Omega$ *soit borné. Alors, pour tout* $\mu \in \mathbb{N}.\Sigma(\mathfrak{n}_F,\mathfrak{a}_F)$, *il existe* $d_\mu \geqslant 1$ *tel que, pour tout* $j \geqslant 1$, $w \in W_0$, *et* $\lambda \in \Omega$, *on ait* $o((\pi^1_{\lambda,n})_{|\mathfrak{a}_F},(w\lambda-\rho_0)_{|\mathfrak{a}_F}-\mu) \leqslant d_\mu$.

Preuve. Il existe une filtration de $\mathbb{D}_n$ par des sous-représentations de $\chi_{\lambda,n}$, $\{0\} = \mathbb{D}_{\lambda,n,0} \subset \cdots \subset \mathbb{D}_{\lambda,n,d} = \mathbb{D}_n$, où $d = \dim \mathbb{D}_n$, et les sous-quotients $\mathbb{D}_{\lambda,n,i+1}/\mathbb{D}_{\lambda,n,i}$ sont isomorphes à $\mathbb{D}(G/K)/I_\lambda$ comme $\mathbb{D}(G/K)$-modules. Il en résulte que $Y_{\lambda,n}$ admet une filtration par des sous-$(\mathfrak{g},K)$-modules $Y_{\lambda,n,i} = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{D}(G/K)} \mathbb{D}_{\lambda,n,i}$ dont les sous-quotients sont isomorphes à $Y_{\lambda,1}$. Du fait de l'isomorphisme de $\bar{\mathfrak{n}}_0$-modules entre $Y_{\lambda,n,i}$ et $U(\bar{\mathfrak{n}}_0) \otimes E \otimes \mathbb{D}_{\lambda,n,i}$, la suite de $\bar{\mathfrak{n}}_0$-modules

$$\bar{\mathfrak{n}}^j_F Y_{\lambda,n,i} \to \bar{\mathfrak{n}}^j_F Y_{\lambda,n,i+1} \to \bar{\mathfrak{n}}^j_F(Y_{\lambda,n,i+1}/Y_{\lambda,n,i})$$

est exacte. Donc

$$o((\pi^j_{\lambda,n,i+1})_{|\mathfrak{a}_F},\xi) \leqslant o((\pi^j_{\lambda,n,i})_{|\mathfrak{a}_F},\xi) + o((\pi^j_{\lambda,1})_{|\mathfrak{a}_F},\xi). \tag{88}$$

Or, d'après [1, Proposition 11.10], $o((\pi^j_{\lambda,1})_{|\mathfrak{a}_F},\xi) \neq 0$ implique que ξ est de la forme $(w\lambda-\rho_0)_{|\mathfrak{a}_F} - \mu$ avec $\mu = \sum_{0 \leqslant l < j} \alpha_i$, où les α_i sont des éléments de $\Sigma(\mathfrak{n}_F,\mathfrak{a}_F)$. De plus, si Ω est un sous-ensemble de $\mathfrak{a}^*_{0\mathbb{C}}$ tel que $\operatorname{Re}\Omega$ soit borné, il résulte de loc.cit., Proposition 11.10, qu'il existe $d_\mu \geqslant 1$ tel que $o((\pi^j_{\lambda,1})_{|\mathfrak{a}_F},(w\lambda-\rho_0)_{|\mathfrak{a}_F}-\mu) \leqslant d_\mu$.
Le lemme résulte alors de (88) par une simple récurrence sur i. ∎

7.2. Revenons à G/H

On note $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{k}^d$, $\mathfrak{h}^d$ les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ définies par:

$$\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) + i(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q},$$
$$\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}),\ \mathfrak{h}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}).$$

Alors $\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k}^d \oplus \mathfrak{s}^d$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}^d$, notant $\mathfrak{s}^d = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$. Soit G^d un groupe de Lie réductif réel connexe dans la classe de Harish-Chandra d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^d$ et K^d le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}^d$.

On fixe un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable Q de G de σ-décomposition de Langlands $Q = M_Q A_Q N_Q$ avec $\mathfrak{a}_Q \subset \mathfrak{a}_\emptyset (\subset \mathfrak{a}^d)$. On note $\mathfrak{a}^d_{M_Q}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}^d$.

On fixe un élément Λ de $(\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$. Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G avec $P = M_P A_P N_P$ sa σ-décomposition de Langlands et $\mathfrak{a}_P \subset \mathfrak{a}_\emptyset$. On note, pour $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$:

$$X_P(\Lambda, \lambda) = \{0\} \cup \{\xi_{|\mathfrak{a}_P} |\, \xi \in W(\mathfrak{a}^d)(\Lambda - \lambda) - \rho_P - \mathbb{N}.\Sigma_P\},$$

et on fixe $k \geqslant 1$.

En appliquant les Lemmes 17, 18 et 20 à $(\mathfrak{g}^d, K^d)$, comme dans la Section 12, p. 388, de [1], et en remplaçant le paramètre λ par $\Lambda - \lambda$, on montre qu'il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{V}_k \subset U(\bar{\mathfrak{n}}_P + \mathfrak{l}_P)$ contenant $1_{U(\mathfrak{g})}$ et vérifiant:

Lemme 21. *Il existe*:

(i) *un endomorphisme* $x_{\lambda,n} \in \mathrm{End}(\mathscr{V}_k)$ *dépendant polynômialement de* $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ *et tel que* $x_{\lambda,n}(1_{U(\mathfrak{g})}) = 1_{U(\mathfrak{g})}$ *pour tout* $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$;

(ii) *un homomorphisme d'algèbres* $b_{n,k}(\lambda, .)$ *de* $U(\mathfrak{l}_P)^{K \cap L_P}$ *dans* $\mathrm{End}(\mathscr{V}_k)$ *dépendant polynômialement de* $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ *et*

(iii) *une application bilinéaire*

$$y_{\lambda,n} : U(\mathfrak{l}_P)^{K \cap L_P} \times \mathscr{V}_k \to \bar{\mathfrak{n}}_P^k U(\bar{\mathfrak{n}}_P + \mathfrak{a}_P)$$

dépendant polynômialement de $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, *tels que, pour tout* $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, $D \in U(\mathfrak{l}_P)^{K \cap L_P}$ *et* $v \in \mathscr{V}_k$:

$$D x_{\lambda,n}(v) \equiv x_{\lambda,n}(b_{n,k}(\lambda, D)v) + y_{\lambda,n}(D, v) \ \textit{modulo}\ J_{\Lambda-\lambda,n},$$

où $J_{\Lambda-\lambda,n}$ *est l'idéal à gauche dans* $U(\mathfrak{g})$ *engendré par* $\mathfrak{h}$ *et* $q^{-1}(I^n_{\Lambda-\lambda})$, $I_{\Lambda-\lambda}$ *désignant l'idéal de* $\mathbb{D}(G/H)$ *engendré par* $\{D \in \mathbb{D}(G/H) |\, \gamma_{\mathfrak{a}^d} (D, \Lambda - \lambda) = 0\}$ *et* q *étant la projection de* $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ *sur* $\mathbb{D}(G/H) \simeq U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} / U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap U(\mathfrak{g})\mathfrak{h}$.

(iv) *De plus* $\Lambda(b_{n,k}(\lambda,.)_{|\mathfrak{a}_P}) \subset X_P(\Lambda,\lambda)$ *et il existe une fonction localement bornée* $d:[0,+\infty[\to \mathbb{N}$ *telle que, pour tout* $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, $\xi \in \Lambda(b_{n,k}(\lambda,.)_{|\mathfrak{a}_P})$, *on ait*:

$$o(b_{n,k}(\lambda,.),\xi) \leqslant d(|\operatorname{Re}\lambda| + |\operatorname{Re}\xi|).$$

On note (cf. [4]), pour $r \in \mathbb{R}$ et f une fonction de G dans $\mathbb{C}$,

$$\|f\|_r := \sup_{g\in G} \|g\|^{-r}|f(g)|,$$

où $\|.\|$ est définie dans (35), et $C_r(G)$ l'espace de Banach des fonctions continues $f: G \to \mathbb{C}$ vérifiant $\|f\|_r < \infty$. Cet espace est invariant par la représentation régulière gauche L et droite R (cf. [3, (2.4.5)]). L'espace de Banach des vecteurs de classe C^q pour L de $C_r(G)$ est noté $C^q_r(G)$ et l'espace de Fréchet des vecteurs C^∞ est désigné par $C^\infty_r(G)$. La norme sur $C^q_r(G)$ est notée $\|.\|_{q,r}$.

On fixe $\lambda_0 \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, $X_0 \in \mathfrak{a}^+_P (:= \{X \in \mathfrak{a}_P | \alpha(X) > 0,\ \alpha \in \Sigma_P\})$ et $r \in \mathbb{R}$. On obtient, grâce au Lemme 21, en utilisant les mêmes constructions que celles de la preuve de la Proposition 12.6 de [1], le résultat suivant.

PROPOSITION 7.2.1. *Pour* $N \in \mathbb{R}$, *il existe*:

(i) *un voisinage* Ω *de* λ_0 *dans* $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ *et* U *de* X_0 *dans* $\mathfrak{a}^+_P$;
(ii) *des constantes* j, $q \in \mathbb{N}$, $r' \geqslant r$ *et* C, $\epsilon > 0$;
(iii) *une application continue* Ψ *de* $\Omega \times U$ *à valeurs dans l'espace de Banach des applications linéaires continues de* $C^q_r(G)$ *dans* $\mathcal{V}^*_k \otimes C_{r'}(G)$, *holomorphe dans la première variable et*
(iv) *un élément* $\eta \in \mathcal{V}^{**}_k$
tels que:

(a) $\Psi(\lambda, X)$ *entrelace les actions à gauche de G sur* $C^q_r(G)$ *et* $C_{r'}(G)$ *pour tout* $(\lambda, X) \in \Omega \times U$ *et*
(b) *pour tout* $\lambda \in \Omega$:

$$\|R_{\exp(tX)}f - (\eta \circ \exp(b_{n,k}(\lambda, tX)^t) \otimes 1)\Psi(\lambda, X)f\|_{r'} \leqslant C\|f\|_{q,r}e^{(N-\epsilon)t},$$

pour tout $f \in C^q_r(G)$ *annulé par l'idéal* $I^n_{\Lambda-\lambda}$, $X \in U$ *et* $t \geqslant 0$.

Pour λ_0 et λ éléments de $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, $w_0 \in W(\mathfrak{a}^d)$ et $\mu_0 \in -\mathbb{N}.\Sigma_P$, on note $\Xi^P_{(w_0,\mu_0)}(\lambda, \lambda_0)$ la réunion des ensembles

$$\{0\} \cap \{w_0(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0\}$$

et

$$\{w(\Lambda-\lambda)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu \mid \quad w\in W(\mathfrak{a}^d),\ \mu\in -\mathbb{N}.\Sigma_P \\ \text{et } w(\Lambda-\lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu = w_0(\Lambda-\lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu_0\}.$$

Il résulte de la Proposition 7.2.1 une généralisation du Théorème 12.9 de [1].

PROPOSITION 7.2.2. *Soient* $n\in\mathbb{N}$ *et* Ω_0 *un ouvert de* $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$.

Soit $F\in\mathscr{A}_*(G/H,\Lambda,\Omega_0)_n$ (*cf. Éq.* (37) *pour la définition de cet espace*). *On fixe* $\lambda_0\in\Omega_0$, $w_0\in W(\mathfrak{a}^d)$ *et* $\mu_0\in-\mathbb{N}.\Sigma_P$.

Alors il existe un voisinage Ω de λ_0 *dans* Ω_0 *et une constante* $r\in\mathbb{R}$ *tels que l'application*

$$(\lambda,X)\mapsto \sum_{\xi\in\Xi^P_{(w_0,\mu_0)}(\lambda,\lambda_0)} p_\xi(P|F(\lambda),\cdot,X)e^{(\xi-\rho_P)(X)}$$

soit continue de $\Omega\times\mathfrak{a}_P$ *dans* $C^\infty_r(G)$ *et holomorphe en* λ, *avec pour valeur en* λ_0:

$$p_{w_0(\Lambda-\lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu_0}(P|F(\lambda_0),\cdot,X)e^{(w_0(\Lambda-\lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P}-\rho_P+\mu_0)(X)}.$$

Preuve. Identique à celle de [1, Théorème 12.9], en remplaçant respectivement dans celle-ci τ^k_λ et l'équation (6.16) de loc.cit. par $\pi^k_{\lambda,n+1}$ et la Proposition 7.2.1. ∎

Il résulte immédiatement de la Proposition 7.2.2 un analogue du Corollaire 1 du Lemme 2 de [13].

LEMME 22. *On conserve les notations de la Proposition* 7.2.2.

Soit ξ_0 *un exposant asymptotique de* $F(\lambda_0)$ *le long de* P. *Alors, pour toute suite* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *dans* Ω_0 *tendant vers* λ_0, *il existe une suite* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *dans* $(\mathfrak{a}_P)^*_{\mathbb{C}}$ *qui converge vers* ξ_0 *et telle que* ξ_k *soit un exposant asymptotique de* $F(\lambda_k)$ *le long de* P.

7.3.

Soit P (resp. Q) un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G de σ-décomposition $P=M_PA_PN_P$ (resp. $Q=M_QA_QN_Q$) avec $\mathfrak{a}_P$ (resp. $\mathfrak{a}_Q$) contenue dans $\mathfrak{a}_\emptyset$. (89)

On rappelle que $\mathfrak{a}^d_{M_Q}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}^d$.

Le lemme suivant reprend des arguments de la preuve du Lemme 23 de [13].

LEMME 23. *Soient* $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$ *et* Ω *un ouvert connexe de* $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$. *Soit* $w_0 \in W(\mathfrak{a}^d)$.

Il existe un ouvert dense $\mathcal{O}_{w_0}$ *dans* $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, *produit de* $\mathfrak{a}^*_Q$ *par le complémentaire d'une famille finie de sous-espaces affines de* $i\mathfrak{a}^*_Q$, *tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mu_0 \in -\mathbb{N}.\Sigma_P$ *et* $F \in \mathcal{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$ (*cf. Éq.* (37) *pour la définition de cet espace*), *on ait*

$$\lambda \mapsto p_{w_0(\Lambda-\lambda)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu_0}(P|F(\lambda), x, X)$$

($x \in G/H$, $X \in \mathfrak{a}_P$), *holomorphe sur* $\mathcal{O}_{w_0} \cap \Omega$.

Preuve. Notons $\mathrm{res}_{\mathfrak{a}_P}$ la restriction des applications à $\mathfrak{a}_P$.
On note:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'_{w_0} \quad := \quad & \{\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}} |\ \text{si } \mathrm{res}_{\mathfrak{a}_P} \circ w_{|\mathfrak{a}^*_Q} \neq \mathrm{res}_{\mathfrak{a}_P} \circ w_{0\,|\mathfrak{a}^*_Q} \text{ alors} \\ & \mathrm{Im}(w\Lambda - w_0\Lambda)_{|\mathfrak{a}_P} \neq \mathrm{Im}(w_0\lambda - w\lambda)_{|\mathfrak{a}_P},\ w \in W(\mathfrak{a}^d)\} \end{aligned} \tag{90}$$

et

$$\mathcal{O}_{w_0} := \begin{cases} \mathcal{O}'_{w_0} & \text{si } \mathrm{res}_{\mathfrak{a}_P} \circ w_{0\,|\mathfrak{a}^*_Q} = 0, \\ \{\lambda \in \mathcal{O}'_{w_0} | & \mathrm{Im}\, w_0(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} \neq 0\} \text{ sinon.} \end{cases} \tag{91}$$

Il est clair que $\mathcal{O}_{w_0}$ est un ouvert dense de $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ et le produit de $\mathfrak{a}^*_Q$ par le complémentaire d'une famille finie de sous-espaces affines de $i\mathfrak{a}^*_Q$.

Soit $\lambda_0 \in \mathcal{O}_{w_0} \cap \Omega$. Pour montrer que $\lambda \mapsto p_{w_0(\Lambda-\lambda)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu_0}(P|F(\lambda), x, X)$ ($x \in G/H$, $X \in \mathfrak{a}_P$) est holomorphe en λ_0, il suffit de montrer que, pour $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, l'ensemble $\Xi^P_{(w_0,\mu_0)}(\lambda, \lambda_0)$, défini avant la Proposition 7.2.2, est réduit à $w_0(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0$, ce qui revient à dire que la somme dans la Proposition 7.2.2 se réduit à un seul terme.

Soit $\xi \in \Xi^P_{(w_0,\mu_0)}(\lambda, \lambda_0)$ tel que $\xi \notin \{0\} \cap \{w_0(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0\}$. Il existe $w \in W(\mathfrak{a}^d)$ et $\mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P$ tels que:

$$\xi = w(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \tag{92}$$

$$\text{et} \quad w(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu = w_0(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0. \tag{93}$$

En particulier, on a

$$\mathrm{Im}(w\Lambda - w_0\Lambda)_{|\mathfrak{a}_P} = \mathrm{Im}(w_0\lambda_0 - w\lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P}.$$

Comme $\lambda_0 \in \mathcal{O}_{w_0}$, qui est inclus dans $\mathcal{O}'_{w_0}$, ceci implique que $\mathrm{res}_{\mathfrak{a}_P} \circ w_{|\mathfrak{a}^*_Q} = \mathrm{res}_{\mathfrak{a}_P} \circ w_{0\,|\mathfrak{a}^*_Q}$. On a donc $w\lambda_{|\mathfrak{a}_P} = w_0\lambda_{|\mathfrak{a}_P}$ ce qui implique, d'après (93), que

$wA_{|\mathfrak{a}_P} + \mu = w_0 A_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0$. Tenant compte de (92), on en déduit que $\xi = w_0(A - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0$ comme désiré.

Supposons maintenant que $\xi \in \{0\} \cap \{w_0(A - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0\}$. En particulier $\operatorname{Im} w_0(A - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} = 0$, ce qui implique, compte tenu que $\lambda_0 \in \mathcal{O}_{w_0}$, que $\operatorname{res}_{\mathfrak{a}_P} \circ w_{0\,|\mathfrak{a}_Q^*} = 0$. Comme $w_0(A - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0 = 0$, on a alors $w_0 A_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0 = 0$. De plus, on a aussi $w_0 \lambda_{|\mathfrak{a}_P} = 0$.

Donc $w_0(A - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0 = 0$ qui est égal à ξ comme désiré. Par conséquent, on a bien:

$$\Xi^P_{(w_0,\mu_0)}(\lambda, \lambda_0) = \{w_0(A - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_0\} \qquad (\lambda_0 \in \mathcal{O}_{w_0} \cap \Omega, \quad \lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}).$$

D'où la Proposition. ∎

Les sous-groupes paraboliques P et Q sont fixés comme ci-dessus (cf. (89)).

Lemme 24. *Soit $A \in (\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$. On suppose que Ω est un ouvert connexe de $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, produit d'un ouvert connexe Ω_1 de $\mathfrak{a}^*_Q$, contenant* 0, *par $i\mathfrak{a}^*_Q$.*

Alors il existe un ouvert dense $\mathcal{O}$ dans Ω tel que, pour tout élément F de $\mathcal{A}_*(G/H, \tau, A, \Omega)_n$ ($n \in \mathbb{N}$) tel que $F(\lambda)$ soit tempéré pour $\lambda \in \Omega \cap i\mathfrak{a}^*_Q$, tout $\lambda \in \mathcal{O}$ et tout exposant asymptotique ξ de $F(\lambda)$ le long de P s'écrivant $\xi = w(A - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu$, avec $w \in W(\mathfrak{a}^d)$ et $\mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P$, on ait:

$$\operatorname{Re} wA_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \leqslant_P 0. \tag{94}$$

Preuve. On pose $\mathcal{O}' := \bigcap_{x \in W(\mathfrak{a}^d)} \mathcal{O}_x$, où les $\mathcal{O}_x$ sont donnés par le Lemme 23. C'est un ouvert dense dans $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, produit de $\mathfrak{a}^*_Q$ par un ouvert $\mathcal{O}_1$ de $i\mathfrak{a}^*_Q$, où $\mathcal{O}_1$ est le complémentaire d'une famille finie de sous-espaces affines de $i\mathfrak{a}^*_Q$. L'intersection $\mathcal{O}$ de $\mathcal{O}'$ et Ω vérifie $\mathcal{O} = \Omega_1 \times \mathcal{O}_1$. Une fonction holomorphe sur $\mathcal{O}$ nulle sur $i\mathfrak{a}^*_Q \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ est nulle au voisinage de $\mathcal{O}_1$, donc nulle sur $\mathcal{O}$ car $\{0\} \times \mathcal{O}_1$ a une intersection non vide avec chacune des composantes connexes de $\mathcal{O}$.

Soient ξ, w et μ comme dans l'énoncé. Avec notre choix de $\mathcal{O}$, on a, d'après le Lemme 23, $v \mapsto p_{w(A-v)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu}(P|F(v), x, X)$ $(x \in G/H,\ X \in \mathfrak{a}_P)$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$.

Comme $\xi = w(A - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu$ est un exposant asymptotique de $F(\lambda)$ le long de P, le coefficient asymptotique, $p_{w(A-\lambda)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu}(P|F(\lambda), ., .)$, de $F(\lambda)$ le long de P relatif à l'exposant $w(A - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu$ est non identiquement nul. Il résulte donc de ce qui précède qu'il existe $\lambda_1 \in i\mathfrak{a}^*_Q$ tel que $p_{w(A-\lambda_1)_{|\mathfrak{a}_P}+\mu}(P|F(\lambda_1), ., .)$ soit non identiquement nul, i.e., tel que $\xi_1 := w(A - \lambda_1)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu$ soit un exposant asymptotique de $F(\lambda_1)$ le long de P. Mais, $F(\lambda_1)$ étant tempéré, on a $\operatorname{Re} \xi_1 \leqslant_P 0$ (cf. [13, Définition 2]). On en déduit (94). ∎

Les sous-groupes paraboliques P et Q sont fixés comme ci-dessus (cf. (89)).

LEMME 25. *Soit $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$. On suppose que Ω vérifie les hypothèses du lemme précédent.*

Alors, pout tout $\lambda \in \Omega$ et tout élément F de $\mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$ $(n \in \mathbb{N})$ tel que $F(v)$ soit tempéré pour $v \in \Omega \cap i\mathfrak{a}^*_Q$, tout exposant asymptotique ξ de $F(\lambda)$ le long de P est de la forme:

$$\xi = w(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \text{ avec } w \in W(\mathfrak{a}^d) \text{ et } \mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P$$

$$\text{vérifiant } \operatorname{Re} w\Lambda_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \leqslant_P 0.$$

Preuve. D'après la densité de l'ouvert $\mathcal{O}$ dans Ω (cf. Lemme 24), il existe une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{O}$ convergeant vers λ. Grâce au Lemme 22, il existe alors une suite $(w_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $W(\mathfrak{a}^d)$ et $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $-\mathbb{N}.\Sigma_P$ tel que $\xi_k := w_k(\Lambda - \lambda_k)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_k$ soit un exposant asymptotique de $F(\lambda_k)$ le long de P et (ξ_k) converge vers ξ. Comme (ξ_k) et (λ_k) convergent, (μ_k) est bornée. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer (w_k) et (μ_k) constantes, i.e., il existe $w \in W(\mathfrak{a}^d)$ et $\mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P$ tels que $\xi_k = w(\Lambda - \lambda_k)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu$. On a donc, par passage à la limite, $\xi = w(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu$. Comme $(\xi_k) \subset \mathcal{O}$, on déduit du Lemme 24, que w et μ vérifient $\operatorname{Re} w\Lambda_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \leqslant_P 0$. D'où notre assertion. ∎

Les sous-groupes paraboliques P et Q sont fixés comme ci-dessus (cf. (89)).

LEMME 26. *Soit $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$. On suppose que Ω vérifie les hypothèses du Lemme 24. On suppose en outre que P est tel que $\mathfrak{a}_P$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}_Q$ et que $\Sigma_{\bar{P}} \subset \Sigma_Q$. Soit $\lambda_0 \in \Omega$ tel que $-\operatorname{Re} \lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$ soit strictement Σ_P-dominant et $\operatorname{Re} \lambda_0 = \operatorname{Re} \lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$.*

Alors, pour tout $F \in \mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$ $(n \in \mathbb{N})$ tel que $F(\lambda)$ soit tempéré pour $\lambda \in \Omega \cap i\mathfrak{a}^*_Q$, $v \in \mathscr{W}_P$:

(i) *L'application*

$$\lambda \mapsto p_{-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}_{P^v}}}(P^v | F(\lambda), x, X)$$

$(x \in G/H,\ X \in \mathfrak{a}_P)$ est holomorphe au voisinage de λ_0.

(ii) *Tout exposant ξ de $F(\lambda_0)$ le long de P^v vérifie:*

$$\operatorname{Re} \xi \leqslant_{P^v} - v \operatorname{Re} \lambda_0,$$

$$\textit{avec égalité seulement si } \xi = -(v\lambda_0)_{|\mathfrak{a}_{P^v}}.$$

Preuve. Il existe, pour tout $s \in W_\emptyset$, $k_s \in N_{K^d}(\mathfrak{a}^d)$ tel que:

$$s(X) = \operatorname{Ad} k_s^{-1}(X) \quad (X \in \mathfrak{a}_\emptyset)$$

(cf. [17, Section 5, Corollaire 2; 14, Lemme 2(iii)]).

Comme $\mathfrak{a}_\emptyset$ est contenu dans $\mathfrak{a}^d$ et comme $k_s \in N_{K^d}(\mathfrak{a}^d)$, on voit que, pour tout $s \in W_\emptyset$, il existe alors $\bar{s} \in W(\mathfrak{a}^d)$ tel que $s = \bar{s}_{|\mathfrak{a}_\emptyset}$. Alors tout élément w de $\mathscr{W}_P$ est réalisé par un élément $\bar{w}$ de $W(\mathfrak{a}^d)$.

On pose, pour $v \in \mathscr{W}_P$,

$$F^v(v) := F(v^{-1}v), \quad v \in v(\Omega).$$

Alors $F^v \in \mathscr{A}_*(G/H, \bar{v}\Lambda, \bar{v}(\Omega))_n$, et $\bar{v}(\Omega)$ possède les mêmes propriétés que Ω, pour $(\mathfrak{a}_{Q^v})^*_{\mathbb{C}}$. De plus, $-v \operatorname{Re} \lambda_0$ est strictement Σ_{P^v}-dominant. Pour obtenir les assertions de la Proposition, il suffit donc de traiter le cas $v = e_G$, et ensuite remplacer Q par Q^v et F par F^v.

Comme $-\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P} = (\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + 0$, il suffit, pour prouver (i), d'après la Proposition 7.2.2, de montrer que $\Xi_{(1,0)}(\lambda, \lambda_0)$ est réduit à $-\lambda_{|\mathfrak{a}_P}$ pour λ dans un voisinage de λ_0. Comme $-\operatorname{Re} \lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$ est strictement Σ_P-dominant, $\{0\} \cap \{-\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}\}$ est vide. Donc, si $\xi \in \Xi_{(1,0)}(\lambda, \lambda_0)$, il est de la forme:

$$\begin{aligned} &\xi = w(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \text{ avec } w \in W(\mathfrak{a}^d), \quad \mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P \\ &\text{vérifiant } w(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu = -\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}. \end{aligned} \tag{95}$$

Pour que ξ contribue à la somme donnée dans la Proposition 7.2.2, il faut que ξ soit un exposant asymptotique de $F(\lambda)$ le long de P, car sinon $p_\xi(P|F(\lambda), g) = 0$, pour tout $g \in G$. On a donc, compte tenu du Lemme 25, que:

$$\begin{aligned} &\xi = w'(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu' \text{ avec } w' \in W(\mathfrak{a}^d),\ \mu' \in -\mathbb{N}.\Sigma_P \\ &\text{vérifiant } \operatorname{Re} w'\Lambda_{|\mathfrak{a}_P} + \mu' \leqslant_P 0. \end{aligned} \tag{96}$$

Soit $\mathscr{L}$ le réseau des racines de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$. On pose

$$\begin{aligned} \epsilon := \tfrac{1}{3} \inf\{ \| x(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} - x'(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_{|\mathfrak{a}_P} \| \mid \\ x, x' \in W(\mathfrak{a}^d),\ \mu \in \mathscr{L} \textit{ et } \\ x(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} - x'(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu_{|\mathfrak{a}_P} \neq 0\}. \end{aligned} \tag{97}$$

Comme $W(\mathfrak{a}^d)$ est fini et $\mathscr{L}$ est discret, on a $\epsilon > 0$.

On prend maintenant $\lambda \in (\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ tel que $\|\lambda - \lambda_0\| < \epsilon$.

D'après (95) et (96), on a

$$w(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu = w'(\Lambda - \lambda)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu'. \tag{98}$$

Montrons qu'alors:

$$w(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu = w'(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + \mu'. \tag{99}$$

Supposons le contraire. Alors

$$\|w(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} - w'(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + (\mu - \mu')\| \geqslant 3\epsilon. \tag{100}$$

Mais, comme $\|\lambda - \lambda_0\| < \epsilon$, on a $\|x\lambda - x\lambda_0\| < \epsilon$, pour tout $x \in W(\mathfrak{a}^d)$, ce qui implique, grâce à (98), que:

$$\|w(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} - w'(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_P} + (\mu - \mu')\| \leqslant 2\epsilon.$$

D'où une contradiction avec (100). Donc (99) est vrai. Quitte à changer w (resp. μ) en w' (resp. μ'), on peut donc supposer que:

$$\mathrm{Re}\, w\Lambda_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \leqslant_P 0. \tag{101}$$

On choisit un ensemble Σ^d de racines positives de $\mathfrak{a}^d$ formé de la réunion de l'ensemble des racines dont la restriction à $\mathfrak{a}_P$ est une racine de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$ et d'un ensemble de racines positives pour les racines nulles sur $\mathfrak{a}_P$. On regarde $\mathrm{Re}\,\lambda_0$ comme élément de $(\mathfrak{a}^d)^*$. Par hypothèse sur λ_0, $\mathrm{Re}\,\lambda_0$ est Σ^d-dominant, ce qui implique que $-w\mathrm{Re}\,\lambda_0 + \mathrm{Re}\,\lambda_0$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de Σ^d. Par restriction à $\mathfrak{a}_P$, on obtient:

$$-w\,\mathrm{Re}\,\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P} \leqslant_P - \mathrm{Re}\,\lambda_0. \tag{102}$$

Si on a égalité, pour des raisons de longueur, cela implique que $w\,\mathrm{Re}\,\lambda_0 = w\,\mathrm{Re}\,\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P} = \mathrm{Re}\,\lambda_0$. Or le stabilisateur de $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = \mathrm{Re}\,\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$ est engendré par les réflexions par rapport à des racines orthogonales à $\mathrm{Re}\,\lambda_0$. Celles-ci sont nulles sur $\mathfrak{a}_P$ car $-\mathrm{Re}\,\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$ est strictement Σ_P-dominant, par hypothèse. Donc les éléments du stabilisateur de $\mathrm{Re}\,\lambda_0$ fixent les éléments de $\mathfrak{a}_P$. Donc, on a égalité dans (102) si et seulement si w est trivial sur $\mathfrak{a}_P$. On a donc:

$$\begin{gathered} -w\,\mathrm{Re}\,\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P} \leqslant_P - \mathrm{Re}\,\lambda_0, \\ \text{avec égalité seulement si } w_{|\mathfrak{a}_P^*} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}_P^*}. \end{gathered} \tag{103}$$

L'équation (95), joint à (101) et (103), montre qu'alors w est trivial sur $\mathfrak{a}_P$. Donc $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_P} = 0$, car $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$, puis, grâce à (95), $\mu = 0$. Donc, d'après (95), $\xi = -\lambda_{|\mathfrak{a}_P}$ comme désiré. On a bien $\Xi_{(1,0)}(\lambda, \lambda_0) = \{-\lambda_{|\mathfrak{a}_P}\}$.

Maintenant, tenant compte du Lemme 25 et de (102), si $\xi \in e(P, F(\lambda_0))$, on a $\mathrm{Re}\,\xi \leqslant_P - \mathrm{Re}\,\lambda_0$. De plus, si on a égalité, on a (cf. (103)) que $\xi = -\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$. ∎

LEMME 27. *On suppose que* P *et* Q *sont fixés comme ci-dessus* (*cf.* Éq. (89)). *Soit* $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$. *On suppose que* Ω *est un ouvert connexe de* $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$, *produit d'un ouvert connexe* Ω_1 *de* $\mathfrak{a}^*_Q$, *contenant* 0, *par* $i\mathfrak{a}^*_Q$.

On suppose que P *est tel que* $\mathfrak{a}_P$ *soit un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{a}_Q$ *et que* $\Sigma_{\bar{P}} \subset \Sigma_Q$.

Soient $\lambda_0 \in \Omega$ *tel que* $-\mathrm{Re}\,\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$ *soit strictement* Σ_P*-dominant et* $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = \mathrm{Re}\,\lambda_{0\,|\mathfrak{a}_P}$, *et* $u \in S(\mathfrak{a}^*_Q)$.

Soient $F \in \mathcal{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$, $n \in \mathbb{N}$, *tel que* $F(\lambda)$ *et* $\partial(u)(F(\nu))_{|\nu=\lambda}$ *soient tempérés pour* $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_Q$. *Soit* $v \in \mathcal{W}_P$. *Alors*:

$$\begin{aligned} &p_{-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}_{P^v}}}(P^v|\partial(u)(F(\nu))_{|\nu=\lambda}, g, X)e^{(-v\lambda-\rho_{P^v})(X)} \\ &\quad = \partial(u)(p_{-(v\nu)_{|\mathfrak{a}_{P^v}}}(P^v|F(\nu), g, X)e^{(-v\nu-\rho_{P^v})(X)})_{|\nu=\lambda} \\ &\qquad (g \in G,\ X \in \mathfrak{a}_{P^v}), \end{aligned}$$

pour tout λ *dans un voisinage de* λ_0.

Preuve. En utilisant les mêmes arguments que dans le début de la preuve du Lemme 26, on se ramène à traiter le cas $v = e_G$.

Par hypothèse, $F \in \mathcal{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_n$. Donc (cf. Lemme 8), la famille holomorphe $\lambda \mapsto \partial(u)(F(\nu))_{\nu=\lambda}$ est un élément de $\mathcal{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega)_{n'}$, où $n' = n + d^0u$, d^0u désignant le degré de u.

On choisit $\epsilon > 0$ assez petit pour que la boule ouverte de centre λ_0 et de rayon ϵ, $B(\lambda_0, \epsilon)$, soit contenue dans Ω et pour que F et $\lambda \mapsto \partial(u)(F(\nu))_{|\nu=\lambda}$, restreints à $B(\lambda_0, \epsilon)$, soient holomorphes à valeurs dans $C^\infty_r(G) \otimes V_\tau$, pour un $r \in \mathbb{R}$.

On fixe $X \in \mathfrak{a}^+_P$. L'ensemble

$$\{0\} \cup \{\mathrm{Re}\, w(\Lambda - \lambda_0)(X) + \mu(X) |\, w \in W(\mathfrak{a}^d),\ \mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P\},$$

est un ensemble discret. Soit ξ_0 le plus grand de ses éléments qui sont strictement inférieurs à $-\mathrm{Re}\,\lambda_0(X)$. On note $\epsilon_0 = -\mathrm{Re}\,\lambda_0(X) - \xi_0$. On fixe $N \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$,

$$N < -\mathrm{Re}\,\lambda(X) - \rho_P(X) - \epsilon_0. \tag{104}$$

Quitte à réduire ϵ, on sait, d'après la Proposition 7.2.1, qu'il existe k, $q \in \mathbb{N}$, $r' \geqslant r$, $C > 0$, $\epsilon' > 0$ tels que:

$$\begin{aligned} &\|R_{\exp(tX)}F(\lambda) - (\eta \circ \exp(b_{n,k}(\lambda, tX)^t) \otimes 1)\Psi(\lambda, X)F(\lambda)\|_{r'} \\ &\quad \leqslant C\|F(\lambda)\|_{q,r}e^{(N-\epsilon')t}, \text{ pour tout } t \geqslant 0,\ \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon). \end{aligned} \tag{105}$$

Tenant compte du Lemme 21(ii) et de la Proposition 7.2.1(iii), on peut appliquer la formule intégrale de Cauchy. Cette application montre que, quitte à réduire encore ϵ, il existe $C' \geqslant 0$ tel que:

$$\begin{aligned}
&\|\partial(u)(R_{\exp(tX)}F(v))_{|v=\lambda} \\
&- \partial(u)(\eta \circ \exp(b_{n,k}(v, tX)^t) \otimes 1)\Psi(v, X)F(v))_{|v=\lambda}\|_{r'} \\
&\leqslant C'\|F(\lambda)\|_{q,r} e^{(N-\epsilon')t}, \text{ pour tout } t \geqslant 0, \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon).
\end{aligned} \tag{106}$$

On fixe $g \in G$.

Comme fonctions de t,

$$G(\lambda, t) := ((\eta \circ \exp(b_{n,k}(\lambda, tX)^t) \otimes 1)\Psi(\lambda, X)F(\lambda))(g) \tag{107}$$

$$\text{et} \qquad G_u(\lambda, t) := \partial(u)(G(v, t))_{|v=\lambda} \; (\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)) \tag{108}$$

sont des sommes d'exponentielles polynômes, et on se propose d'étudier leurs termes respectifs en $e^{(-\lambda-\rho_P)(X)t}$.

D'après le Lemme 21(iv), les valeurs propres de $b_{n,k}(\lambda, X)^t$ sont contenues dans l'ensemble:

$$\{0\} \cup \{w(\Lambda - \lambda)(X) - \rho_P(X) + \mu(X) \mid w \in W(\mathfrak{a}^d), \; \mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P\}. \tag{109}$$

On prend

$$\epsilon < \epsilon_0/(3\|X\|). \tag{110}$$

Alors, toutes les valeurs propres des $b_{n,k}(\lambda, X)^t$, $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$, sont de partie réelle:

$$\begin{aligned}
&\text{soit strictement supérieure à} - \operatorname{Re} \lambda_0(X) - \rho_P(X) - \epsilon_0/3, \\
&\text{soit strictement inférieure à} - \operatorname{Re} \lambda_0(X) - \rho_P(X) - 2\epsilon_0/3.
\end{aligned} \tag{111}$$

Soit $V_+(\lambda)$ (resp. $V_-(\lambda)$) ($\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$) la somme des espaces propres généralisés de $b_{n,k}(\lambda, X)^t$ correspondants aux valeurs propres de partie réelle strictement supérieure à $-\operatorname{Re} \lambda_0(X) - \rho_P(X) - \epsilon_0/3$ (resp. strictement inférieure à $-\operatorname{Re} \lambda_0(X) - \rho_P(X) - 2\epsilon_0/3$).

Soit $P_+(\lambda)$ (resp. $P_-(\lambda)$), $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$, la projection sur $V_+(\lambda)$ (resp. $V_-(\lambda)$) parallèlement à $V_-(\lambda)$ (resp. $V_+(\lambda)$).

On a, pour tout $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$,

$$P_+(\lambda) + P_-(\lambda) = \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(\mathscr{V}_k)}, \tag{112}$$

où $\mathscr{V}_k$ est le sous-espace vectoriel de dimension finie de $U(\bar{\mathfrak{n}}_P + l_P)$ donné au début de la Section 7.2. Alors, il résulte de [1, Lemme 20.1], que:

$$P_+(\lambda) \text{ et } P_-(\lambda) \text{ dépendent de façon holomorphe de } \lambda. \tag{113}$$

On pose

$$\begin{aligned} &G_\pm(\lambda, t) := ((\eta \circ P_\pm(\lambda) \exp(b_{n,k}(\lambda, tX)^t) \otimes 1)\Psi(\lambda, X)F(\lambda))(g), \\ &\text{pour tout } \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon), \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{114}$$

Alors, d'après (112),

$$G(\lambda, t) = G_+(\lambda, t) + G_-(\lambda, t), \tag{115}$$

et de plus, d'après (113) et la défintion de $G_u(\lambda, t)$ (cf. Éq. (108)),

$$\begin{aligned} &G_u(\lambda, t) = \partial(u)(G_+(v, t))_{|v=\lambda} + \partial(u)(G_-(v, t))_{|v=\lambda}, \\ &\text{pour tout } \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon), \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{116}$$

Grâce à (111), il résulte de la Proposition 20.2 de [1] et de sa preuve, quitte à réduire encore ϵ, qu'il existe $C'' > 0$ tel que:

$$\begin{aligned} &\|G_-(\lambda, t)\| \leqslant C'' e^{(-\mathrm{Re}\,\lambda_0(X) - \rho_P(X) - \epsilon_0/2)t}, \\ &\text{pour tout } \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon), \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{117}$$

De plus, comme $P_-(\lambda)$ est holomorphe en $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$ (cf. Éq. (113)), l'application de la formule intégrale de Cauchy à (117) montre, quitte à réduire encore ϵ, qu'il existe $C''' > 0$ tel que:

$$\begin{aligned} &\|\partial(u)(G_-(v, t))_{|v=\lambda}\| \leqslant C''' e^{(-\mathrm{Re}\,\lambda_0(X) - \rho_P(X) - \epsilon_0/2)t}, \\ &\text{pour tout } \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon), \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{118}$$

On déduit de (118) que, pour tout $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$:

$$\begin{aligned} &\text{les exponentielles qui interviennent dans le développement} \\ &\text{en exponentielles polynômes de } t \mapsto \partial(u)(G_-(v, t))_{|v=\lambda} \\ &\text{sont de la forme } e^{(\omega - \rho_P(X))t} \text{ avec } \mathrm{Re}\,\omega \leqslant -\mathrm{Re}\,\lambda_0(X) - \epsilon_0/2. \end{aligned} \tag{119}$$

Soit $\lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon)$. D'après l'équation (109) et la définition de $G_+(\lambda, t)$ (cf. (114)), les exponentielles en t qui interviennent dans le développement en exponentielles polynômes de $G_+(\lambda, t)$, regardé comme fonction de t, sont de la forme $e^{(\omega - \rho_P(X))t}$ avec:

$$\begin{aligned} &\omega \in \{0\} \cup \{w(\Lambda - \lambda)(X) + \mu(X) \mid w \in W(\mathfrak{a}^d), \ \mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P\} \\ &\text{et} \quad \mathrm{Re}\,\omega > -\mathrm{Re}\,\lambda_0(X) - \epsilon_0/3. \end{aligned} \tag{120}$$

Comme $-\operatorname{Re}\lambda_0(X) > 0$ (X appartenant à $\mathfrak{a}_P^+$ et $-\operatorname{Re}\lambda_0$ étant strictement Σ_P-dominant par hypothèse), d'après la défintion de ξ_0, on a $\xi_0 \geqslant 0$. Donc, grâce à la défintion de ϵ_0, on a $-\operatorname{Re}\lambda_0(X) - \epsilon_0/3 > 0$. Donc, si ω est comme dans l'équation (120), il est non nul.

Comme l'exponentielle $e^{(\omega-\rho_P(X))t}$ n'intervient pas dans le développement en exponentielles polynômes de $G_-(\lambda,t)$ d'après (117) et (120), il en résulte que:

$$\begin{aligned} &e^{(\omega-\rho_P(X))t} \text{ intervient dans le développement de } G(\lambda,t) \\ &\text{en somme d'exponentielles polynômes en } t. \end{aligned} \tag{121}$$

Or, d'après l'équation (105) et la définition de $G(\lambda,t)$ (cf. Éq. (107)), on voit que $G(\lambda,t)$ est asymptotique à $F(\lambda)(g\exp(tX))$ quand t tend vers $+\infty$. Il résulte du Lemme 25, la fonction F satisfaisant les hypothèses de ce dernier, que les exponentielles, intervenant dans le développement de $G(\lambda,t)$ en exponentielles polynômes, sont de la forme $e^{(\omega-\rho_P(X))t}$, où:

$$\begin{gathered} \omega = (w(\Lambda-\lambda)+\mu)(X), \\ \text{avec } w \in W(\mathfrak{a}^d),\ \mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_P \text{ et } w\Lambda_{|\mathfrak{a}_P} + \mu \leqslant_P 0, \end{gathered} \tag{122}$$

ou bien, d'après notre choix de N (cf. (104) et (121)), satisfait:

$$\operatorname{Re}\omega < -\operatorname{Re}\lambda(X) - \epsilon_0/3. \tag{123}$$

Tenant compte de (120), on voit que, si $e^{(\omega-\rho_P(X))t}$ est l'une des exponentielles intervenant dans le développement en exponentielles polynômes de $G_+(\lambda,t)$, ω satisfait (122). D'après l'équation (103), comme $X \in \mathfrak{a}_P^+$, on a, pour $w \in W(\mathfrak{a}^d)$:

$$\begin{gathered} -\operatorname{Re} w\lambda_0(X) \leqslant -\operatorname{Re}\lambda_0(X), \\ \text{avec égalité seulement si } w_{|\mathfrak{a}_P} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}_P}. \end{gathered} \tag{124}$$

Soit w comme dans (122). Si $\operatorname{Re}(w\Lambda+\mu)(X) < 0$ ou si $-\operatorname{Re} w\lambda_0(X) < -\operatorname{Re}\lambda_0(X)$, on a, par définition de ξ_0,

$$\operatorname{Re}(w(\Lambda-\lambda_0)+\mu)(X) \leqslant \xi_0.$$

Comme $\epsilon < \epsilon_0/(3\|X\|)$ (cf. Éq. (110)) et $\epsilon_0 = -\operatorname{Re}\lambda_0(X) - \xi_0$, si $\omega = (w(\Lambda-\lambda)+\mu)(X)$, on a $\operatorname{Re}\omega < -\operatorname{Re}\lambda_0(X) - 2\epsilon_0/3$. Donc, compte tenu de (120), pour un tel ω, $e^{(\omega-\rho_P(X))t}$ n'intervient pas dans le développement en exponentielles polynômes de $G_+(\lambda,t)$. Donc, si $e^{(\omega-\rho_P(X))t}$ intervient dans le développement en exponentielles polynômes de $G_+(\lambda, t)$, on a:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(w\Lambda + \mu)(X) = 0 \\ \text{et} \quad &\mathrm{Re}\, w\lambda_0(X) = \mathrm{Re}\, \lambda_0(X), \end{aligned}$$

donc, tenant compte de (123):

$$\begin{aligned} &\text{seule } e^{(-\lambda-\rho_P)(tX)} \text{ intervient dans le développement} \\ &\text{en exponentielles polynômes de } G_+(\lambda, t), \end{aligned} \tag{125}$$

et, de plus, compte tenu de (119) et de la majoration de (120):

$$\begin{aligned} &e^{(-\lambda-\rho_P)(tX)} \text{ n'intervient pas dans le développement} \\ &\text{en exponentielles polynômes de } \partial(u)(G_-(\nu, t))_{|\nu=\lambda}. \end{aligned} \tag{126}$$

Tenant compte de (105) et de la condition sur N (cf. Éq. (104)), on déduit de (125) que:

$$G_+(\lambda, t) = p_{-\lambda_{|\mathfrak{a}_P}}(P|F(\lambda), g, tX)e^{(-\lambda-\rho_P)(tX)}. \tag{127}$$

D'après le Lemme 26, quitte à réduire encore ϵ, le second membre de (127) est holomorphe en $\lambda \in B(\lambda_0, \epsilon)$. En appliquant $\partial(u)$ à l'équation (127), on voit que:

$$\partial(u)(G_+(\nu, t))_{|\nu=\lambda} = \partial(u)(p_{-\nu_{|\mathfrak{a}_P}}(P|F(\nu), g, tX)e^{(-\nu-\rho_P)(tX)})_{|\nu=\lambda}. \tag{128}$$

De (128), il résulte que la seule exponentielle intervenant dans le développement en exponentielles polynômes de $\partial(u)(G_+(\nu, t))_{|\nu=\lambda}$ est

$$e^{(-\lambda-\rho_P)(tX)}.$$

On déduit donc de (116) et (126) que le terme en $e^{(-\lambda-\rho_P)(tX)}$, dans le développement en exponentielles polynômes de $G_u(\lambda, t)$, est égal au terme en $e^{(-\lambda-\rho_P)(tX)}$ dans $\partial(u)(G_+(\nu, t))_{|\nu=\lambda}$. Or, d'après l'équation (106) et la défintion de $G_u(\lambda, t)$ (cf. Éq. (108)), $G_u(\lambda, t)$ est asymptotique à:

$$\partial(u)(F(\nu)(g \exp(tX)))_{|\nu=\lambda},$$

quand t tend vers $+\infty$. Le choix de N (cf. Éq. (104)) et l'unicité du développement asymptotique montrent que l'équation (128) implique:

$$\begin{aligned} &p_{-\lambda_{|\mathfrak{a}_P}}(P|\partial(u)(F(\nu))_{|\nu=\lambda}, g, X)e^{(-\lambda-\rho_P)(X)} \\ &\quad = \partial(u)(p_{-\nu_{|\mathfrak{a}_P}}(P|F(\nu), g, X)e^{(-\nu-\rho_P)(X)})_{|\nu=\lambda}, \\ &\quad \text{pour tout } \lambda \in B(\lambda_0, \epsilon). \end{aligned}$$

On obtient donc bien l'égalité désirée. ∎

8. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES DÉRIVÉES D'INTÉGRALES D'EISENSTEIN

On reprend ici les notations de la Section 6.

Soit (δ, V_δ) une représentation unitaire irréductible de M_Q.

On note $\lambda \mapsto A_{P,Q}(\lambda)$ l'application méromorphe de $(\mathfrak{a}_{P_Q})^*_{\mathbb{C}}$ dans l'espace des endomorphismes de $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta_{\mathscr{W}_{M_Q}}$ (cf. (59), pour la définition de cet espace) définie par:

$$A_{P,Q}(\lambda)\psi_{f\otimes\eta} = \psi_{(\bar{A}((\bar{P})_Q,P_Q,\delta,\lambda)\otimes \mathrm{Id}_{V_\tau})f\otimes\eta}, \tag{129}$$

pour $f \in C^\infty(K,\delta,\tau)$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}_{M_Q}}$, où $\psi_{f\otimes\eta}$ est donné dans (60).

Comme $\bar{A}((\bar{P})_Q, P_Q, \delta, \lambda)$ admet un inverse méromorphe en $\lambda \in (\mathfrak{a}_{P_Q})^*_{\mathbb{C}}$ (cf. Éq. (55)), il en va donc de même pour l'endomorphisme $A_{P,Q}(\lambda)$ de $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta_{\mathscr{W}_{M_Q}}$.

Tenant compte de notre choix de $\mathscr{W}^M_{M_Q}$ (cf. début de la Section 6), on identifie, dans la suite, $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)_{\mathscr{W}^M_{M_Q}}$ (resp. $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta_{\mathscr{W}^M_{M_Q}}$) à un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)_{\mathscr{W}_{M_Q}}$ (resp. $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta_{\mathscr{W}_{M_Q}}$).

Soit $R<0$ tel que $-R>c_\delta$ (où c_δ est donné par l'équation (54) en remplaçant P (resp. Q) par P_Q (resp. $(\bar{P})_Q$)) et tel que $\Omega_R := \mathfrak{a}^*(P_Q,R) \cap \mathfrak{a}^*(\overline{P_Q},-R)$ rencontre l'ouvert des $\lambda \in (\mathfrak{a}_{P_Q})^*_{\mathbb{C}}$ vérifiant $\mathrm{Re}\,\lambda - \rho_{P_Q}$ strictement Σ_{P_Q}-dominant. Cette dernière condition est satisfaite si $|R|$ est assez grand. Notez que Ω_R rencontre $i\mathfrak{a}^*_Q$. De plus, Ω_R est le produit d'un ouvert connexe de $\mathfrak{a}^*_{P_Q}$ avec $i\mathfrak{a}^*_{P_Q}$.

Soit $\underline{a}_R \in \Pi(\Sigma_{P_Q})$ le polynôme donné par le Lemme 13 en remplaçant P (resp. Q) par P_Q (resp. $(\bar{P})_Q$), de sorte que $\lambda \mapsto \underline{a}_R(\lambda)A_{P,Q}(\lambda)^{-1}$ est holomorphe sur Ω_R.

Soit $b_R \in \Pi(\Sigma_{P_Q})$ (resp. $b_R^M \in \Pi(\Sigma_Q)$) le polynôme donné par le Lemme 2 en remplaçant P par P_Q (resp. G par M et P par Q) de sorte que $\lambda \mapsto b_R(\lambda)E(P_Q,\psi,\lambda)$ (resp. $\lambda \mapsto b_R^M(\lambda)E(Q,\psi,\lambda)$) est holomorphe sur Ω_R (resp. la projection de Ω_R sur $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ parallèlement à $(\mathfrak{a}_P)^*_{\mathbb{C}}$), pour $\psi \in \mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta_{\mathscr{W}_{M_Q}}$ (resp. $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta_{\mathscr{W}^M_{M_Q}}$).

On pose $p_R := b_R \cdot b_R^M \cdot a_R$. C'est un élément de $\Pi(\Sigma_{P_Q})$.

THÉORÈME 8.1. *Soient $R<0$ comme ci-dessus, $u \in S(\mathfrak{a}^*_{P_Q})$ et $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)^\delta_{\mathscr{W}^M_{M_Q}}$. Alors*

$$F(\lambda) := \partial(u)(p_R(\nu)E(P_Q, A_{P,Q}(\nu)^{-1}\psi,\nu))_{|\nu=\lambda}$$

est bien définie pour $\lambda \in \Omega_R$, et on a:

(i)

$$F \in \mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Omega_R)_{d^0 u}, \tag{130}$$

$$F(\lambda) \in \mathscr{A}_{\text{temp}}(G/H, \tau) \quad (\lambda \in \Omega_R \cap i\mathfrak{a}^*_{P_Q}) \tag{131}$$

$$\textit{et} \qquad F(\lambda) \in \mathscr{A}_{\text{Eis}}(G/H, \tau)_{P_Q} \quad (\lambda \in \Omega_R), \tag{132}$$

où $d^0 u$ désigne le degré de u.

(ii) *si $\lambda_0 \in \Omega_R$ est tel que* $\operatorname{Re} \lambda_{0\,|\mathfrak{a}}$ *soit égal à* $\operatorname{Re} \lambda_0$ *et soit strictement Σ_P-dominant, on a:*

$$-(v\lambda_0)_{|\mathfrak{a}^v} \notin e(\overline{P^v}, F(\lambda_0)), \qquad \textit{pour tout } v \in \mathscr{W}_P, \;\; v \neq e_G, \tag{133}$$

$$\begin{aligned} &p_{-\lambda_{0\,|\mathfrak{a}}}(\bar{P}|F(\lambda_0), m, X) e^{(-\lambda_{0\,|\mathfrak{a}} + \rho_P)(X)} \\ &\quad = \partial(u)(p_R(v) E(Q, \psi^M, v_{|\mathfrak{a}_Q}) e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda_0}. \end{aligned} \tag{134}$$

De plus,

$$\begin{gathered} \textit{pour tout } v \in \mathscr{W}_P \textit{ et tout } P_\emptyset \in \mathscr{P},\, P_\emptyset \subset P^v, \\ \textit{si } \xi \in e(\bar{P}_\emptyset, F(\lambda_0)), \textit{ on a} \\ \operatorname{Re} \xi \leqslant_{\bar{P}_\emptyset} - v \operatorname{Re} \lambda_0, \end{gathered} \tag{135}$$

$$\begin{gathered} \textit{pour tout } v \in \mathscr{W}_P, \textit{ si } \xi \in e(\overline{P^v}, F(\lambda_0)), \\ \textit{on a } \operatorname{Re} \xi \leqslant_{\overline{P^v}} - v \operatorname{Re} \lambda_0 \\ \textit{avec égalité seulement si } \xi = -(v\lambda_0)_{|\mathfrak{a}^v}. \end{gathered} \tag{136}$$

En particulier, si $-\lambda_{0\,|\mathfrak{a}}$ est un exposant asymptotique de $F(\lambda_0)$ le long de $\bar{P}$, c'est un exposant asymptotique directeur.

Preuve. En remarquant que p_R est un multiple dans $S(\mathfrak{a}_{P_Q})$ de b_R, on obtient (i) grâce au Lemme 9 et aux Propositions 5.1.1 et 5.1.2, où l'on remplace P par P_Q.

Montrons (ii). Grâce à (i), Éq. (130), on peut supposer, par linéarité, que F est un élément de $\mathscr{A}_*(G/H, \tau, \Lambda, \Omega_R)_{d^0 u}$ (cf. Éq. (37) pour la définition de cet espace) avec $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M_Q})^*_{\mathbb{C}}$.

Soit $v \in \mathscr{W}_P$. On sait, d'après (i), (131), et le Lemme 23, où l'on remplace P (resp. Q) par $\overline{P^v}$ (resp. P_Q), et où l'on prend $w_0 = \bar{v}$ (la définition de $v \mapsto \bar{v}$ étant donnée au début du Lemme et 26) $\mu_0 = 0$, qu'il existe un ouvert $\mathscr{O}$ ($\mathscr{O} := \mathscr{O}_{\bar{v}}$), oú $\mathscr{O}_{\bar{v}}$ est donné par (91) produit de $\mathfrak{a}^*_{P_Q}$ et d'un ouvert dense $\mathscr{O}_1$ de

$i\mathfrak{a}^*_{P_Q}$ tel que $\lambda \mapsto p_{-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v}}(\overline{P^v}|F(\lambda), g, X)$ $(g \in G,\ X \in \mathfrak{a}^v)$, soit holomorphe sur $\mathcal{O} \cap \Omega_R$.

Soit Ω l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*(P_Q, c_\delta)$ tels que $\operatorname{Re}\lambda - \rho_{P_Q}$ soit strictement Σ_{P_Q}-dominant. Montrons que:

$$\begin{aligned}&\text{toute composante connexe de } \Omega_R \cap \mathcal{O}\\ &\text{a une intersection non vide avec } \Omega.\end{aligned} \tag{137}$$

En effet Ω_R est de la forme $\Omega^1_R \times i\mathfrak{a}^*_{P_Q}$, où Ω^1_R est un ouvert connexe de $\mathfrak{a}^*_{P_Q}$. De même, $\Omega = \Omega^2 \times i\mathfrak{a}^*_{P_Q}$, où Ω^2 est un ouvert de $\mathfrak{a}^*_{P_Q}$. Nos hypothèses sur R montre que l'intersection de Ω_R et Ω est non vide, donc il en va de même pour celle de Ω^1_R et Ω^2. Par ailleurs, $\mathcal{O}$ est de la forme $\mathfrak{a}^*_{P_Q} \times \mathcal{O}^1$, où $\mathcal{O}^1$ est un ouvert de $i\mathfrak{a}^*_Q$. Donc $\Omega_R \cap \mathcal{O} = \Omega^1_R \times \mathcal{O}^1$, et, comme Ω^1_R est connexe, les composantes connexes de $\Omega^1_R \times \mathcal{O}$ sont de la forme $\Omega^1_R \times C$, où C est une composante connexe de $\mathcal{O}^1$. Comme $\Omega = \Omega^2 \times i\mathfrak{a}^*_Q$ et que Ω^1_R et Ω^2 ont une intersection non vide, on a bien prouvé (137).

Cela implique que tout sous-ensemble dense Ω' de Ω a une intersection non vide avec toutes les composantes connexes de $\Omega_R \cap \mathcal{O}$.

On prend pour Ω' l'ensemble des $\lambda \in \Omega$ tels que $A_{P,Q}(\lambda)^{-1}$ existe. Alors, si $\lambda \in \Omega'$, λ vérifie les hypothèses du (ii) du Corollaire de la Proposition 6.0.1. Alors il résulte de celui-ci, par prolongement holomorphe, grâce aux propriétés de l'ouvert $\mathcal{O}$ (cf. Lemme 23), compte tenu de (137), que, pour tout $\lambda \in \Omega_R \cap \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned}&p_{-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v}}(\overline{P^v}|p_R(\lambda)E(P_Q, A_{P,Q}(\lambda)^{-1}\psi, \lambda), g, X)e^{(-v\lambda+\rho_{P^v})(X)}\\ &\quad = \begin{cases} 0 & (g \in G,\ X \in \mathfrak{a}^v)\ si\ v \neq e_G,\\ p_R(\lambda)E(Q, \psi, \lambda_{|\mathfrak{a}_Q})(g)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)} & \\ & (g \in M,\ X \in \mathfrak{a})\ si\ v = e_G.\end{cases}\end{aligned} \tag{138}$$

Soit maintenant $\lambda_0 \in \Omega_R$ comme dans (ii).

Il résulte des (131) et des Propositions 5.11 et 5.2.1, où l'on remplace P par P_Q, u par 1, p par $b_R \cdot b^M_R$ et ϕ par $\underline{a}_R \cdot A_{P,Q}(\cdot)^{-1}$ et des conditions satisfaites par λ_0, que l'on peut appliquer le Lemme 27, et on déduit alors de (138), pour λ dans un voisinage de λ_0:

$$\begin{aligned}&p_{-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v}}(\overline{P^v}|F(\lambda), g, X)e^{(-v\lambda+\rho_{P^v})(X)}\\ &\quad = \begin{cases} 0 & (g \in G,\ X \in \mathfrak{a}^v)\ si\ v \neq e_G,\\ \partial(u)(p_R(v)E(Q, \psi, v_{|\mathfrak{a}_Q})(g)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda} & \\ & (g \in M,\ X \in \mathfrak{a})\ si\ v = e_G.\end{cases}\end{aligned} \tag{139}$$

D'après le Lemme 26, où l'on remplace P (resp. Q) par $\bar{P}$ (resp. P_Q), il existe un voisinage ouvert $V(\lambda_0)$ de λ_0 dans Ω_R tel que l'application $\lambda \mapsto p_{-(v\lambda)_{|\mathfrak{a}^v}}(\overline{P^v}|F(\lambda), g, X)e^{(-v\lambda+\rho_{P^v})(X)}$, $g \in G$, $X \in \mathfrak{a}^v$, soit holomorphe sur $V(\lambda_0)$. Par ailleurs, d'après (139), cette fonction est égale à:

$$\begin{cases} 0 & (g \in G,\ X \in \mathfrak{a}^v)\ si\ v \neq e_G, \\ \partial(u)(p_R(v)E(Q,\psi,v_{|\mathfrak{a}_Q})(g)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda} & \\ & (g \in M,\ X \in \mathfrak{a})\ si\ v = e_G, \end{cases} \tag{140}$$

sur $V(\lambda_0) \cap \mathcal{O}$, qui est non vide, puisque $\Omega_R \cap \mathcal{O}$ est dense dans Ω_R. Par prolongement holomorphe, on obtient (133) et (134) puisque l'expression (140) est holomorphe sur Ω_R.

Soient $P_\emptyset \in \mathscr{P}$, $P_\emptyset \subset P^v$, et $\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, F(\lambda_0))$. D'après le Lemme 25, où l'on remplace P (resp. Q) par $\bar{P}_\emptyset$ (resp. P_Q), ξ est de la forme:

$$\begin{aligned} &\xi = w(\Lambda - \lambda_0)_{|\mathfrak{a}_\emptyset} + \mu \text{ avec } w \in W(\mathfrak{a}^d) \text{ et } \mu \in -\mathbb{N}.\Sigma_{\bar{P}_\emptyset} \\ &\text{vérifiant } \operatorname{Re} w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\emptyset} + \mu \leqslant_{\bar{P}_\emptyset} 0. \end{aligned} \tag{141}$$

Comme $-\operatorname{Re}\lambda_0$ est strictement $\Sigma_{\bar{P}}$-dominant, on a:

$$-v\operatorname{Re}\lambda_0 \textit{ est strictement } \Sigma_{\overline{P^v}}\textit{-dominant.} \tag{142}$$

Comme $\bar{P}_\emptyset \subset \overline{P^v}$, il résulte de (142) que $-v\operatorname{Re}\lambda_0$ est $\Sigma_{\bar{P}_\emptyset}$-dominant. On choisit un ensemble Σ^d de racines positives de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}^d$ formé de la réunion de l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{n}_{P_\emptyset}$ et d'un ensemble de racines positives pour les racines nulles sur $\mathfrak{a}_\emptyset$. On regarde $v\operatorname{Re}\lambda_0$ comme élément de $(\mathfrak{a}^d)^*$. Par hypothèse sur λ_0, $v\operatorname{Re}\lambda_0$ est Σ^d-dominant, ce qui implique que $-(w\bar{v}^{-1})v\operatorname{Re}\lambda_0 + v\operatorname{Re}\lambda_0$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de Σ^d. Par restriction à $\mathfrak{a}_\emptyset$, on obtient:

$$-((w\bar{v}^{-1})v\operatorname{Re}\lambda_0)_{|\mathfrak{a}_\emptyset} \leqslant_{\bar{P}_\emptyset} -v\operatorname{Re}\lambda_0.$$

Comme $(w\bar{v}^{-1})v\operatorname{Re}\lambda_0 = w\operatorname{Re}\lambda_0$, on déduit de (141) et de ce qui précède, que $\operatorname{Re}\xi \leqslant_{\bar{P}_\emptyset} -v\operatorname{Re}\lambda_0$, comme désiré.

Le reste de (ii) résulte du Lemme 26(ii), où l'on remplace P (resp. Q) par $\bar{P}$ (resp. P_Q). ∎

PROPOSITION 8.0.1. *Soient f un élément non nul de $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M \cap H, \tau_M) \otimes S(\mathfrak{a}^*)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que* $\operatorname{Re}\lambda$ *soit strictement Σ_P-dominant.*

Alors, il existe $F_\lambda \in \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H, \tau)$ tel que:

(i) $f(mM \cap H, X)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)} = p_{-\lambda}(\bar{P}|F_\lambda, m, X)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)}$ $(m \in M, X \in \mathfrak{a})$,

(ii) *pour tout* $v \in \mathscr{W}_P$ *et tout* $P_\emptyset \in \mathscr{P}$ *tel que* $P_\emptyset \subset P^v$, *si* $\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, F_\lambda)$, *on a* $\operatorname{Re}\xi \leqslant_{\bar{P}_\emptyset} -v \operatorname{Re}\lambda$,

(iii) *pour tout* $v \in \mathscr{W}_P$, *si* $\xi \in e(\overline{P^v}, F_\lambda)$, *on a* $\operatorname{Re}\xi \leqslant_{\overline{P^v}} -v \operatorname{Re}\lambda$, *avec égalité seulement si* $\xi = -v\lambda$,

(iv) $-\lambda$ *est un exposant asymptotique directeur de* F_λ *le long de* $\bar{P}$,

(v) *pour tout* $v \in \mathscr{W}_P$, $v \neq e_G$, $-v\lambda$ *n'est pas un exposant asymptotique de* F_λ *le long de* $\overline{P^v}$,

(vi) *si* $mM \cap H \mapsto f(mM \cap H)$ *est* $\mathbb{D}(M/M \cap H)$*-propre généralisé pour la valeur propre* $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$, *on peut prendre* F_λ *propre généralisé sous* $\mathbb{D}(G/H)$ *pour la valeur propre* $\Lambda - \lambda$.

Preuve. Tenant compte du Corollaire 5.2, où l'on remplace G par M, on peut se ramener, par linéarité, à prendre:

$$f(mM \cap H, X)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)}$$
$$= \partial(u_1)(p(v)E(Q,\psi,v)(mM \cap H))_{|v=\lambda_1} \cdot u_2(X)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)}, \tag{143}$$
$$\text{pour tout } m \in M,\ X \in \mathfrak{a},$$

avec Q un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de M, $\lambda_1 \in i\mathfrak{a}_Q^*$, $u_1 \in S(\mathfrak{a}_Q^*)$, $u_2 \in S(\mathfrak{a}^*)$, ψ un élément de $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)_{\mathscr{W}_{M_Q}^M}$, et p un polynôme sur $(\mathfrak{a}_Q)_{\mathbb{C}}^*$, (Q,λ_1)-régularisant. Grâce aux équations (7) et (59), et à [13, Éq. (2.2)], on se restreint, par linéarité, au cas où ψ est un élément de $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta_{\mathscr{W}_{M_Q}^M}$, δ désignant une représentation unitaire irréductible de M_Q.

On pose $\lambda_0 := \lambda_1 + \lambda$.

Comme $u_2(X)e^{-\lambda(X)} = \partial(\check{u}_2)(e^{-v(X)})_{|v=\lambda}$, où $\check{u}_2$ est l'élément de $S(\mathfrak{a}^*)$ défini par $\check{u}_2(X) = u_2(-X)$ $(X \in \mathfrak{a})$, on voit que, notant $u_3 := u_1\check{u}_2 \in S(\mathfrak{a}_{P_Q}^*)$, l'équation (143) s'écrit encore:

$$f(mM \cap H, X)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)}$$
$$= \partial(u_3)(p(v_{|\mathfrak{a}_Q})E(Q,\psi,v_{|\mathfrak{a}_Q})(mM \cap H)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda_0},$$
$$\text{pour tout } m \in M,\ X \in \mathfrak{a}. \tag{144}$$

Soit $R<0$ avec $|R|$ suffisamment grand pour vérifier les hypothèses du Théorème 8.1 et tel que l'ouvert Ω_R, défini dans le Théorème 8.1, contienne λ_0.

Soit p_R l'élément de $\Pi(\Sigma_{P_Q})$ donné avant le Théorème 8.1. Comme p est (Q,λ_1)-régularisant par hypothèse et comme p_R l'est aussi, car c'est un multiple de b_R^M (cf. avant le Théorème 8.1, pour la définition de b_R^M), ils sont tous deux multiples non nuls d'un même polynôme (Q,λ_1)-normalisant q, par des produits de formes affines sur $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ (cf. Lemme 3(iii)). D'après le Lemme 4, il existe des éléments u' et u de $S(\mathfrak{a}^*_{P_Q})$ vérifiant:

$$\begin{aligned}
&\partial(u')(q(v_{|\mathfrak{a}_Q})E(Q,\psi,v_{|\mathfrak{a}_Q})(mM\cap H)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda_0}\\
&\quad=\partial(u_3)(p(v_{|\mathfrak{a}_Q})E(Q,\psi,v_{|\mathfrak{a}_Q})(mM\cap H)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda_0}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\partial(u)(p_R(v)E(Q,\psi,v_{|\mathfrak{a}_Q})(mM\cap H)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda_0}\\
&\quad=\partial(u')(q(v_{|\mathfrak{a}_Q})E(Q,\psi,v_{|\mathfrak{a}_Q})(mM\cap H)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda_0},\\
&\qquad\text{pour tout } m\in M,\ X\in\mathfrak{a}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}
&f(mM\cap H,X)e^{(-\lambda+\rho_P)(X)}\\
&\quad=\partial(u)(p_R(v)E(Q,\psi,v_{|\mathfrak{a}_Q})(mM\cap H)e^{(-v+\rho_P)(X)})_{|v=\lambda_0},\\
&\qquad\text{pour tout } m\in M,\ X\in\mathfrak{a}.
\end{aligned}\tag{145}$$

On pose $F_\lambda := F(\lambda_0)$, où F est donné par le Théorème 8.1. Alors, (i) résulte du Théorème 8.1 grâce à (145).

Comme $\lambda_{0\,|\mathfrak{a}}=\lambda$ et comme $\operatorname{Re}\lambda_0=\operatorname{Re}\lambda$, les points (ii) et (iii) résultent du Théorème 8.1, (135) et (136), et (v) résulte de (133).

Comme f est non nul, (iv) résulte de (i) et (iii), compte tenu que $\lambda=\lambda_{0\,|\mathfrak{a}}$.

Prouvons (vi). Supposons que $mM\cap H\mapsto f(mM\cap H)$ est $\mathbb{D}(M/M\cap H)$-propre généralisé pour la valeur propre $\Lambda\in(\mathfrak{a}^d_M)^*_{\mathbb{C}}$. Si $w\in\mathscr{W}^M_{M_Q}$ et $\psi'\in\mathscr{A}_2(M_Q/M_Q\cap w^{-1}Hw,\tau_{M_Q})$ est $\mathbb{D}(M_Q/M_Q\cap w^{-1}Hw)$-propre, la fonction $p(\lambda_1)E(Q,\psi',\lambda_1)$ est $\mathbb{D}(M/M\cap H)$-propre pour une valeur propre déterminée par la relation (3.31) de [15]. L'hypothèse faite sur f et la relation (145), jointe au Lemme 5, montre que seules les composantes ψ' de ψ, conduisant à une fonction, $p(\lambda_1)E(Q,\psi,\lambda_1)$, $\mathbb{D}(M/M\cap H)$-propre pour la valeur propre Λ, contribuent au second membre de (145). On peut donc remplacer ψ dans (145) par la somme de ces composantes. On rappelle la définition de F dans le Théorème 8.1. Les endomorphismes $A_{P,Q}(v)^{-1}$ commutent sur chaque composante $\mathscr{A}_2(M_Q/M_Q\cap w^{-1}Hw,\tau_{M_Q})$, $w\in\mathscr{W}_{M_Q}$, de $\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)_{\mathscr{W}_{M_Q}}$, à l'action de $\mathbb{D}(M_Q/M_Q\cap w^{-1}Hw)$, d'après la définition de $A_{P,Q}(v)^{-1}$ (cf. (129) et (60)). Il résulte, des propriétés de ψ, de [15, Éq. (3.31)], et du Lemme 5, que $F(\lambda_0)$ est $\mathbb{D}(G/H)$-propre généralisé pour la valeur propre $\Lambda-\lambda$, comme désiré. Ceci achève de prouver (vi). ∎

9. PREUVE DU THÉORÈME 3.1

Il suffit de prouver que, pour tout idéal maximal I de $\mathbb{D}(G/H)$, l'espace $\mathscr{A}(G/H,\tau)_{(I)}$ est contenu dans $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$. On fixe dans la suite un tel idéal.

9.1. Soit Φ un élément non nul de $\mathscr{A}(G/H,\tau)_{(I)}$. Pour tout $P_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ et $\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$, il existe un exposant asymptotique directeur ξ' de Φ le long de $\bar{P}_\emptyset$ (i.e., $\xi' \in e_l(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$) avec $\xi \leqslant_{\bar{P}_\emptyset} \xi'$. Alors, d'après l'équation (23),

$$\|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\bar{P}_\emptyset}\| \geqslant \|(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset}\|,$$

avec égalité seulement si $(\mathrm{Re}\,\xi')_{\bar{P}_\emptyset} = (\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset}$. Ceci permet de définir le sous-ensemble $\mathscr{T}(\Phi)$ de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}} \times \mathfrak{a}_\emptyset^*$ formé des couples $(P_\emptyset, (\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset})$ avec $P_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ et ξ vérifiant:

$$\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi), \tag{146}$$

$$\text{pour tout } P'_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}} \text{ et } \xi' \in e(\bar{P}'_\emptyset, \Phi), \tag{147}$$

$$\|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\bar{P}'_\emptyset}\| \leqslant \|(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset}\|.$$

Au vu de la discussion précédente, on peut remplacer la condition (146) par:

$$\xi \in e_l(\bar{P}_\emptyset, \Phi). \tag{148}$$

On pose $\mathscr{T}(0) := \emptyset$.

Comme $\bigcup_{P_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}} e_l(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$ est fini (cf., e.g., Lemme 6), il en va de même pour $\mathscr{T}(\Phi)$.

On a le résultat immédiat suivant:

LEMME 28. (i) *Pour tout $\Phi \in \mathscr{A}(G/H,\tau)_{(I)}$ non nul, l'ensemble $\mathscr{T}(\Phi)$ est non vide.*

(ii) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\Phi \in \mathscr{F}_{I,n+1} \setminus \mathscr{F}_{I,n}$ (cf. Section* 4, *Définition* 4, *pour la définition de $\mathscr{F}_{I,n}$), $(P_\emptyset, \eta) \in \mathscr{T}(\Phi)$ implique $T_I(\|\eta\|) = n+1$ (voir Section* 4, *Définition* 4 *pour T_I).*

Soit $L \in \mathscr{L}$ avec $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands. On note $W^M(\mathfrak{a}^d) := \{w \in W(\mathfrak{a}^d) | \, w_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}}\}$.

On note, pour $\eta \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$ et $P_\emptyset \in \mathscr{P}$, P_η le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G contenant $P_\emptyset$ et dont l'algèbre de Lie est la somme de l'algèbre de Lie de $P_\emptyset$ et des sous-espaces radiciels de $\mathfrak{a}_\emptyset$ pour des racines orthogonales à η. Alors:

$$\eta \in \mathfrak{a}^*_{P_\eta}. \tag{149}$$

PROPOSITION 9.1.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \mathscr{F}_{I,n+1} \backslash \mathscr{F}_{I,n}$ et $(P_\emptyset, \eta) \in \mathscr{T}(\Phi)$. Alors, il existe $F_{(P_\emptyset,\eta)} \in \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau) \cap \mathscr{F}_{I,n+1}$ tel que:*

$$\text{soit } \Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)} \in \mathscr{F}_{I,n},$$
$$\text{soit } \mathscr{T}(\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}) \subseteq \mathscr{T}(\Phi) \backslash \{(P_\emptyset,\eta)\}.$$

Preuve. On pose $P := P_\eta$. Pour $\xi \in e(\overline{P'_\emptyset}, \Phi)$, où $P'_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ vérifie $P'_\emptyset \subset P$, tel que $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\overline{P'_\emptyset}} = \eta$, on pose:

$$\lambda_\xi := -\xi_{|\mathfrak{a}_P} \tag{150}$$

et

$$f_{\lambda_\xi}(mM_P \cap H, X) := p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|\Phi, m, X) \qquad (m \in M_P,\ X \in \mathfrak{a}_P). \tag{151}$$

Montrons que, pour tout $P'_\emptyset$ et ξ comme ci-dessus:

$$\begin{gathered} -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi = \eta \in \overline{\mathscr{C}_{\overline{P'_\emptyset}}} \\ \text{et } \mathrm{Re}\,\lambda_\xi \text{ est strictement } \Sigma_P\text{-dominant.} \end{gathered} \tag{152}$$

Comme $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\overline{P'_\emptyset}} = \eta$, d'après (21), $\mathrm{Re}\,\xi - \eta$ est combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de $\Sigma_{P'_\emptyset}$. Par ailleurs, toujours d'après (21), cette combinaison linéaire doit être orthogonale à η. Or η est $\Sigma_{\overline{P'_\emptyset}}$-dominant, car $\eta = (\mathrm{Re}\,\xi)_{\overline{P'_\emptyset}} \in \overline{\mathscr{C}_{\overline{P'_\emptyset}}}$. Donc, seuls les éléments de $\Sigma_{P'_\emptyset}$ orthogonaux à η interviennent dans cette combinaison linéaire, i.e., $\mathrm{Re}\,\xi - \eta$ est élément de $(\mathfrak{a}^P)^*$. Alors, $\mathrm{Re}\,\xi_{|\mathfrak{a}_P} = \eta_{|\mathfrak{a}_P}$. Mais d'après (149), $\eta \in \mathfrak{a}^*_P$, i.e., $\eta_{|\mathfrak{a}_P} = \eta$, qui est $\Sigma_{\bar{P}_\emptyset}$-dominant, donc strictement $\Sigma_{\bar{P}}$-dominant, d'après la définition de P. Donc $-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi = \mathrm{Re}\,\xi_{|\mathfrak{a}_P} = \eta$ et vérifie (152).

Nous aurons besoin, dans la suite, des résultats suivants, qui sont essentiellement contenus dans la preuve du Théorème 3 de [12]. Pour tout $\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$ tel que $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$:

$$-\lambda_\xi \text{ est un exposant asymptotique directeur de } \Phi \text{ le long de } \bar{P} \tag{153}$$

et

$$\begin{gathered} f_{\lambda_\xi} \text{ est un élément non nul de} \\ \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M_P/M_P \cap H, \tau_{M_P}) \otimes S(\mathfrak{a}^*_P). \end{gathered} \tag{154}$$

Pour montrer (153) et (154), nous rappelons des éléments de la preuve de [12, Théorème 3].

Montrons tout d'abord (153). Soit $\xi' \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$ tel que $-\lambda_\xi \preccurlyeq_{\bar{P}} \xi'_{|\mathfrak{a}_P}$. Alors $-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi \leqslant_{\bar{P}} \mathrm{Re}\,\xi'_{|\mathfrak{a}_P}$.

Donc $\xi'_{|\mathfrak{a}_P} + \lambda_\xi$ est combinaison linéaire à coefficients positifs de racines de $\Sigma_{\bar{P}}$. Or $-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi = \eta$ est strictement $\Sigma_{\bar{P}}$-dominant (cf. (152)). Alors, on a:

$$\begin{gathered}(\mathrm{Re}\,\xi' + \mathrm{Re}\,\lambda_\xi, -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi) \geqslant 0 \\ \text{avec égalité seulement si } \mathrm{Re}\,\xi'_{|\mathfrak{a}_P} = -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi,\end{gathered} \tag{155}$$

ce qui implique, d'après (23), que $\|(-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi)_{\bar{P}_\emptyset}\| \leqslant \|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\bar{P}_\emptyset}\|$, avec égalité seulement si $(-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = (\mathrm{Re}\,\xi')_{\bar{P}_\emptyset}$. Comme $-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi = \eta$ et $(P_\emptyset, \eta) \in \mathscr{T}(\Phi)$, on a égalité grâce à (147). Donc, compte tenu de (21), on a égalité dans (155). On a donc, d'après (155), $\mathrm{Re}\,\xi'_{|\mathfrak{a}_P} = -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi$, ce qui implique, compte tenu que $\mathrm{Im}\,\xi'_{|\mathfrak{a}_P} = -\mathrm{Im}\,\lambda_\xi$, que $\xi'_{|\mathfrak{a}_P} = -\lambda_\xi$. D'où (153).

Montrons maintenant (154). Comme $-\lambda_\xi$ est un exposant asymptotique directeur de Φ le long de $\bar{P}$ (cf. Éq. (153)), il résulte des propriétés de covariance que satisfait $g \mapsto p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|\Phi, g)$ (cf., e.g., [8, Proposition 2, Éq. (13), Proposition 3, Éq. (19)]) et de la τ-sphéricité de ce dernier, que f_{λ_ξ} est un élément non nul de $\mathscr{A}(M_P/M_P \cap H, \tau_{M_P}) \otimes S(\mathfrak{a}_P^*)$. Il suffit maintenant, d'après la Définition 2 de [13], de montrer que tout exposant asymptotique ξ' de f_{λ_ξ} le long de $\bar{P}'_\emptyset \cap M_P(P'_0 \in \mathscr{P}_{st}, P'_0 CP)$ vérifie $\mathrm{Re}\,\xi' \leqslant_{\bar{P}'_\emptyset \cap M_P} 0$. D'après [8, Proposition 5, Éq. (25)], pour tout ξ' comme ci-dessus, il existe $\xi'' \in e(\bar{P}'_\emptyset, \Phi)$ tel que $\xi''_{|\mathfrak{a}^P} = \xi'$ et $\xi''_{|\mathfrak{a}_P} = -\lambda_\xi$, où $\mathfrak{a}^P$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{a}_\emptyset$. On a alors $(\mathrm{Re}\,\xi'' + \mathrm{Re}\,\lambda_\xi, -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi) = (\mathrm{Re}\,\xi', -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi) = 0$, ce qui implique, d'après (23) et (152), que:

$$\begin{gathered}\|(\mathrm{Re}\,\xi'')_{\bar{P}'_\emptyset}\| \geqslant \| - \mathrm{Re}\,\lambda_\xi\|, \\ \text{avec égalité seulement si } (\mathrm{Re}\,\xi'')_{\bar{P}'_\emptyset} = -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi.\end{gathered}$$

Or, d'après notre choix du couple $(P_\emptyset, \eta)$ (i.e., $(P_\emptyset, \eta) \in \mathscr{T}(\Phi)$) et compte tenu de (152), on a aussi $\|(\mathrm{Re}\,\xi'')_{\bar{P}'_\emptyset}\| \leqslant \| - \mathrm{Re}\,\lambda_\xi\|$, et donc l'égalité $(\mathrm{Re}\,\xi'')_{\bar{P}'_\emptyset} = -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi = \mathrm{Re}\,\xi''_{|\mathfrak{a}_P}$. Donc, d'après (21) et (22), $\mathrm{Re}\,\xi' \leqslant_{\bar{P}'_\emptyset} 0$, i.e., compte tenu que $\mathrm{Re}\,\xi'_{|\mathfrak{a}_P} = 0$, $\mathrm{Re}\,\xi' \leqslant_{\bar{P}'_\emptyset \cap M_P} 0$, et ceci est vérifié pour tout $\xi' \in e(\bar{P}'_\emptyset, \Phi)$, $P'_0 \in \mathscr{P}_{st}$ tel que $P'_0 CP$. D'où (154).

On pose

$$F_{(P_\emptyset, \eta)} := \sum C_\xi^{-1} F_{\lambda_\xi}, \tag{156}$$

où la somme est prise sur les exposants asymptotiques directeurs ξ de Φ le long de $\bar{P}_\emptyset$ vérifiant $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$, et où les F_{λ_ξ} sont donnés, grâce aux équations (152) et (154), par la Proposition 8.0.1, où l'on remplace λ

(resp. f) par λ_ξ (resp. f_{λ_ξ}), et chaque C_ξ est le cardinal de l'ensemble (fini) des $\xi' \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$ vérifiant $(\mathrm{Re}\,\xi')_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$ et $\lambda_{\xi'} = \lambda_\xi$. Rappelons (cf. Proposition 8.0.1(iii)) que l'on a:

$$\begin{gathered}\text{pour tout } v \in \mathscr{W}_P, \text{ si } \xi' \in e(\overline{P^v}, F_{\lambda_\xi}) \\ \mathrm{Re}\,\xi' \leqslant_{\overline{P^v}} -v\,\mathrm{Re}\,\lambda_\xi \\ \text{avec égalité seulement si } \xi' = -v\lambda_\xi.\end{gathered} \tag{157}$$

D'après la Proposition 8.0.1 et par construction de la fonction $F_{(P_\emptyset,\eta)}$, on voit que $F_{(P_\emptyset,\eta)} \in \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$. Comme $-\lambda_\xi$ ($\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$ tel que $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$) est un exposant asymptotique directeur de Φ (resp. F_{λ_ξ}) le long de $\bar{P}$ (cf. Éq. (153) (resp. Proposition 8.0.1(iv))), le coefficient asymptotique correspondant est τ-sphérique et invariant à droite par $\bar{N}_P$ (cf., e.g., [8, Proposition 2, Éq. (13), Proposition 3, Éq. (19)]). Il résulte alors, pour tout ξ comme ci-dessus, de (157) pour $v = e_G$ que, si $\xi' \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$ est tel que $\mathrm{Re}\,\lambda_{\xi'} = \mathrm{Re}\,\lambda_\xi$ et $\lambda_{\xi'} \neq \lambda_\xi$, on a:

$$\begin{aligned} &p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|F_{\lambda_{\xi'}}, g) = 0 \, (g \in G) \\ \text{et}\quad &p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|F_{\lambda_\xi}, g) = p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|\Phi, g) \, (g \in G). \end{aligned} \tag{158}$$

En sommant sur les $\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$ vérifiant $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$, il résulte de (158) et de la définition de la fonction $F_{(P_\emptyset,\eta)}$ (cf. Éq. (156)), par unicité du développement asymptotique, que:

$$\begin{gathered} p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|F_{(P_\emptyset,\eta)}, g) = p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|\Phi, g) \quad (g \in G) \\ \text{et} \qquad -\lambda_\xi \text{ est un exposant asymptotique directeur de } F_{(P_\emptyset,\eta)} \\ \text{le long de } \bar{P}, \text{ pour tout } \xi \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi) \text{ tel que } (\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta. \end{gathered} \tag{159}$$

Soit ξ comme ci-dessus. Posons $I = I_\omega$, où $\omega \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ et $I_\omega = \{D \in \mathbb{D}(G/H) \,|\, \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(\omega) = 0\}$. D'après (153) et [8, Proposition 3, (18)], comme Φ est annulé par une puissance I^k, $k \in \mathbb{N}^*$, de I:

$$\begin{gathered} \text{la fonction définie sur } (M_P/M_P \cap H) \times \mathfrak{a}_P, \\ (mM_P \cap H, X) \mapsto f_{\lambda_\xi}(mM_P \cap H, X)e^{-\lambda_\xi(X)}, \\ \text{est annulé par } \mu_P(I^k) \text{ (cf. Éq. (4), pour la définition de } \mu_P). \end{gathered} \tag{160}$$

On dispose de l'isomorphisme d'algèbres, $\gamma_{\mathfrak{a}^d}^{L_P/L_P\cap H}$, de $\mathbb{D}(L_P/L_P \cap H)$ sur $S(\mathfrak{a}^d)^{W^{M_P}(\mathfrak{a}^d)}$. Alors, compte tenu de (5),

$$\mu_P(I) = \{D \in \mathbb{D}(L_P/L_P \cap H) |\ \gamma_{\mathfrak{a}^d}^{L_P/L_P\cap H}(D)(\omega) = 0\}.$$

L'idéal de $\mathbb{D}(L_P/L_P \cap H)$ engendré par $\mu_P(I^k)$ est de codimension finie et les idéaux maximaux de $\mathbb{D}(L_P/L_P \cap H)$ contenant $\mu_P(I^k)$ sont de la forme:

$$J_{\omega'} \coloneqq \{D \in \mathbb{D}(L_P/L_P \cap H) |\ \gamma_{\mathfrak{a}^d}^{L_P/L_P\cap H}(D)(\omega') = 0\},$$

où $\omega' \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ est conjugué sous $W(\mathfrak{a}^d)$ à ω. Il résulte donc de (160) que la fonction $(mM_P \cap H, X) \mapsto f_{\lambda_\xi}(mM_P \cap H, X)e^{-\lambda_\xi(X)}$ est une somme de fonctions propres généralisées pour des valeurs propres ω' conjuguées sous $W(\mathfrak{a}^d)$ à ω. Par ailleurs, on a évidemment $\omega'_{|\mathfrak{a}_P} = -\lambda_\xi$. Alors l'application du point (vi) de la Proposition 8.0.1 montre que l'on peut choisir F_{λ_ξ} comme somme de fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-propres généralisées pour des valeurs propres $\omega' \in W(\mathfrak{a}^d)\omega$. Cela implique que F_{λ_ξ} est annulé par une puissance de $I = I_\omega$, i.e., $F_{\lambda_\xi} \in \mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$. On a donc bien $F_{(P_\emptyset,\eta)} \in \mathscr{A}(G/H, \tau)_{(I)}$.

Montrons que:

$$\begin{gathered}\text{pour tout } P'_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}},\ P'_\emptyset \subset P, \text{ et tout } \xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{(P_\emptyset,\eta)}),\\ \|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}}\| \leqslant \|\eta\|,\\ \text{et si on a égalité, } \xi' \notin e(\overline{P'_\emptyset}, \Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}).\end{gathered} \tag{161}$$

Soient $P'_\emptyset$ et ξ' comme dans (161). Par construction de $F_{(P_\emptyset,\eta)}$ (cf. Éq. (156)), il existe alors $\xi \in e(\bar{P}_\emptyset, \Phi)$, $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset} = \eta$, tel que $\xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{\lambda_\xi})$. D'après la Proposition 8.0.1(ii) (pour $v = e_G$), on a alors:

$$\mathrm{Re}\,\xi' \leqslant_{\overline{P'_\emptyset}} -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi,$$

ce qui implique, d'après (23) et (152), que:

$$\begin{gathered}\|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}}\| \leqslant \|\eta_{\overline{P'_\emptyset}}\|\\ \text{avec égalité seulement si } (\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}} = \eta_{\overline{P'_\emptyset}}.\end{gathered} \tag{162}$$

En particulier, on a alors, grâce à (24),

$$\|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}}\| \leqslant \|\eta\| \tag{163}$$

Si on a égalité dans (163), on a égalité dans (162) et, d'après (24) joint à (162), $\|\eta_{\overline{P'_\emptyset}}\| = \|\eta\|$, ce qui implique encore d'après (23) que $\eta_{\overline{P'_\emptyset}} = \eta$. Donc si on a égalité dans (163), $(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}} = \eta$. Comme $\xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{\lambda_\xi})$ et $P'_\emptyset \subset P$, on a alors (cf. Éq. (152)) $-\mathrm{Re}\,\lambda_{\xi'} = \eta$. Comme $P'_\emptyset \subset P$, $-\lambda_{\xi'} \in e(\bar{P}, F_{\lambda_\xi})$ et comme $-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi = \eta$, il résulte de (157), pour $v = e_G$, que $-\mathrm{Re}\,\lambda_{\xi'} = \eta$ implique que:

$$\lambda_{\xi'} = \lambda_\xi.$$

Par unicité du développement asymptotique, il résulte de (159) que $-\lambda_\xi \notin e(\bar{P}, \Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)})$. Donc, il en va de même pour $-\lambda_{\xi'}$, ce qui implique, compte tenu que $P'_\emptyset \subset P$, que $\xi' \notin e(\overline{P'_\emptyset}, \Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)})$. On obtient donc (161) comme désiré.

Montrons maintenant que:

$$\begin{gathered}\text{pour tout } P'_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}},\ P'_\emptyset \not\subseteq P, \text{ et tout } \xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{(P_\emptyset,\eta)}),\\ \|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}}\| < \|\eta\|.\end{gathered} \tag{164}$$

Supposons qu'il existe $P'_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$, $P'_\emptyset \not\subseteq P$, et $\xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{(P_\emptyset,\eta)})$ tel que:

$$\|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}}\| \geqslant \|\eta\| \tag{165}$$

Il existe, par définition de $F_{(P_\emptyset,\eta)}$, $\xi \in e(P_\emptyset, \Phi)$ tel que $(\mathrm{Re}\,\xi)_{\bar{P}_\emptyset}$ $\xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{\lambda_\xi})$. Comme $P_\emptyset$ et $P'_\emptyset$ sont des éléments de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ distincts, il existe (cf. [14, Lemme 2(i)]) un élément v_0 de $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ différent de e_G tel que:

$$P'_\emptyset = P_\emptyset^{v_0}.$$

Comme $P_\emptyset$ est contenu dans P, on a:

$$P'_\emptyset \subset P^{v_0}.$$

Comme P^{v_0} contient $P'_\emptyset$, un élément de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$, P^{v_0} est un élément de $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}$ conjugué sous P à G. Donc il existe (cf. [14, Lemme 10(iii)]) $v \in \mathscr{W}_P$, $v \neq e_G$ tel que $P^{v_0} = P^v$. Donc il existe $v \in \mathscr{W}_P$, $v \neq e_G$, tel que:

$$P'_\emptyset \subset P^v. \tag{166}$$

Montrons que:

$$v\eta \in \overline{\mathscr{C}_{\overline{P'_\emptyset}}}. \tag{167}$$

Comme $-\mathrm{Re}\,\lambda_\xi$ est strictement $\Sigma_{\bar{P}}$-dominant (cf. Éq. (152)), $-v\,\mathrm{Re}\,\lambda_\xi$ est strictement $\Sigma_{\overline{P^v}}$-dominant. On a donc, compte tenu que $\eta = -\mathrm{Re}\,\lambda_\xi$ (cf. Éq. (152)), que $v\eta \in \overline{\mathscr{C}_{\overline{P'_\emptyset}}}$, d'où (167).

D'après la Proposition 8.0.1(ii), il résulte de l'équation (166), compte tenu que $\xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{\lambda_\xi})$, que:

$$\mathrm{Re}\,\xi' \leqslant_{\overline{P'_\emptyset}} -v\,\mathrm{Re}\,\lambda_\xi,$$

ce qui implique grâce aux équations (23) et (152), (167):

$$\begin{gathered}\|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}}\| \leqslant \|v\eta\|\\ \text{avec égalité seulement si } (\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}} = v\eta.\end{gathered} \tag{168}$$

Comme v est une isométrie, il résulte de (165) que $\|(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}}\| \geqslant \|v\eta\|$, ce qui implique d'après (168) que:

$$(\mathrm{Re}\,\xi')_{\overline{P'_\emptyset}} = v\eta. \tag{169}$$

Comme $\xi' \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{\lambda_\xi})$ et $P'_\emptyset \subset P^v$ (cf. Éq. (166)), $\xi'_{|\mathfrak{a}_{P^v}} \in e(\overline{P^v}, F_{\lambda_\xi})$. Il résulte alors de (157) que:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} \xi'_{|\mathfrak{a}_{P^v}} \leqslant_{\overline{P^v}} -v \operatorname{Re} \lambda_\xi \\ \text{avec égalité seulement si } \xi'_{|\mathfrak{a}_{P^v}} = -v\lambda_\xi.\end{gathered} \tag{170}$$

Comme $-\operatorname{Re} \lambda_\xi = \eta$ (cf. Éq. (152)), il résulte de (169) et (170) que:

$$\xi'_{|\mathfrak{a}_{P^v}} = -v\lambda_\xi.$$

Or, d'après la Proposition 8.0.1(v), $-v\lambda_\xi \notin e(\overline{P^v}, F_{\lambda_\xi})$, d'où une contradiction. On obtient donc bien (164).

Les équations (161) et (164), joint à la définition de la filtration $\mathscr{F}_I$ (cf. Section 4, Définition 4), au fait que $(P_\emptyset, \eta) \in \mathscr{T}(\Phi)$ et que $\Phi \in \mathscr{F}_{I,n+1}$, montrent que:

$$F_{(P_\emptyset,\eta)} \in \mathscr{F}_{I,n+1}. \tag{171}$$

Montrons que:

$$\begin{gathered}\text{pour tout } P'_\emptyset \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}, \text{ si } \xi \in e(\overline{P'_\emptyset}, F_{(P_\emptyset,\eta)}) \text{ avec } \|(\operatorname{Re} \xi)_{\overline{P'_\emptyset}}\| = \|\eta\|, \\ \xi \notin e(\overline{P'_\emptyset}, \Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}).\end{gathered} \tag{172}$$

Soit ξ comme ci-dessus. Traitons le cas où $P'_\emptyset \subset P$. Pour un tel ξ, le polynôme sur $\mathfrak{a}_P$, $p_{-\lambda_\xi}(\bar{P}|\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}, g)$ $(g \in G)$, est nul par construction de $F_{(P_\emptyset,\eta)}$ (cf. Éq. (159)). Or $\xi_{|\mathfrak{a}_P} = -\lambda_\xi$ (cf. Éq. (150)), donc $\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}$ n'a aucun exposant le long de $\overline{P'_\emptyset}$, dont la restriction à $\mathfrak{a}_P$ est égale à $-\lambda_\xi$. Maintenant, si $P'_\emptyset \not\subset P$, (164) implique que, si $\|(\operatorname{Re} \xi)_{\overline{P'_\emptyset}}\| = \|\eta\|$, on a $\xi \notin e(\overline{P'_\emptyset}, \Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)})$. Donc (172) est satisfait dans ce cas.

On déduit de (172) que si $\mathscr{T}(\Phi)$ n'est pas réduit au couple $(P_\emptyset, \eta)$, on a $\mathscr{T}(\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}) \subseteq \mathscr{T}(\Phi) \setminus \{(P_\emptyset, \eta)\}$. Dans le cas contraire, on a $\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)} \in \mathscr{F}_{I,n}$. Ceci achève de prouver la Proposition. ∎

9.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que, pour $\Phi \in \mathscr{F}_{I,n+1} \setminus \mathscr{F}_{I,n}$, il existe $F \in \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H, \tau)$ vérifiant:

$$\begin{aligned} &F \in \mathscr{F}_{I,n+1} \\ \text{et} \quad &\Phi - F \in \mathscr{F}_{I,n}. \end{aligned} \tag{173}$$

On va opérer une récurrence sur $k = \#(\mathscr{T}(\Phi))$.

Si $k = 1$, l'assertion résulte de la Proposition 9.1.1. Supposons par récurrence, l'assertion vraie jusqu'à $k - 1$. Soit $(P_\emptyset, \eta) \in \mathscr{T}(\Phi)$. Il existe $F_{(P_\emptyset,\eta)}$ comme dans la Proposition 9.1.1. Si $\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)} \in \mathscr{F}_{I,n}$, l'équation

(173) est satisfaite pour $F = F_{(P_\emptyset,\eta)}$. Supposons donc le contraire. Alors (cf. Proposition 9.1.1) $\mathscr{T}(\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}) \subseteq \mathscr{T}(\Phi) \setminus \{(P_\emptyset, \eta)\}$, ce qui implique que $\#(\mathscr{T}(\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)})) \leqslant k-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe alors $F' \in \mathscr{F}_{I,n+1} \cap \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$ tel que $(\Phi - F_{(P_\emptyset,\eta)}) - F' \in \mathscr{F}_{I,n}$. Si on pose $F = F_{(P_\emptyset,\eta)} + F'$, l'assertion est alors bien vérifiée.

On montre maintenant le Théorème 3.1 par récurrence sur la longueur de la filtration $\mathscr{F}_I$ de $\mathscr{A}(G/H,\tau)_{(I)}$.

Tenant compte du Lemme 7, il résulte du Corollaire 5.2 que $\mathscr{F}_{I,0}$ est contenu dans $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$. Supposons par récurrence que $\mathscr{F}_{I,n}$ soit contenu dans $\mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$. Soit $\Phi \in \mathscr{F}_{I,n+1} \setminus \mathscr{F}_{I,n}$. Il existe alors (cf. Éq. (173)) $F \in \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$ tel que $\Phi - F \in \mathscr{F}_{I,n}$. Par hypothèse de récurrence, ceci implique que $\Phi - F \in \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$. On a donc bien $\Phi \in \mathscr{A}_{\mathrm{Eis}}(G/H,\tau)$.

ACKNOWLEDGMENTS

I express my sincere thanks to Professors E. van den Ban, J. Carmona, P. Delorme, and N. Wallach for their enlightening discussions and for pointing out some errors in the previous version of this paper. I am also grateful to the referee for comments that contributed to improve the presentation.

REFERENCES

1. E. P. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space, II, Eisenstein integrals, *J. Funct. Anal.* **109** (1992), 331–441.
2. E. P. van den Ban, J. Carmona, and P. Delorme, Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif, *J. Funct. Anal.* **139** (1996), 225–243, doi:10.1006/jfan.1996.0084.
3. E. P. van den Ban and H. Schlichtkrull, Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on a Riemannian symmetric space, *J. Reine Angew. Math.* **380** (1987), 108–165.
4. E. P. van den Ban and H. Schlichtkrull, Local boundary data of eigenfunctions on a Riemannian symmetric space, *Invent. Math.* **98** (1989), 639–657.
5. A. Borel and N. R. Wallach, "Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
6. N. Bourbaki, "Éléments de mathématique, Fasc. XXXIII. Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats (Paragraphes 1 à 7)," Hermann, Paris, 1967.
7. J. Carmona, Sur la classification des modules admissibles irréductibles, "Noncommutative Harmonic Analysis and Lie Groups (Marseille, 1982)" (J. Carmona, P. Delorme, and M. Vergne, Eds.), pp. 11–34, Springer, Berlin, 1983.
8. J. Carmona, Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, *J. Reine Angew. Math.* **491** (1997), 17–63.
9. J. Carmona and P. Delorme, Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs: Equation fonctionnelle, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), 152–221, doi:10.1006/jfan.1994.1065.

10. J. Carmona and P. Delorme, Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif, *Invent. Math.* **134** (1998), 59–99.
11. W. Casselmann and D. Miličić, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, *Duke Math. J.* **49** (1982), 869–930.
12. P. Delorme, Injection de modules sphériques pour les espaces symétriques réductifs dans certaines représentations induites, with an appendix by E. P. van den Ban, "Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille-Luminy, 1985)" (J. Carmona, P. Delorme, and M. Vergne, Eds.), pp. 108–143, Springer, Berlin, 1987, (Erratum in the Appendix of [13]).
13. P. Delorme, Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs: Tempérance, majorations. Petite matrice *B*, *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 422–509, doi:10.1006/jfan.1996.0035.
14. P. Delorme, Troncature pour les espaces symétriques réductifs, *Acta Math.* **179** (1997), 41–77.
15. P. Delorme, Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs, *Ann. Math.* **147** (1998), 417–452.
16. J. Franke, Harmonic analysis in weighted L_2-spaces, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **31** (1998), 181–279.
17. Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. I. The theory of the constant term, *J. Funct. Anal.* **19** (1975), 104–204.
18. H. Hecht and W. Schmid, Characters, asymptotics and $\mathfrak{n}$-homology of Harish-Chandra modules, *Acta Math.* **151** (1983), 49–151.
19. S. Helgason, Groups and geometric analysis, "Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions," Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984.
20. A. W. Knapp and E. M. Stein, Intertwining operators for semisimple groups, II, *Invent. Math.* **60** (1980), 9–84.
21. B. Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, *Invent. Math.* **48** (1978), 101–184.
22. R. P. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, "Representation Theory and Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups," pp. 101–170, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
23. V. S. Varadarajan, "Harmonic Analysis on Real Reductive Groups," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 576, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
24. J. L. Waldspurger, Cohomologie des espaces de formes automorphes (d'après J. Franke), *Astérisque* (1997); Exp. No. 809, 3, 139–156, Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.
25. N. R. Wallach, "Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups, Lie group representations, I (College Park, MD, 1982/1983)," pp. 287–369, Springer, Berlin, 1983.
26. N. R. Wallach, "Real Reductive Groups, I," Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.