Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur : Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

Algèbre linéaire

Chapitre II : Systèmes linéaires

Table des matières

1 Définitions

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Un système d'équations linéaires à n équtions et p inconnues est une équation de la forme $A \cdot X = B$, où $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des matrices données, et où l'on cherche à déterminer la matrice colone $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. Plus précisément, si $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,p}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors le système $A \cdot X = B$ s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Exemple. Par exemple si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $A \cdot X = B$ est un système d'équations linéaires qui s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Vocabulaire.

(i) Les x_i sont appelés les inconnues du système.

(ii) A est appelé la matrice associée ou relative au système.

(iii) B est appelé le second membre du système.

(iv) Si $B = 0_{n1}$, on dit que le système est homogène.

(v) Si $B \neq 0_{n1}$, le système $A \cdot X = 0_{n1}$ est appelé le système homogène associé.

(vi) Le rang du système est le rang de sa matrice associée A.

(vii) Le système est dit triangulaire si A est triangulaire.

(viii) Le système est dit (bien) échelonnée si la matrice A est (bien) échelonnée.

Notation.

1. Pour alléger l'écriture, le système $A \cdot X = B$ est noté $(A|B)$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

2. Si $p = 1, 2, 3, 4$, on note souvent $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$.

2 Résolution d'un système d'équations linéaires

2.1 Présentation de la méthode de résolution d'un système

Définition. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

(i) Une solution du système $A \cdot X = B$ est un vecteur $v \in \mathbb{K}^p$ tel que $A \cdot v^T = B$.

(ii) Résoudre le système $A \cdot X = B$ c'est déterminer l'ensemble (dans $\mathbb{K}^p$) de toutes les solutions de ce système.

(iii) Deux systèmes sont équivalents s'ils ont exactement le même ensemble de solutions.

Exemple.

(1) Les vecteurs $(1, 0)$, $(1/2, 1/2)$ et $(2, -1)$ sont des solutions du système $x + y = 1$.

(2) L'ensemble des solutions de $x + y = 1$ est $\{(1, 0) + \lambda(1, -1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est le singleton $\{(4/3, -1/3)\}$.

(3) Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x & + & y & = & 5 \\ 6x & - & 3y & = & 9 \end{array} \right.$$

sont équivalents.

La matrice associée au premier système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et son second membre est $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La matrice associée au deuxième système est $A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ et son second membre est $B' = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 \quad = A'$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 \quad = B'$$

Méthode de résolution d'un système d'équations linéaires.

Pour résoudre le système $A \cdot X = B$, on échelonne $(A|B)$.

Exemple (solution unique)**.** Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & y & - & z & = & 2 \end{array} \right.$$

Exemple (aucune solution)**.** Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & 3z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exemple (infinité de solutions)**.** Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$$

2.2 Justification de la méthode de résolution

2.1 Proposition. *Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $E \in GL_n(\mathbb{K})$, les systèmes d'équations linéaires $(A|B)$ et $(EA|EB)$ sont équivalents.*

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{K}^p$ une solution de $(A|B)$. Alors $A \cdot v^T = B$ implique, en multipliant par la matrice E, que $E(A \cdot v^T) = EB$, I.e. $(EA) \cdot v^T = EB$. Donc v est solution du système $(EA|EB)$.

Réciproquement, si $w \in \mathbb{K}^p$ est solution de $(EA|EB)$, on a $(EA) \cdot w^T = EB$. Comme E est inversible, E^{-1} existe. En multipliant chaque membre de l'égalité précédente, on obtient $E^{-1}(EA) \cdot w^T = E^{-1}(EB)$. Comme $E^{-1}E = I_n$, il en résulte par associativité l'égalité $A \cdot w^T = B$, i.e. w solution de $(A|B)$. $\square$

3 Ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires

3.1 Le nombre de solutions

3.1 Proposition. *Un système d'équations linéaires a*

(i) soit zéro solution ;

(ii) soit une solution unique ;

(iii) soit une infinité de solutions.

Démonstration. Soit $(A|B)$ un système d'équations linéaires. Supposons que ce système a au moins deux solutions distinctes v et w. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A \cdot (\lambda(v-w))^T = \lambda(A \cdot (v^T - w^T)) = \lambda(A \cdot v^T) - \lambda(A \cdot w^T) = \lambda B - \lambda B = 0_{n1},$$

i.e. $\lambda(v-w)$ est une solution du système homogène associé $(A|0_{n1})$ à $(A|B)$. On a donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A \cdot (v + \lambda(v-w))^T = A \cdot v^T + A \cdot (\lambda(v-w)^T) = B,$$

i.e. $v + \lambda(v-w)$ solution du système $(A|B)$. Montrons qu'on a ainsi obtenu une infinité de solutions. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq \mu$. Alors

$$v + \lambda(v-w) - (v + \mu(v-w)) = (\lambda - \mu)(v-w) \neq 0_{1p}$$

car $\lambda - \mu \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $v - w \neq 0_{1p}$. Donc il y a autant de solutions de $(A|B)$ que d'éléments de $\mathbb{K}$, et ce dernier ensemble est infini. □

3.2 Rang d'un système d'équations linéaires et nombre de paramètres

Définition. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Le nombre de paramètres du système $(A|B)$ est la différence de p (le nombre d'inconnues) par le rang du système, i.e. $p - \mathrm{rg}(A)$.

Considérons le système $(A|B)$ avec $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $E \in GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrices élémentaires, tel que $\widetilde{A} = EA$ soit la forme bien échelonnée de A et posons $\widetilde{B} = EB = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$.

Cas 1 : $\mathrm{rg}(A) = n = p$.

Dans ce cas, A est inversible, $A^{-1} = E$ et le système $(A|B)$ est équivalent à $(I_n|A^{-1}B)$, i.e. $X = A^{-1}B$. L'ensemble des solutions de $(A|B)$ est donc le singleton $\{(A^{-1}B)^T\}$.

Exemple. L'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

est $\{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} (A^{-1})^T\}$, où A est la matrice associé au système.

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est le point $(17/5, -2, -18/5)$.

Cas 2 : $\operatorname{rg}(A) = p < n$**.**

Dans ce cas, il y a plus d'équations que d'inconnues. Alors le nombre de paramètres du système $(A|B)$ est nul,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} & I_p & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et le système $(A|B)$ est équivalent au système $(\widetilde{A}|\widetilde{B})$, i.e. à

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & \tilde{b}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_p & = & \tilde{b}_p \\ 0 & = & \tilde{b}_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & \tilde{b}_n \end{array} \right.$$

Donc, si $\tilde{b}_{p+1} = \cdots = \tilde{b}_n = 0$, alors le système $(A|B)$ a pour ensemble de solution le singleton $\{(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_p)\}$.

Sinon, i.e. il existe $p+1 \leqslant j \leqslant n$ tel que $\tilde{b}_j \neq 0$, alors le système $(A|B)$ n'a pas de solution et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

Exemple.

(1) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & -5 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est le point $(-1, -1/2, 3/2, 0)$.

(2) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble $\varnothing$.

Cas 3 : $\operatorname{rg}(A) = n < p$**.**

Dans ce cas, il y a plus d'inconnues que d'équations. Alors le nombre de paramètres du système $(A|B)$ est égal à $p - n$. Supposons pour simplifier que les pivots de $\widetilde{A}$ sont placés sur les n premières colonnes de $\widetilde{A}$, i.e.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} & * & \cdots & * \\ I_p & \vdots & \cdots & \vdots \\ & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

et le système $(A|B)$ est équivalent au système $(\widetilde{A}|\widetilde{B})$, i.e. à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & \tilde{b}_1 & + & \text{comb. linéaire de } x_{n+1}, \dots, x_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \tilde{b}_n & + & \text{comb. linéaire de } x_{n+1}, \dots, x_p \end{array} \right.$$

Les inconnues $x_1, \dots, x_n$ sont appelées les inconnues principales et les inconnues $x_{n+1}, \dots, x_p$ sont appelées les paramètres du système. L'ensemble des solutions de $(A|B)$ est un ensemble infini.

Exemple.

(1) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & 2t & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ est la droite passant par $(0,0,0,0)$ et de vecteur directeur $(-1,1,-1,1)$.

(2) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ est le plan passant par $(0,0,0,0)$ et contenant les vecteurs $(1,0,1,0)$ et $(0,1,0,1)$.

(3) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccr} x & - & y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & & & + & 2t & = & -2 \\ x & - & 2y & - & z & + & 2t & = & 5 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ est la droite passant par $(-6,-4,-3,0)$ et de vecteur directeur $(-1,1,-1,1)$.

(4) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & - & 2y & - & z & + & 2t & = & 5 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ est le plan passant par $(-3,-4,0,0)$ et contenant les vecteurs $(1,0,1,0)$ et $(0,1,0,1)$.

Cas 4 : $\mathrm{rg}(A) < \min\{n,p\}$**.**

Dans ce cas, le nombre de paramètres du système $(A|B)$ est égal à $p-\mathrm{rg}(A)$. Supposons pour simplifier que les pivots de $\widetilde{A}$ sont placés sur les $r = \mathrm{rg}(A)$ premières colonnes de $\widetilde{A}$, i.e.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} & & * & \cdots & * \\ & I_p & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et le système $(A|B)$ est équivalent au système $(\widetilde{A}|\widetilde{B})$, i.e. à

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & \tilde{b}_1 & + & \text{comb. linéaire de } x_{r+1}, \dots, x_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & = & \tilde{b}_{\mathrm{rg}(A)} & + & \text{comb. linéaire de } x_{r+1}, \dots, x_p \\ 0 & = & \tilde{b}_{r+1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & = & \tilde{b}_n & & \end{array} \right.$$

S'il exists $r+1 \leqslant j \leqslant n$ tel que $\tilde{b}_j \neq 0$, alors le système $(A|B)$ n'a pas de solution.

Sinon, i.e. $\tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_n = 0$, alors l'ensemble des solutions de $(A|B)$ est un ensemble infini. Les inconnues $x_1, \dots, x_r$ sont les inconnues principales et les inconnues $x_{r+1}, \dots, x_p$ sont les paramètres du système.

Exemple.

(1) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ est le plan passant par $(0,0,0,0)$ et contenant les vecteurs $(0,1,1,0)$ et $(1-2,0,1)$.

(2) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ & & y & - & z & + & 2t & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 3t & = & 1 \end{array} \right.$$

Géométrie de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$ est l'ensemble vide $\varnothing$.