Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur : Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

Algèbre linéaire

Chapitre III : Déterminants

Table des matières

Le déterminant est une application qui à une matrice carrée associe un scalaire et qui va permettre, entre autres de détecter si une matrice carrée est inversible.
Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition et première méthode de calcul

Notation. Soient $n \geqslant 2$ et A une matrice carrée d'ordre n. Pour $i, j = 1, \ldots, n$, on note $\bar{A}^{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A}^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A noté $\det(A)$ ou $|A|$ est un élément de $\mathbb{K}$ que l'on définit pa récurrence de la manière suivante :

- si $n = 1$ alors $\det(A) = A_{11}$,
- si $n \geqslant 2$ alors $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(\bar{A}^{i,1})$.

Cette formule est appelée développement par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne de A.

Exemple.

- $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = a\det((d)) - c\det((b)) = ad - bc$.

– $n = 3$: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \\ &= a(ei - hf) - d(bi - ch) + g(ae - db \\ &= aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi). \end{aligned}$$

Remarque. Très long à calculer. Pour un déterminant d'une matrice d'ordre 4, il faut calculer 4 déterminants de matrices d'ordre 3 qui ont chacun 6 termes. Cela donne une somme à 24 termes. Pour un déterminant d'une matrice d'ordre 5, il faut calculer 5 déterminants de matrices d'ordre 4 qui ont chacun 24 termes. Cela donne une somme à $5 * 24 = 120$ termes.
En général, $\det(A) =$ somme de $n!$ termes et chaque terme est un produit de $(n-1)$ facteurs.
On va voir dans la suite d'autres méthodes de calcul.

2 Les théorèmes fondamentaux

2.1 Théorème (admis)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On a*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Exemple ($n = 2$)**.** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{vmatrix} \\ &= (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') = \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Remarque. On déduit du théorème que $\det(AB) = \det(BA)$ (même si $AB \neq BA$).

2.2 Théorème (admis)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

2.3 Proposition. *Soit A une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.*

Démonstration. On va montrer la proposition pour les matrices triangulaires supérieures et par récurrence sur n. Pour obtenir la formule pour les matrices triangulaires inférieures, il suffit d'appliquer le théorème précédent. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, alors, pour tout $i > j$, $a_{ij} = 0$.

– $n = 1$: si A triangulaire supérieure d'ordre 1, $\det(A) = a_{11}$.

– $n \to n+1$: supposons que, pour toute matrice triangulaire supérieure d'ordre n, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux, et soit A une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n+1$. Alors, comme, pour tout $i > 1$, $a_{i1} = 0$, et, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $(\bar{A}^{11})_{ii} = a_{i+1i+1}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \det(A) & = & \sum_{i=1}^{n+1} a_{i1} \det(\bar{A}^{i1}) \\ & = & a_{11} \det(\bar{A}_{11}) \\ & = & a_{11}((\bar{A}^{11})_{11}(\bar{A}^{11})_{22} \cdots (\bar{A}^{11})_{nn}) \\ & = & a_{11}(a_{22}a_{33} \cdots a_{n+1n+1}). \end{array}$$

□

2.4 Corollaire. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.*

Démonstration. On a $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$ et $\det(\lambda A) = \det(\lambda I_n)\det(A)$. □

3 Utilisation de l'échelonnement pour calculer le déterminant

3.1 Déterminants des matrices élémentaires

3.1 Lemme. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$. On a*

$$P_{ij} = D_j(-1)T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1).$$

Démonstration. On va montrer que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$,

$$P_{ij}A = D_j(-1)T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A.$$

On peut ensuite, en choisissant des matrices A adéquates, déduire de cette égalité que les matrices P_{ij} et $D_j(-1)T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ ont les mêmes coefficients.
La matrice $P_{ij}A$ est celle obtenue à partir de A en permutant les lignes L_i et L_j. Que donne $D_j(-1)T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)A$?

$$\begin{array}{c} L_i \\ L_j \end{array} \xrightarrow[T_{ij}(1)]{} \begin{array}{c} L_i + L_j \\ L_j \end{array} \xrightarrow[T_{ji}(-1)]{} \begin{array}{c} L_i + L_j \\ L_j - (L_i + L_j) = -L_i \end{array} \xrightarrow[T_{ij}(1)]{} \begin{array}{c} L_i + L_j - L_i = L_j \\ -L_i \end{array} \xrightarrow[D_j(-1)]{} \begin{array}{c} L_j \\ L_i \end{array}.$$

On obtient donc bien l'égalité souhaitée. □

3.2 Proposition. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a*

$$\det(T_{ij}(\lambda)) = 1, \quad \det(D_i(\lambda)) = \lambda \, (\lambda \neq 0), \quad \det(P_{ij}) = -1.$$

Démonstration. $T_{ij}(\lambda)$ est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1.
$D_i(\lambda)$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont $1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1$.
$\det(P_{ij}) = \det(D_j(-1))\det(T_{ij}(1))\det(T_{ji}(-1))\det(T_{ij}(1)) = (-1).1.1.1 = -1$. □

3.2 Méthode de calcul du déterminant

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Remarquons tout d'abord que :

- Si on multiplie une ligne de A par $\lambda \neq 0$, son déterminant est multplié par λ :

$$\det(D_i(\lambda)A) = \lambda\det(A).$$

- Si on échange deux lignes de A, son déterminant est multiplié par -1 :

$$\det(P_{ij}A) = -\det(A).$$

- Si on remplace la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ de A, son déterminant ne change pas :

$$\det(T_{ij}(\lambda)A) = \det(A).$$

C'est encore vrai si on fait ces mêmes opérations sur les colonnes car $\det(A^T) = \det(A)$.

À l'aide de ces opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes, on rend la matrice A triangulaire en modifiant le déterminant quand l'opération effectuée le nécessite.

Remarquons que :

- $AD_i(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en multipliant la colonne C_i de A par $\lambda \neq 0$.
- AP_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les colonnes C_i et C_j de A, $i \neq j$.
- $AT_{ij}(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne C_i par $C_i + \lambda C_j$ de A, $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$.

Exemple. Supposons que

$$P_{12}T_{23}(4)D_2(-2)AD_2(\frac{1}{3})P_{32}T_{12}(\frac{1}{7}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors $(-1)(-2)\det(A)(\frac{1}{3})(-1) = -2 \iff -\frac{2}{3}\det(A) = -2 \iff \det(A) = 3$.

Exemple. Calcul de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ à l'aide du développement par rapport à la première colonne puis à l'aide d'opérations sur lignes et les colonnes.

4 Variante de la première méthode de calcul

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si on écrit la formule du développement selon la première colonne du déterminant de la transposée A^T de A, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) = \det(A^T) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(A^T)_{j1}\det(\bar{A^T}^{j1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det((\bar{A}^{1j})^T) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\bar{A}^{1j}). \end{aligned}$$

Cette formule est appelée le développement selon la première ligne.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Si on permute les colonnes C_1 et C_j, on obtient à partir du développement selon la première colonne celui selon j-ème colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\bar{A}^{ij}).$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Si on permute les lignes L_1 et L_i, on obtient à partir du développement selon la première ligne celui selon j-ème ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\bar{A}^{ij}).$$

Exemple. Calcul de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ à l'aide du développement par rapport la deuxième colonne puis 'a l'aide de la troisième ligne.

Remarque. Toutes ces méthodes peuvent être utilisées simultanément pour un calcul du déterminant plus efficace ou rapide.

5 Déterminant et matrices inversibles

5.1 Théorème. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a*

$$A \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Si A est inversible, alors $AA^{-1} = I_n$, ce qui implique $\det(AA^{-1}) = 1$, c'est à dire $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Donc $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Supposons $\det(A) \neq 0$ et soit $\tilde{A}$ la forme bien échelonnée de A. Alors $\det(\tilde{A}) \neq 0$. Comme $\tilde{A}$ est triangulaire, les coefficients diagonaux sont alors tous non nuls. Cela signifie que $\tilde{A}$ a un pivot sur chaque ligne, ou autrement dit que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n$. Donc A est inversible. □

Exemple. Est-ce que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ?