Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur : Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

Algèbre linéaire

Chapitre IV : Espaces vectoriels

Table des matières

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

1.1 Espaces vectoriels

Définition. Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un espace vectoriel (en abrégé e.v) sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoirel si

(i) il existe une application $E \times E \to E$ notée $+$ vérifiant

(a) pour tout $u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(b) pour tout $u, v \in E$, $u + v = v + u$;

(c) il existe un unique élément noté 0_E ou 0 de E tel que pour tout $u \in E$, $u + 0_E = u$;

(d) pour tout $u \in E$, il existe $v \in E$ tel que $u + v = 0_E$; un tel élément est unique, est noté $-u$ et est appelé opposé de u ;

(ii) il existe une application $\mathbb{K} \times E \to E$, notée $\cdot$ (que l'on omet s'il n'y a pas d'ambiguité) vérifiant

(a) pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tout $u \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ et $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$;

(b) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$, $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$;

(c) pour tout $u \in E$, $1 \cdot u = u$ et $0 \cdot u = 0_E$ (en particulier $(-1) \cdot u = -u$).

Exemples.

(1) $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (expliquer)

(2) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (expliquer)

(3) $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \cdots \mathbb{K}$ (produit cartésien de n copies de $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (expliquer)

(4) $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (expliquer)

(5) $\mathbb{K}_n[X]$ (ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (expliquer)

(6) $\mathbb{K}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (expliquer)

Vocabulaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Les éléments de E sont appelés des vecteurs.

(ii) Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E. On dit que $w \in E$ est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$w = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n.$$

Notation. On note $(v_1, \ldots, v_n)$ la famille formée des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de E, $\mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \ldots, v_n)$, ou $\mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_n)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille finie $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E.

Remarque.

(i) Les scalaires λ_i ne sont pas nécessairement uniques. Par exemple,

$$(1,2) = 1(1,1) + 0(1,0) + \frac{1}{2}(0,2) = 4(1,1) - 3(1,0) - 1(0,2).$$

(ii) Si $n = 1$, i.e. $w = \lambda_1 v_1$, on dit que v_1 et w sont colinéaires. Par exemple, $(1, 2) = \frac{1}{2}(2, 4)$.

Exemples.

(1) Pour tout $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}$, $w \in \mathbb{K}$, w est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$. En fait, pour tout $v, w \in \mathbb{K}$, v et w sont colinéaires.

(2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est combinaison lináire (sur $\mathbb{R}$) de 1 et i, i.e. $z = a \cdot 1 + b \cdot i$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

(3) Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$, i.e.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, \ldots, 0, 1).$$

(4) Tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des matrices $E_{ij} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, n,$, $j = 1, \ldots, p$, définies par $(E_{ij})_{kl} = 0$ si $i \neq k$ ou $j \neq l$, et $= 1$ si $i = k$ et $j = l$. En effet, on a

$$A = \sum_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,p} a_{ij} E_{ij}.$$

(5) Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ peut s'écrire $P = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \cdots + a_n \cdot X^n$, avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, i.e. P est combinaison linéaire de $1, X, \ldots, X^n \in \mathbb{K}[X]$.

2 Sous-espaces vectoriels, intersection, somme, somme directe, supplémentaires de sous-espaces vectoriels

2.1 Sous-espaces vectoriels

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (en abrégé s.e.v) de E si

(i) Pour tout $u, v \in F$, $u + v \in F$;

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et tout $u \in F$, $\lambda u \in F$.

Remarque. Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

Exemples.

(1) Dans le $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}$, $\{0\}$ et $\mathbb{K}$ sont des s.e.v (expliquer).

(2) Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^2$, $\{(0, 0)\}$, les droites passant par $(0, 0)$ et $\mathbb{R}^2$ sont des s.e.v (expliquer).

(3) Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^3$, $\{(0, 0, 0)\}$, les droites passant par $(0, 0, 0)$, les plans contenant $(0, 0, 0)$ et $\mathbb{R}^3$ sont des s.e.v (expliquer).

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}[X]$. Par contre, l'ensemble des polynômes de degré n n'est pas un s.e.v (expliquer).

(5) Dans le $\mathbb{K}$-e.v $M_n(\mathbb{K})$,

* l'ensemble des matrices symétriques est un s.e.v (expliquer) ;
* l'ensemble des matrices anti-symétriques est un s.e.v (expliquer) ;
* l'ensemble des matrices nilpotentes est un s.e.v (expliquer) ;
* l'ensemble des matrices orthogonales n'est pas un s.e.v (expliquer).

2.1 Propriétés. *Tout s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v est un $\mathbb{K}$-e.v.*

2.2 Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E. Alors $\mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \ldots, v_n)$ est un s.e.v de E.*

Exemples.

(1) Vérifier que $\mathrm{vect}_{\mathbb{R}}((1,-1,0),(1,1,1))$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) Vérifier que $\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}(1-X, 1+X)$ est un s.e.v de $\mathbb{C}[X]$.

2.3 Proposition. *Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et F l'ensemble des solutions dans $\mathbb{K}^n$ de l'equation*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Alors F est un s.e.v de $\mathbb{K}^n$.

Exemples.

(1) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

(2) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Intersection, somme

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, F et G deux s.e.v de E. On définit

(i) $F \cap G = \{u \in E : u \in F \text{ et } u \in G\}$.

(ii) $F + G = \{u + v : u \in F, v \in G\}$.

2.4 Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, F et G deux s.e.v de E. Alors*

(i) $F \cap G$ est un s.e.v de E.

(ii) $F + G$ est un s.e.v de E ; F et G sont des s.e.v de $F + G$.

(iii) Si $F = \mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_n)$ et $G = \mathrm{vect}(w_1, \ldots, w_p)$, alors $F+G = \mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_p)$.

Exemples.

(1) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$. Alors $F \cap G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}\}$ (expliquer).

(2) $F = \mathrm{vect}((1,2,3),(-1,4,1))$, $G = \mathrm{vect}((1,0,1))$. Alors $F+G = \mathrm{vect}((1,2,3),(-1,4,1),(1,0,1))$ (expliquer).

2.3 Somme directe, supplémentaire

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, F et G deux s.e.v de E. On dit que

(i) F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$.
Dans ce cas on note par $F \oplus G$ le s.e.v $F + G$ de E.

(ii) F et G sont supplémentaires (dans E) si $E = F \oplus G$.

Exemples.
Soient $F = \text{vect}((1,0,0))$, $G = \text{vect}((0,1,1))$ et $H = \text{vect}((0,1,0),(0,0,1))$.

(1) F et G sont en somme directe. Par contre G et H ne le sont pas.

(2) F et H sont en somme directe.

(3) F et H sont supplémentaires. Par contre F et G ne le sont pas.

Remarque.
⚠ Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.
Un s.e.v peut avoir plusieurs supplémentaires dans un même e.v.

Exemples. Trouver un autre supplémentaire du s.e.v F de $\mathbb{R}^3$ donné dans l'exemple précédent.

3 Familles libres, liées, génératrices, bases

3.1 Familles libres et liées

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si l'unique solution de l'équation linéaire

$$x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n = 0_E$$

est $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

(ii) $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si $(v_1, \dots, v_n)$ n'est pas libre, i.e.

$$\text{il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ non tous nuls tels que } \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0_E.$$

Remarque. Si au moins l'un des vecteurs de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est nul, alors cette famille est liée (expliquer).

Vocabulaire.

(i) Si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants.

(ii) Si $(v_1, \dots, v_n)$ est liée, on dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement dépendants.

Exemples.

(1) Dans le $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}$, les seules familles libres sont (a) avec $a \in \mathbb{K}^*$ (expliquer).

(2) Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$, $(1, i)$ est une famille libre (expliquer).

(3) La famille $((1,0),(0,1))$ est une famille libre dans le $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^2$ (expliquer). Si une famille dans $\mathbb{K}^2$ contient plus de deux vecteurs, alors cette famille est liée (expliquer).

(4) Plus généralement, pour $n \geqslant 1$, la famille finie $((1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1))$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (expliquer).

(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille libre dans le $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}[X]$ (expliquer).

(6) Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont linéairement indépendantes dans le $\mathbb{R}$-e.v des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (expliquer).

3.1 Proposition. *Supposons $n \geqslant 2$.*

(i) La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

(ii) La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs ne s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

3.2 Proposition.

(i) Toute sous-famille d'une famille libre de E est libre.

(ii) Toute famille de E contenant une sous-famille liée est liée.

Exemples.

(1) $((1,0,0),(0-2,3))$ est libre car contenu dans $((1,0,0),(0,0,4),(0,-2,3))$ qui est aussi libre.

(2) $((1,1),(0,1),(2,2))$ lié car $((1,1),(2,2))$ lié.

3.2 Familles génératrices

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. On dit qu'une famille finie $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E engendre E, ou encore est une famille génératrice de E, si

$$\text{pour tout } v \in E, \text{ il existe } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n.$$

Dans ce cas, on a $E = \mathrm{vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \ldots, v_n)$ ou plus simplement $E = \mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_n)$.

3.3 Propriétés. *Toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice de E est aussi une famille génératrice de E.*

Exemples.

(1) (1) est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}$. En fait tout élément non nul de $\mathbb{K}$ engendre le $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}$ (expliquer).

(2) $(1, i)$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$ (expliquer).

(3) $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^2$ (expliquer). En fait toute famille finie de $\mathbb{K}^2$ contenant au moins deux vecteurs linéairement indépendants est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^2$ (expliquer).

(4) Plus généralement, pour $n \geqslant 1$, la famille finie $((1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1))$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ (expliquer).

(5) $(1,X,X^2,\ldots,X^n)$ est une famille génératrice du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}_n[X]$ (expliquer).

3.3 Bases

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On dit qu'une famille finie $(v_1,\ldots,v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si

(i) $(v_1,\ldots,v_n)$ est une famille génératrice de E, i.e. $E = \operatorname{vect}(v_1,\ldots,v_n)$;

(ii) $(v_1,\ldots,v_n)$ est une famille libre.

Exemples.

3.4 Théorème. *Une famille finie $(v_1,\ldots,v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur v de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1,\ldots,v_n$.*

Exemples.

(1) Base canonique de $\mathbb{K}^n$ (expliquer).

(2) Autre exemple : $\mathbb{K}_n[X]$ et $(1,X,\ldots,X^n)$ (expliquer).

(3) Exemple d'e.v qui n'a pas de base (finie) : $\mathbb{K}[X]$ (expliquer).

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et supposons qu'il existe $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ une base de E.

(i) On appelle coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathcal{B}$ de E les uniques coefficients $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{K}$ de la combinaison linéaire

$$u = x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n.$$

(ii) L'écriture en ligne (resp. en colonne) de x dans la base $\mathcal{B}$ de E est le vecteur ligne (resp. colonne)

$$x_{\mathcal{B}} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ (resp. } x^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})).$$

Exemples.

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, coordonnées de $(1,1)$, $(1,2)$, $\{(2,2)$, $(0,3)$ et $(-1-4)$.

(2) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = ((1,1),(0,1))$, coordonnées de $(1,1)$, $(1,2)$, $\{(2,2)$, $(0,3)$ et $(-1-4)$.

(3) $E = \mathbb{K}_3[X]$, $\mathcal{B} = (1,X,X^2,X^3)$, coordonnées de $1 + X + X^2$ et $X - X^3$.

3.4 Matrices associées à une famille finie de vecteurs

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et supposons qu'il existe $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice associée $\mathcal{F}$ relativement à la base $\mathcal{B}$ de E la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{B}} & \ldots & v_p^{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Exemples.

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = ((1,1),(1,2))$, $((2,2),(0,3),(-1-4))$...

(2) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = ((1,1),(0,1))$, $\mathcal{F} = ((1,1),(1,2))$, $((2,2),(0,3),(-1-4))$....

(3) $E = \mathbb{K}_3[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, $\mathcal{F} = (1 + X + X^2, X - X^3)$.

3.5 Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux familles libres de vecteurs de E telles que* $\mathrm{vect}\mathcal{B} = \mathrm{vect}\mathcal{B}'$. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}.$$

Exemples. Utiliser les exemples (1) et (2) précédents.

On va maintenant considérer dans le reste de ce paragraphe le cas particulier $E = \mathbb{K}^n$, où $n \geqslant 1$. On rappelle que dans ce cas, on a une base $\mathcal{B}$ de E appelée base canonique, dont les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1).$$

3.6 Proposition. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On a*

(i) $\mathcal{F}$ libre si et seulement si l'équation matricielle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}} \cdot X = 0_{n1}$ *a comme unique solution 0_{p1} dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.*

(ii) $\mathcal{F}$ engendre F si et seulement si, pour tout $v \in F$, l'équation matricielle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}} \cdot X = v^{\mathcal{B}}$ *a au moins une solution.*

Exemples.

(1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$, $\mathcal{F} = ((1,1),(1,2))$.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$, $\mathcal{F} = ((2,2),(0,3),(-1-4))$, $v = (-1-2)$.

3.7 Proposition. *Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Notons P la matrice, produit de matrices élémentaires telle que $M = P \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$ soit la forme bien échelonnée de* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$. *Alors*

(i) $\mathcal{F}$ libre si et seulement si M a un pivot dans chaque colonne.
Dans ce cas, $\#\mathcal{F} \leqslant \#\mathcal{B}$.

(ii) $\mathcal{F}$ engendre K^n si et seulement si M a un pivot dans chaque ligne.
Dans ce cas, $\#\mathcal{F} \geqslant \#\mathcal{B}$.

Exemples. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$.

(1) $\mathcal{F} = ((-1,1,0),(2,1,-1))$.

(2) $\mathcal{F} = ((1,1,0),(-1,1,1),(2,0-3),(1,1,1))$.

3.8 Corollaire. *Soit $\mathcal{B}'$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On a*

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{B}' \textit{ base de } \mathbb{K}^n \\ \iff & \#\mathcal{B}' = \#\mathcal{B} = n \textit{ et } \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) = n. \end{array}$$

Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ *est inversible et sa matrice inverse est* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$*.*

Exemples. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$ et on consière $\mathcal{B}' = ((-1,1,0),(2,1,-1),(1,0,1))$.

3.5 Dimension

Revenons au cas général.

3.9 Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et supposons qu'il existe une famille finie $\mathcal{B} = (u_1,\ldots,u_n)$ base de E. Alors*

(i) pour tout $v,w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(v+w)_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}} + w_{\mathcal{B}}$ et $(\lambda \cdot v)_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot v_{\mathcal{B}}$.

(ii) Soit $\mathcal{F} = (v_1,\ldots,v_p)$ une famille de vecteurs de E.

(a) $\mathcal{F}$ libre si et seulement si $(v_{1\mathcal{B}},\ldots,v_{p\mathcal{B}})$ libre dans $\mathbb{K}^n$.

(b) $\mathcal{F}$ engendre E si et seulement si $(v_{1\mathcal{B}},\ldots,v_{p\mathcal{B}})$ engendre $\mathbb{K}^n$.

Exemples. Prenons $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = (1,X,X^2,X^3)$.

(1) Soient $P = 2-3X-X^2+5X^3$, $Q = -1-2X^2$, $\lambda = -3$. Déterminer $P_{\mathcal{B}}$, $Q_{\mathcal{B}}$, $(P+Q)_{\mathcal{B}}$, $(\lambda P)_{\mathcal{B}}$.

(2) Soit $\mathcal{F} = (2+X, 1+X, X+X^2, X+X^2-X^3)$. À l'aide de la proposition précédente, montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3.10 Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et supposons qu'il existe deux familles finies $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E. Alors $\#\mathcal{B} = \#\mathcal{B}'$.*

Ce nombre est appelé la dimension de l'e.v E que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ *ou* $\dim(E)$ *s'il n'y a pas d'ambiguité.*

Vocabulaire. Si E est comme ci-dessus, on dit que E est de dimension finie. Sinon on dit que E est de dimension infinie.

Convention. On pose $\dim\{0_E\} = 0$.

Exemples. Dimension

(1) du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}$.

(2) du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$.

(3) du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$.

(4) du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}_n[X]$.

(5) du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}[X]$.

(6) du $\mathbb{R}$-e.v des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.11 Théorème (base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.*

(i) Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E contenant $\mathcal{F}$, i.e. on complète $\mathcal{F}$.

(ii) Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E contenue dans $\mathcal{F}$, i.e. on extrait une base à partir de $\mathcal{F}$.

Exemples. On considère le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^4$.

(1) Soit $\mathcal{F} = ((1,0,1,0),(0,1,0,1))$. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre. Compléter $\mathcal{F}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

(2) Soit $\mathcal{F} = ((1,1,1,1),(1,0,1,1),(-1,1,1,1),(-1,0,0,2),(0,0,0,1))$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. En extraire une base de $\mathbb{R}^4$.

3.12 Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finei et F un s.e.v de E. Alors*

$$\dim(F) \leqslant \dim(E),$$

avec égalité si et seulement si $F = E$.

Exemples. (1) Dans le $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}$, les seuls s.e.v sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$ (expliquer).

(2) Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^2$, les seuls s.e.v sont $\{(0,0)\}$, les droites passant par $(0,0)$ et $\mathbb{R}^2$ (expliquer).

(3) Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^3$, les seuls s.e.v sont $\{(0,0,0)\}$, les droites passant par $(0,0,0)$, les plans contenant $(0,0,0)$ et $\mathbb{R}^3$ (expliquer).

3.13 Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, F et G deux s.e.v de E. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, si F et G sont en somme directe, on a

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Exemples. Soient $F = \text{vect}((1,0,0))$, $G = \text{vect}\{(0,1,1)\}$ et $H = \text{vect}((0,1,0),(0,0,1))$. Vérifier à l'aide des dimensions que :

(1) F et G sont en somme directe. Par contre G et H ne le sont pas.

(2) F et H sont en somme directe.

(3) F et H sont supplémentaires. Par contre F et G ne le sont pas.

3.14 Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et F un s.e.v de E. Alors il existe un s.e.v G de E tel que F et G sont supplémentaires.*

4 Méthodes pratiques pour

4.1 trouver une base d'un s.e.v donné par une famille génératrice

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, F un s.e.v de E et $\mathcal{F}$ une famille (finie) génératrice de F.

Pour déterminer une base de F à partir de $\mathcal{F}$,

(1) on échelonne en COLONNE la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$;

(2) les vecteurs colonnes non nuls de la matrice échelonnée obtenue donnent les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs d'une base de F.

Exemples. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère le s.e.v F de $\mathbb{R}^3$ engendré par $((1,1,1),(2,2,2),(3,3,4),(0,0,5))$. Trouver une base de F.

4.2 trouver une base d'un s.e.v donné par un système linéaire homogène

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, F un s.e.v de E et $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice telle que

$$F = \{v \in E : A \cdot v^{\mathcal{B}} = 0_{p1}\}.$$

Pour déterminer une base de F,

(1) on échelonne en LIGNE le système linéaire homogène $(A|0_{p1})$ (i.e. on résoud le système) ;

(2) notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de ce système ; on a alors

$$F = \{v \in E : v^{\mathcal{B}} \in \mathcal{S}\}.$$

Exemples.

(1) Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{lcl} x+y-z & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{array} \right. \}.$$

(2) Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Détemriner une base de

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

4.3 déterminer un système linéaire homogène à partir d'une famille génératrice

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, F un s.e.v de E et $\mathcal{F}$ une famille (finie) génératrice de F.

Pour déterminer un système linéaire homogène satisfait par les vecteurs de F,

(1) on échelonne en LIGNE le système linéaire

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}} & \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \end{array}\right);$$

(2) les éventuelles lignes de zéros à gauche de | donnent des équations linéaires homogènes en les x_i.

Exemples. Soient $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et F le s.e.v de $\mathbb{R}^4$ engendré par $((1,1,1,0),(1,0,1,0))$. Déterminer un système linéaire homogène dont F est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^4$.

4.4 déterminer une base

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, F et G deux s.e.v de E.

4.4.1 d'une intersection

Pour déterminer une base de l'intersection $F \cap G$,

(1) on dtermine un système linéaire homog ne satisfait par chacun des s.e.v ;

(2) on détermine une base de $F \cap G$ en résolvant (voir section 4.2) le système linéaire homogène obtenu en concaténant les deux systèmes linéaires homogènes obtenus dans (1).

Exemples. Soient $E = \mathbb{R}^4$, F et G les s.e.v de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+t=0\} \\ G &= \mathrm{vect}((1,-1,0,0),(1,0,0,1),(0,-1,-1,0)). \end{aligned}$$

Déterminer une base de $F \cap G$. Est-ce que F et G sont en somme directe ?

4.4.2 d'une somme

Pour déterminer une base de $F + G$,

(1) on détermine une base de chacun des s.e.v ;

(2) la famille de vecteurs de E obtenue en prenant la réunion de cette base de F et celle de G est une famille génératrice de $F + G$;

(3) on détermine une base de $F + G$ à partir de cette famille génératrice de $F + G$ à l'aide de la méthode décrite dans la section 4.1.

Exemples. On reprend l'exemple précédent on détermine une base de $F + G$. Est-ce que $F + G = \mathbb{R}^4$? Est-ce que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

5 Changement de bases

5.1 Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \in GL_n(\mathbb{K})$ *et*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Vocabulaire. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ s'appelle la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ de E. En effet :

Exemples. Soient $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = ((1,0,1,1),(0,1,1,1),(0,-1,0,1),(1,1,1,1))$ une autre base de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. En déduire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

5.2 Propriétés. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a, pour tout $v \in E$,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot v^{\mathcal{B}} = v^{\mathcal{B}'}.$$

Exemples. Soit $v = (-3,1,10,2)$. Donner les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$ ci-dessus.