

Représentations des groupes compacts

25 septembre 2019

Vous avez déjà vu en M1 la théorie des représentations des groupes finis. Dans ce chapitre, nous allons généraliser aux groupes compacts certains des résultats obtenus pour les groupes finis. Il nous faut commencer par définir les groupes topologiques, et une bonne notion de représentation pour de tels groupes.

Table des matières

1	Groupes topologiques et représentations	2
1.1	Généralités	2
1.2	Somme (directe)	5
1.3	Produit tensoriel	6
1.4	Représentation contragrédiente	7
2	Mesure de Haar	8
3	Représentations des groupes compacts	16
3.1	Premiers résultats	16
3.2	Lemme de Schur	18
3.3	Coefficients matriciels et relations de Schur	19
3.4	Transformation de Fourier pour les groupes compacts	22
3.5	Théorie des caractères pour les groupes compacts	29

1 Groupes topologiques et représentations

1.1 Généralités

Un **groupe topologique** G est à la fois un groupe et un espace topologique séparé, où l'on exige que ces deux structures soient compatibles, c'est à dire que les applications

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh$$

et

$$\iota : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

soient continues.

Une **représentation** d'un groupe topologique G dans un espace vectoriel topologique V est la donnée d'un morphisme

$$\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

tel que l'application

$$G \times V \rightarrow V, \quad (g, v) \mapsto \pi(g)v$$

soit continue. On note alors par le couple (π, V) cette représentation de G .

Si V est un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant, i.e., tel que

$$\langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad g \in G, v, w \in V,$$

on dit que la représentation (π, V) est **unitaire**.

Lorsque l'espace de représentation V est de dimension finie, on le suppose toujours muni de la topologie transcendante.

Exemples 1.1. – $G = \text{SO}(n)$, $V =$ polynômes à n variables à coefficients complexes homogènes de degré N et

$$(\pi(g)P)(x) = P(g^{-1}x).$$

Munissons V du produit hermitien

$$(P, Q) = \int_{S^{n-1}} P(x) \overline{Q(x)} dx.$$

Alors (π, V) est une représentation unitaire.

– $G = SL(2, \mathbb{R})$, $V = L^2(\mathbb{R}^2)$ et

$$(\pi(g)f)(x) := f(g^{-1}x).$$

Avec le produit hermitien usuel sur V , (π, V) est une représentation unitaire.

Une **sous-représentation** de (π, V) est un sous-espace fermé W de V invariant (ou stable) sous l'action de G , i.e., tel que

$$\pi(g)w \in W, \quad g \in G, w \in W.$$

Une représentation (π, V) est dite **irréductible** si elle n'admet aucune autre sous-représentation qu'elle-même et $\{0\}$.

Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations d'un groupe topologique G . Un **opérateur d'entrelacement** entre ces représentations est une application linéaire continue $T : V_1 \rightarrow V_2$ telle que

$$T(\pi_1(g)v_1) = \pi_2(g)T(v_1), \quad g \in G, v_1 \in V_1.$$

On note $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ ou $\text{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ l'ensemble des opérateurs d'entrelacement entre (π_1, V_1) et (π_2, V_2) .

On dit alors que deux représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont **isomorphes** ou **équivalentes** s'il existe $T \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$ bijectif entre ces deux représentations tel que $T^{-1} \in \text{Hom}_G(V_2, V_1)$.

Si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont unitaires, on dit qu'elles sont **unitairement équivalentes** si elles sont équivalentes via un opérateur d'entrelacement unitaire.

Lemme 1.1. (i) Soient (π, V) et (τ, W) deux représentations d'un groupe topologique G et $T : V \rightarrow W$ un opérateur d'entrelacement. Alors son noyau $\ker T$ est un sous-espace fermé de V invariant par π et son image $\text{im } T$ est un sous-espace de W invariant par τ .

(ii) Soit (π, V) une représentation d'un groupe topologique G et T un opérateur d'entrelacement de (π, V) avec elle-même. Alors tout sous-espace propre de T est fermé et invariant par π .

Démonstration. (i) Si $v \in \ker T$, alors, pour tout $g \in G$,

$$T(\pi(g)v) = \tau(g)T(v) = 0,$$

donc $\pi(g)v \in \ker T$. Si $w \in \operatorname{im} T$, il existe $v \in V$ tel que $T(v) = w$ et, pour tout $g \in G$,

$$\tau(g)w = \tau(g)T(v) = T(\pi(g)v),$$

donc $\tau(g)w \in \operatorname{im} T$.

(ii) Soit λ une valeur propre de T et V_λ le sous-espace propre correspondant. Alors, pour tout $g \in G$, pour tout $v \in V_\lambda$,

$$T(\rho(g)v) = \rho(g)T(v) = \lambda\rho(g)v,$$

et donc $\rho(g)v \in V_\lambda$.

Le fait que tous ces sous-espaces soient fermés découlent des hypothèses sur T . \square

Théorème 1.2. *Soit (π, V) une représentation unitaire d'un groupe topologique G dans un espace de Hilbert V . Soit W un sous-espace invariant fermé de V . Alors l'orthogonal W^\perp de W dans V est stable sous l'action de G et la représentation (π, V) se décompose en somme directe de sous-représentations*

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Démonstration. Remarquons qu'étant donné que W est fermé, il en est de même pour W^\perp . Comme la représentation est unitaire et $V = W \oplus W^\perp$ en tant qu'espaces vectoriels, W^\perp est stable sous l'action de G . Ceci fournit une décomposition

$$V = W \oplus W^\perp$$

en somme directe de sous-espaces invariants. \square

Proposition 1.3 (Lemme de Schur). *Une représentation unitaire (π, V) d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert V est irréductible si et seulement si $\operatorname{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}\operatorname{Id}_V$.*

Démonstration. Si V est réductible et W est sous-espace fermé non trivial de V invariant par π , alors, d'après le théorème précédent, la projection orthogonale sur W est un opérateur d'entrelacement qui n'est pas multiple scalaire de l'identité.

Réciproquement, soit T un opérateur d'entrelacement pour (π, V) qui n'est pas multiple de l'identité. Comme π est unitaire, \overline{T} est aussi un

opérateur d'entrelacement pour π . Il en va de même pour $A = \frac{1}{2}(T + \bar{T})$ et $B = \frac{1}{2i}(T - \bar{T})$. Comme $T = A + iB$, A ou B n'est pas multiple scalaire de l'identité de V . Prenons A par exemple. Le **théorème spectral**, appliqué à A , donne alors au moins une projection orthogonale P , non multiple scalaire de l'identité, qui s'écrit comme un polynôme en A , et donc en particulier est un opérateur d'entrelacement. Dans ce cas, (π, V) est réductible. \square

Il n'est pas vraiment possible d'en dire plus à ce niveau de généralité. En particulier, il n'est pas vrai :

- qu'une représentation irréductible soit toujours de dimension finie.
- qu'une représentation (même de dimension finie) soit toujours unitaire.
- qu'une représentation de dimension finie soit toujours complètement réductible.

1.2 Somme (directe)

Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations des groupes topologiques G_1 et G_2 respectivement. L'espace vectoriel $V_1 \times V_2$ muni des deux projecteurs canoniques (continus)

$$p_1 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1, \quad p_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$$

est le **produit** des espaces vectoriels V_1 et V_2 . La notion de somme directe est légèrement différente. La **somme directe** de V_1 et V_2 est aussi le produit $V_1 \times V_2$ mais muni des deux injections canoniques (continues)

$$i_1 : V_1 \rightarrow V_1 \times V_2, \quad i_2 : V_2 \rightarrow V_1 \times V_2.$$

On peut ainsi identifier V_1 et V_2 à des sous-espaces fermés de $V_1 \times V_2$, noter $V_1 \oplus V_2$ plutôt que $V_1 \times V_2$ et écrire $v_1 + v_2$ l'élément (v_1, v_2) de $V_1 \times V_2$.

On munit maintenant $V_1 \oplus V_2$ de la représentation $\pi_1 \oplus \pi_2$ de $G_1 \times G_2$ définie par :

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(g_1, g_2)(v_1 + v_2) := \pi_1(g_1)v_1 + \pi_2(g_2)v_2, \quad g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Quand $G_1 = G_2 = G$, on peut restreindre cette représentation à la diagonale G dans $G \times G$, et obtenir la **somme directe (usuelle)** de π_1 et π_2 :

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(g)(v_1 + v_2) := \pi_1(g)v_1 + \pi_2(g)v_2, \quad g \in G, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

On peut généraliser cette construction à un nombre fini de représentations (π_i, V_i) de G . Nous verrons peut-être plus tard comment la généraliser à un nombre infini de représentations.

La terminologie et la notation “additive” se justifient par le fait que $(\pi_1 \oplus \pi_2, V_1 \oplus V_2)$ est toujours isomorphe à $(\pi_2 \oplus \pi_1, V_2 \oplus V_1)$ et que

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2,$$

lorsque V_1 et V_2 sont de dimension finie. La représentation de G dans l’espace nul $\{0\}$ est un “élément neutre” pour cette somme. Mais remarquons qu’une représentation (π, V) non nulle n’admet pas “d’inverse”.

1.3 Produit tensoriel

Nous voudrions maintenant construire une opération analogue à un produit :

$$((\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)) \mapsto (\pi_1 \otimes \pi_2, V_1 \otimes V_2),$$

ayant de bonnes propriétés de distributivité par rapport à la somme définie précédemment, et vérifiant

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \cdot \dim V_2, \tag{1.1}$$

lorsque V_1 et V_2 sont de dimension finie.

Définition 1.1. Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels. Le **produit tensoriel** $V_1 \otimes V_2$ est un espace vectoriel muni d’une application

$$\iota : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$$

vérifiant :

- (i) ι est bilinéaire,
- (ii) si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de V_1 et si $(f_j)_{j \in J}$ est une base de V_2 , alors

$$(e_i \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}$$

est une base de $V_1 \otimes V_2$.

Remarque. Un tel espace existe et est déterminé à isomorphisme linéaire près. La propriété (ii) entraîne la formule (1.1). L'espace $V_1 \otimes V_2$ vérifie la propriété universelle suivante :

(ii') soit $\phi : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ une application bilinéaire quelconque. Alors il existe une unique application linéaire

$$\tilde{\phi} : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W$$

telle que $\tilde{\phi} \circ \iota = \phi$.

La propriété (ii') est équivalente à (ii).

Soient (π_1, V_1) une représentation d'un groupe topologique G_1 et (π_2, V_2) une représentation d'un groupe topologique G_2 . Supposons que l'un des V_i est de dimension finie pour éviter des complications topologiques (en général, il faudra prendre une certaine complétion).

On peut munir l'espace $V_1 \otimes V_2$ d'une représentation notée $\pi_1 \boxtimes \pi_2$ de $G_1 \times G_2$ définie par

$$(\pi_1 \boxtimes \pi_2)(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = \pi_1(g_1)v_1 \otimes \pi_2(g_2)v_2, \quad g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Lorsque $G_1 = G_2 = G$, on obtient une représentation de dimension finie de G , notée $\pi_1 \otimes \pi_2$ définie par

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = \pi_1(g)v_1 \otimes \pi_2(g)v_2, \quad g \in G, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Remarquons que si π_1 et π_2 sont unitaires, il en va de même pour $\pi \otimes \pi_2$.

1.4 Représentation contragrédiente

Pour un espace vectoriel V , notons V^* son dual algébrique, i.e., l'espace des formes linéaires sur V , et V' son dual topologique, i.e., l'espace des formes linéaires continues sur V . On sait que

$$\mathbf{ev} : V \rightarrow (V')', \quad v \mapsto [\mathbf{ev}(v) : \lambda \in V' \mapsto \lambda(v)]$$

est une application linéaire injective. Si V est de dimension finie, $V' = V^*$ et, par égalité des dimensions, cette application linéaire est un isomorphisme.

Si (π, V) est une représentation d'un groupe topologique G , on définit une représentation π' de G dans V' , appelée **représentation contragrédiente** de π , par la formule suivante :

$$(\pi'(g)\lambda)(v) = \lambda(\pi(g)^{-1}v), \quad g \in G, \lambda \in V', v \in V,$$

ou encore

$$\pi(g)\lambda := {}^t(\pi(g)^{-1})\lambda, \quad g \in G, \lambda \in V'.$$

Remarquons que, lorsque V est de dimension finie et que $(V')'$ est identifié à V par la remarque ci-dessus, on a $((\pi')', (V')') = (\pi, V)$.

2 Mesure de Haar

Un espace topologique est dit **localement compact** si tout point admet une base de voisinages compacts. Un groupe topologique est dit localement compact (resp. compact) s'il est localement compact (resp. compact) en tant qu'espace topologique.

Nous allons maintenant présenter quelques exemples de groupes localement compacts.. Tous ces groupes seront des sous-ensembles de \mathbb{R}^N pour un $N \in \mathbb{N}$ avec la topologie induite par la métrique usuelle, à savoir si $x = (x_1, \dots, x_N)$ et $y = (y_1, \dots, y_N)$, alors la distance $d(x, y)$ est

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}$$

et G sera muni de la topologie comme sous-espace de \mathbb{R}^N . Noter qu'avec cette topologie, un sous-ensemble X de \mathbb{R}^N est compact si et seulement si X est un fermé borné par le théorème de Heine–Borel. De plus, tous les espaces et groupes topologiques sont Hausdorff.

Exemple 2.1. Le **groupe additif** $(\mathbb{R}^n, +)$ des nombres réels est un groupe topologique localement compact. Il n'est pas compact parce que \mathbb{R}^n n'est pas borné.

Exemple 2.2. Le **groupe général linéaire** $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles avec le produit matriciel est un groupe topologique localement

compact. Ici $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de \mathbb{R}^{n^2} parce que la fonction $M \mapsto \det M$ est continue et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de d'un ouvert de \mathbb{R} . La topologie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est alors celle de sous-espace de \mathbb{R}^{n^2} . En effet, le produit matriciel est donné par des fonctions polynômiales et prendre l'inverse est donné par des fonctions rationnelles en utilisant la comatrice, et dans ces deux cas, ces fonctions sont continues. Ceci montre que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique. Il est évident que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est localement compact. Cependant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact. En effet,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}^*$$

montre que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné.

Exemple 2.3. Le **groupe spécial unitaire** $\mathrm{SU}(n) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid {}^t \overline{M}M = I_n \text{ et } \det M = 1\}$ avec le produit matriciel est un groupe topologique. De plus ce groupe est compact. En effet, si nous traduisons les conditions ${}^t \overline{M}M = I_n$ et $\det M = 1$ en terme d'équations sur les coefficients de la matrice M , nous obtenons que $\mathrm{SU}(n)$ est un sous-ensemble borné fermé de $\mathbb{R}^{(2n)^2}$. Si nous oublions la condition sur le déterminant, nous obtenons aussi un groupe topologique compact, le **groupe unitaire** $\mathrm{U}(n)$.

Exemple 2.4. Le **groupe spécial orthogonal** $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid {}^t M M = I_n \text{ et } \det M = 1\}$ avec le produit matriciel est un groupe topologique. De plus ce groupe est compact. En effet, si nous traduisons les conditions ${}^t M M = I_n$ et $\det M = 1$ en terme d'équations sur les coefficients de la matrice M , nous obtenons que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble borné fermé de \mathbb{R}^{n^2} . Si nous oublions la condition sur le déterminant, nous obtenons aussi un groupe topologique compact, le **groupe orthogonal** $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2.5. Soit G un groupe fini. Alors G est un groupe topologique compact muni de la topologie discrète.

Dans la théorie des représentations des groupes finis, on fait usage de la mesure de comptage normalisée, et de ses propriétés d'invariance à gauche et à droite. Rappelons cela brièvement.

Soit G un groupe fini. On peut le munir de sa **mesure de comptage normalisée** μ_G . Plus explicitement, pour toute fonction f sur G ,

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

La propriété fondamentale de cette mesure est que quels que soient $x, y \in G$,

$$\int_G (l(x)r(y)f)(g) d\mu_G(g) = \int_G f(g) d\mu_G(g),$$

i.e., la mesure μ_G est invariante par translation à gauche et à droite.

Définissons l'analogie pour un groupe topologique localement compact quelconque.

Rappelons qu'une **mesure de Radon** λ sur un espace topologique localement compact X est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, positive (i.e., si $f \geq 0$, $\lambda(f) \geq 0$). Un théorème d'analyse nous dit qu'une telle forme linéaire est donnée par intégration par rapport à une mesure borélienne μ :

$$\lambda(f) = \int_X f d\mu$$

possédant certaines propriétés (localement finie et régulière intérieurement).

Définition 2.1. Soit G un groupe topologique localement compact. Une mesure de Radon μ_G sur G est dite **mesure de Haar** à gauche (resp. à droite) sur G , si pour toute fonction intégrable f de G à valeurs dans \mathbb{C} , et pour tout $t \in G$,

$$\int_G L(t)f(g) d\mu_G(g) = \int_G f(g) d\mu_G(g)$$

(resp.

$$\int_G R(t)f(g) d\mu_G(g) = \int_G f(g) d\mu_G(g)).$$

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit G un groupe localement compact. Alors il existe une mesure de Haar à gauche μ_G sur G . Une telle mesure est unique à un facteur scalaire réel strictement positif près.*

On peut lire la démonstration dans Bourbaki, Intégration, chapitre VII. Dans le cas des groupes compacts, on peut trouver dans [1, p. 7] une démonstration de ce résultat basée sur le théorème d'Ascoli et le théorème du point fixe de Kakutani.

Exemple 2.6. Pour le groupe additif $(\mathbb{R}^n, +)$, la mesure de Lebesgue est la mesure de Haar. On a

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Cette intégrale existe pour toute fonction f mesurable. Il est facile de vérifier que μ est une mesure de Radon non nulle. L'invariance à gauche s'obtient en considérant le Jacobien du changement de coordonnées.

Exemple 2.7. Pour le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{R})$, la mesure de Haar est de la forme

$$d\mu(X) = \frac{1}{|\det X|^n} dX, \quad \text{où } X = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \text{ et } dX = \prod_{i,j=1}^n dx_{ij}.$$

Ici $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^{n^2} et dX est la restriction à $GL_n(\mathbb{R})$ de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^{n^2} . Il est clair que μ est une mesure de Radon non nulle. Il suffit de vérifier que μ est invariant à gauche. Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{GL_n(\mathbb{R})} f(M^{-1}X) d\mu(X) &= \int_{GL_n(\mathbb{R})} f(M^{-1}X) \frac{1}{|\det X|^n} dX \\ &= \int_{GL_n(\mathbb{R})} f(Y) \frac{|\det M|^n}{|\det MY|^n} dY, \end{aligned}$$

en considérant les nouvelles coordonnées

$$Y = (y_{ij})_{i,j} = M^{-1}X \quad \text{et} \quad dY = \prod_{i,j=1}^n dy_{ij}.$$

Alors la matrice jacobienne de ce changement de coordonnées est

$$\begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{pmatrix}$$

et nous obtenons bien l'égalité ci-dessus entre intégrales. Après simplification, cette égalité devient

$$\int_{\text{GL}_n(\mathbb{R})} f(M^{-1}X) \frac{1}{|\det X|^n} dX = \int_{\text{GL}_n(\mathbb{R})} f(Y) \frac{1}{|\det Y|^n} dY .$$

Exemple 2.8. Pour le groupe spécial orthogonal $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, nous pouvons premièrement noter que la fonction continue

$$g : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R}), \quad (\theta, \phi, \theta') \mapsto R(\theta)\tilde{R}(\phi)R(\theta'),$$

avec

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{R}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix},$$

est surjective et est un homéomorphisme sur $]0, 2\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ (remarquons que $R(\theta)$ et $\tilde{R}(\phi)$ sont des matrices de rotation ayant respectivement pour axes l'axe des z et l'axe des x).

En effet, considérons une matrice $A = (a_{ij}) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. Comme vecteur (colonne) de \mathbb{R}^3 , nous pouvons, pour décrire la dernière colonne de A , des coordonnées similaires aux coordonnées sphériques, i.e.,

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\phi) \\ -\cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

De même, comme vecteur (ligne) de \mathbb{R}^3 , nous pouvons utiliser des coordonnées similaires aux coordonnées sphériques pour décrire la dernière ligne de A , i.e.,

$$(a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}) = (\sin(\theta') \sin(\phi') \quad \cos(\theta') \sin(\phi') \quad \cos(\phi'))$$

avec $0 \leq \phi' \leq \pi$, $0 \leq \theta' \leq 2\pi$. Nous pouvons noter premièrement que $\phi' = \phi$ car si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 (où les vecteurs sont écrits en colonne), alors

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \langle {}^t(0, 0, 1), A {}^t(0, 0, 1) \rangle = \langle A^{-1} {}^t(0, 0, 1), {}^t(0, 0, 1) \rangle \\ &= \langle {}^tA {}^t(0, 0, 1), {}^t(0, 0, 1) \rangle = \langle {}^t((0, 0, 1)A), {}^t(0, 0, 1) \rangle = \cos(\phi'), \end{aligned}$$

et comme $0 \leq \phi, \phi' \leq \pi$, nous avons bien $\phi = \phi'$.

De plus, si nous considérons le produit $R(-\theta)AR(-\theta')$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, si $0 < \phi < \pi$, alors $\sin(\phi) \neq 0$. De ceci et du fait que $R(-\theta)AR(-\theta')$ soit orthogonal, nous obtenons facilement que $b_{12} = 0$, $b_{11} = \pm 1$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = \cos(\phi)$ et de cette dernière équation et parce que $\det R(-\theta)AR(-\theta') = 1$, nous obtenons que $b_{11} = 1$. En d'autres mots, si $0 < \phi < \pi$, alors $A = g(\theta, \phi, \theta')$ avec θ, ϕ, θ' comme ci-dessus.

Par contre si $\phi = 0, \pi$, alors $\sin(\phi) = 0$. La matrice

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}).$$

Plus précisément, si $\phi = 0$ (resp. $\phi = \pi$), alors

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}) \quad (\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})).$$

Donc, si $\phi = 0$, alors

$$R(-\theta)AR(-\theta') = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & 1 \end{pmatrix} = R(\theta'') \text{ pour un certain } \theta'',$$

et si $\phi = \pi$, alors

$$R(-\theta)AR(-\theta') = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = R(\theta'')\hat{R}(\pi)$$

pour un certain θ'' . De tout ceci, nous pouvons conclure que la fonction g est surjective et est un homéomorphisme sur $]0, 2\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$.

Nous avons ainsi une paramétrisation de $SO_3(\mathbb{R})$. En terme de cette dernière, la mesure de Haar est donnée par $d\mu(g) = \sin(\phi) d\theta d\phi d\theta'$, i.e.,

$$\mu(f) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g(\theta, \phi, \theta')) \sin(\phi) d\theta d\theta' d\phi.$$

Il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'agit bien d'une mesure de Radon non nulle. Il reste à vérifier l'invariance à gauche. Fixons $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \phi_0 \leq \pi$ et $0 \leq \theta'_0 \leq 2\pi$. Il nous vérifier que

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g(\theta_0, \phi_0, \theta'_0)^{-1}g(\theta, \phi, \theta')) \sin(\phi) d\theta d\theta' d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g(\theta, \phi, \theta')) \sin(\phi) d\theta d\theta' d\phi. \end{aligned}$$

Pour montrer ceci, il nous faut considérer les nouvelles coordonnées $\theta_1, \phi_1, \theta'_1$ définies par

$$g(\theta_0, \phi_0, \theta'_0)^{-1}g(\theta, \phi, \theta') = g(\theta_1, \phi_1, \theta'_1),$$

où $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \phi_1 \leq \pi$ et $0 \leq \theta'_1 \leq 2\pi$, et calculer le jacobien

$$\frac{\partial(\theta_1, \phi_1, \theta'_1)}{\partial(\theta, \phi, \theta')}.$$

Remarque. Dans l'énoncé du théorème précédent, on peut remplacer “mesure de Haar à gauche” par “mesure de Haar à droite”, mais les deux notions sont distinctes, une mesure de Haar à gauche n'étant pas nécessairement une mesure de Haar à droite.

Cette remarque nous permet de définir la notion de **fonction modulaire** sur un groupe topologique G admettant une mesure de Haar. En effet, si μ_G est une mesure de Haar à gauche sur G , et si $h \in G$, on peut définir la mesure $R(h) \cdot \mu_G$ par

$$\int_G f(g) d(R(h) \cdot \mu_G)(g) := \int_G (R(h)^{-1}f)(g) d\mu_G(g),$$

pour toute fonction intégrable f sur G . Alors $R(h)\mu_G$ est encore une mesure de Haar à gauche sur G . En effet, pour tout $t \in G$,

$$\begin{aligned} & \int_G (L(t)f)(g) d(R(h)\mu_G)(g) = \int_G (R(h)^{-1}(L(t)f))(g) d\mu_G(g) \\ &= \int_G (L(t)(R(h)^{-1}f))(g) d\mu_G(g) = \int_G (R(h)^{-1}f)(g) d\mu_G(g) \\ &= \int_G f(g) d(R(h)\mu_G)(g). \end{aligned}$$

Le point crucial de ce calcul est que les actions L et R . Il découle de ceci par unicité de la mesure de Haar, à un facteur scalaire réel strictement positif près, que :

$$R(h)\mu_G = \Delta(h)\mu_G$$

pour un certain $\Delta(h) \in \mathbb{R}_{>0}$. Ceci définit la fonction modulaire Δ sur G . Un calcul simple montre que

$$\Delta(h_1 h_2) = \Delta(h_1)\Delta(h_2), \quad h_1, h_2 \in G.$$

La fonction modulaire Δ est donc un caractère de G dans \mathbb{R}_+^* . Il est assez facile de montrer que ce caractère est continu, en prenant pour fonction f dans l'identité ci-dessus la fonction caractéristique d'un voisinage compact de l'origine e de G , et en utilisant les propriétés de régularité de la mesure μ_G . On a, pour toute fonction intégrable f sur G , et tout $h \in G$,

$$\int_G f(gh) d\mu_G(g) = \Delta(h) \int_G f(g) d\mu_G(g). \quad (2.1)$$

Théorème 2.2. *Soit G un groupe compact. Toute mesure de Haar à gauche de G est aussi une mesure de Haar à droite, i.e., G est **unimodulaire**. On peut normaliser la mesure de Haar μ_G de sorte que $\mu_G(G) = 1$.*

Démonstration. Soit μ_G une mesure de Haar à gauche sur G . Comme G est compact, on peut intégrer la fonction constante égale à 1 sur G . En appliquant (2.1) avec cette fonction, on obtient, pour tout $h \in G$,

$$\mu_G(G) = \Delta(h)\mu_G(G).$$

La fonction modulaire est donc identiquement égale à 1 sur G , et ceci signifie que μ_G est une mesure de Haar à droite. La deuxième assertion est évidente. \square

Exemples 2.1. – Si G est un groupe fini, il est compact pour la topologie discrète, et la mesure de comptage normalisée est une mesure de Haar.

- Dans un groupe topologique abélien, toute mesure de Haar à gauche est aussi une mesure de Haar à droite.
- Une mesure de Haar sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est un multiple scalaire de la mesure de Lebesgue.

- Si $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, une mesure de Haar est un multiple scalaire de $\frac{dz}{2i\pi z}$. Si l'on identifie $U(1)$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par $\theta \mapsto e^{i\theta}$, cette mesure est donnée par $\frac{d\theta}{2\pi}$.

Les trois principaux problèmes en théorie des représentations d'un groupe topologique localement compact G sont :

- (1) Obtenir une classification explicite des représentations unitaires irréductibles de G , ou pour d'autres classes intéressantes de représentations irréductibles.
- (2) Donner une analyse explicite de $L^2(G)$.
- (3) Analyser les représentations unitaires de G , qui apparaissent souvent naturellement en mathématiques.

Essayer de répondre à ces questions à ce niveau de généralité semble pour l'instant impossible. Des réponses partielles, voir complètes, ont été obtenues pour certaines classes de groupes topologiques localement compacts.

3 Représentations des groupes compacts

3.1 Premiers résultats

Nous allons commencer par un résultat intéressant, mais qui ne servira pas vraiment dans la suite, et dont nous omettons la démonstration.

Théorème 3.1. *Toute représentation irréductible d'un groupe compact dans un espace de Banach est de dimension finie*

Pour la démonstration, voir par exemple [1, Corollaire 5.8].

Proposition 3.2. *Soit (π, V) une représentation de dimension finie d'un groupe compact G . Alors (π, V) est irréductible si et seulement si (π', V') est irréductible.*

Démonstration. Comme $((\pi')', (V')') = (\pi, V)$ quand V est de dimension finie, il suffit de montrer une seule implication pour obtenir l'équivalence. Supposons (π, V) irréductible et soit W un sous-espace fermé de V' invariant par π' . Alors l'orthogonal dans V de W est fermé et invariant par π , et ne peut donc être que $\{0\}$ ou V . Ceci montre que $W = \{0\}$ ou V' . \square

Nous avons ensuite cette généralisation aux groupes compacts d'un théorème que vous avez déjà vu pour les groupes finis.

Théorème 3.3. *Toute représentation d'un groupe compact G de dimension finie peut être munie d'un produit hermitien invariant, qui rend la représentation unitaire.*

Démonstration. La démonstration est la même que celle pour les groupes finis, grâce à l'existence de la mesure de Haar sur G .

Soit (π, V) une représentation de dimension finie d'un groupe compact G muni d'une mesure de Haar μ_G normalisée. Comme V est de dimension finie, on peut le munir d'un produit hermitien $(\cdot, \cdot)_0$ quelconque. Définissons un nouveau produit hermitien $(\cdot, \cdot)_1$ par

$$(v, w)_1 := \int_G (\pi(g)v, \pi(g)w)_0 d\mu_G(g), \quad v, w \in V.$$

Ce nouveau produit vérifie les propriétés de sesquilinearité requises et est positif. Il est défini car si

$$(v, v)_1 = 0,$$

alors le terme sous l'intégrale étant positif, il est nul. Pour $g = e$, ceci donne $(v, v)_0 = 0$, et donc $v = 0$.

Vérifions que ce nouveau produit hermitien est invariant par π . Pour tout $h \in H$:

$$\begin{aligned} (\pi(h)v, \pi(h)w)_1 &= \int_G (\pi(g)\pi(h)v, \pi(g)\pi(h)w)_0 d\mu_G(g) \\ &= \int_G (\pi(gh)v, \pi(gh)w)_0 d\mu_G(g) \\ &= \int_G (\pi(g)v, \pi(g)w)_0 d\mu_G(g) \\ &= (v, w)_1. \end{aligned}$$

Le point crucial du calcul est donc juste un changement de variables dans la somme.

Remarquons que l'hypothèse de la dimension finie ne sert qu'à s'assurer que V est un espace de Hilbert. Si l'on suppose au départ que $(V, (\cdot, \cdot)_0)$ est un espace de Hilbert de dimension infinie, le même procédé de moyenne donne un nouveau produit hermitien $(\cdot, \cdot)_1$ invariant par G . Il est facile de voir que la topologie définie par ce nouveau produit hermitien est la même

que l'ancienne (les normes induites étant équivalentes), et donc V est encore un espace de Hilbert pour $(\cdot, \cdot)_1$. \square

On dit qu'une représentation est **complètement réductible**, ou **semi-simple**, si elle peut s'écrire comme somme directe de représentations irréductibles.

Corollaire 3.4. *Toute représentation de dimension finie d'un groupe compact G est complètement réductible.*

Démonstration. Cela découle du théorème précédent et du théorème 1.2 de la même façon que pour les groupes finis, à l'aide d'une récurrence sur la dimension de la représentation. \square

Tout espace vectoriel complexe de dimension finie peut être muni d'un produit hermitien qui en fait un espace de Hilbert. Le théorème 3.3 ci-dessus montre que l'on peut, par un argument de moyenne, rendre ce produit hermitien invariant sous l'action de G .

Que se passe-t-il si l'on part d'une représentation (non nécessairement unitaire) de G dans un espace de Hilbert ? Peut-on la rendre unitaire ?

L'argument de moyenne marche encore, et l'on obtient un produit hermitien invariant sous l'action de G . Le problème est de vérifier que la nouvelle topologie définie par le produit hermitien invariant coïncide avec l'ancienne, en particulier, que l'espace reste complet. La réponse à cette question est positive :

Proposition 3.5. *Toute représentation d'un groupe compact G dans un espace de Hilbert H peut être munie d'un produit hermitien invariant sous l'action de G , qui rend la représentation unitaire et définit la même structure topologique sur H .*

Voir [1, Prop 2.7]. La démonstration nécessite bien sûr un peu d'analyse, en particulier le théorème de Banach–Steinhaus.

3.2 Lemme de Schur

Soit G un groupe compact. Notons \hat{G} l'ensemble des classes d'équivalences des représentations (de dimension finie) irréductibles de G .

Nous allons donner plus bas l'analogie aux groupes compacts du lemme de Schur pour les groupes finis. Pour le démontrer, nous aurons du lemme suivant.

Théorème 3.6 (Lemme de Schur). *Soit T un opérateur d'entrelacement entre deux représentations de dimension finie irréductibles (π_1, V_1) et (π_2, V_2) d'un groupe compact G . Alors*

- Si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) ne sont pas équivalentes, alors $T = 0$,
- Si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont équivalentes, alors $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ est de dimension 1. De manière équivalente, $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ est l'ensemble des multiples scalaires de l'identité de V_1 .

Démonstration. Le premier point découle facilement du lemme 1.1. En effet, si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) ne sont pas équivalentes, T n'est pas inversible. S'il n'est pas injectif, son noyau est non trivial. Mais (π_1, V_1) étant irréductible, ceci donne par invariance de $\ker T$ que $\ker T = V_1$, et donc $T = 0$. De même s'il n'est pas surjectif, son image $\text{im } T$ est un sous-espace invariant de V_2 différent de V_2 . La représentation (π_2, V_2) étant irréductible, $\text{im } T = \{0\}$, et donc $T = 0$.

Pour le second point, soit $T \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$ et considérons une valeur propre λ de T . Soit V_λ le sous-espace propre correspondant. Il est non nul par hypothèse, et donc par irréductibilité de (π_1, V_1) , $V_\lambda = V_1$. Ceci montre que $T = \lambda \text{Id}_{V_1}$. L'équivalence entre les deux formulations du second point vient du fait que, si $S : V_1 \rightarrow V_2$ est un opérateur d'entrelacement inversible réalisant l'équivalence entre (π_1, V_1) et (π_2, V_2) , l'application

$$\text{Hom}_G(V_1, V_1) \rightarrow \text{Hom}_G(V_1, V_2), \quad T \mapsto S \circ T$$

est un isomorphisme linéaire continu d'inverse donné par $T \mapsto S^{-1} \circ T$. \square

3.3 Coefficients matriciels et relations de Schur

Nous commençons cette section par un lemme assez général sur les représentation d'un groupe compact.

Lemme 3.7. Soient (π, V) et (τ, W) deux représentations d'un groupe compact G et soit $A \in \text{Hom}(V, W)$. Alors

$$A^\circ := \int_G \tau(g)A\pi(g)^{-1} d\mu_G(g)$$

définit un élément de $\text{Hom}_G(V, W)$.

Démonstration. On a, par invariance de la mesure de Haar,

$$A^\circ\pi(g) = \int_G \tau(t)A\pi(g^{-1}t)^{-1} d\mu_G(t) = \int_G \tau(gt)A\pi(t)^{-1} d\mu_G(t),$$

i.e., $A^\circ\pi(g) = \tau(g)A^\circ$. □

Le résultat qui suit est une application du lemme de Schur qui nous servira pour la suite. Rappelons que, pour un groupe compact G , μ_G désigne sa mesure de Haar normalisée.

Proposition 3.8. Soient (π, V) et (τ, W) deux représentations irréductibles d'un groupe compact G et soit $A : V \rightarrow W$ une application linéaire continue. Alors A° est égal à 0 si τ n'est pas équivalente à π et égal à $\frac{\text{tr} A}{\dim V} \text{Id}_V$ si $(\tau, W) = (\pi, V)$.

Démonstration. Comme on voit facilement que A° est un opérateur d'entrelacement, d'après le lemme de Schur, $A^\circ = 0$ si τ n'est pas équivalent à π et $A^\circ = \alpha \text{Id}_V$ si $(\tau, W) = (\pi, V)$. Il reste à déterminer α . On a

$$\alpha \dim V = \text{tr} A^\circ = \int_G \text{tr} (\pi(g)A\pi(g^{-1})) d\mu_G(g) = \text{tr} A.$$

□

Soit G un groupe compact. Soit $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions continues sur G à valeurs complexes. Cet espace, muni de la norme sup, est un espace de Banach. Nous allons introduire certains éléments de $\mathcal{C}(G)$, appelés coefficients matriciels des représentations.

Soit (π, V) une représentation de G . On appelle **coefficient matriciel** de π une fonction sur G , à valeurs complexes, de la forme

$$\phi_{v,\lambda}^\pi : g \mapsto \lambda(\pi(g)v),$$

où $\lambda \in V'$ et $v \in V$. La terminologie vient du fait où si l'on choisit une base adéquate pour V et que l'on exprime l'application linéaire $\pi(g)$ dans cette base sous forme matricielle, alors $\phi_{v,\lambda}^\pi(g)$ désignera un coefficient de cette matrice.

Les relations de Schur, que vous connaissez pour les groupes finis, sont encore valides, ainsi que les propriétés d'indépendance linéaire des coefficients matriciels dans $\mathcal{C}(G)$. Par contre, comme $\mathcal{C}(G)$ n'est pas de dimension finie, on ne peut pas en déduire que \widehat{G} est fini (en général, il ne l'est pas).

Avant de donner ces résultats, introduisons la notation suivante. Pour toute fonction continue ϕ sur G , notons $\check{\phi} : g \mapsto \phi(g^{-1})$.

Lemme 3.9 (Relations d'orthogonalité de Schur).

(i) Soit (π, V) une représentation irréductible de G . Alors, pour tous $v_1, v_2 \in V$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in V'$, on a :

$$\int_G \phi_{v_1, \lambda_1}^\pi(g) \check{\phi}_{v_2, \lambda_2}^\pi(g) d\mu_G(g) = \frac{\lambda_1(v_2) \lambda_2(v_1)}{d_\pi}.$$

où $d_\pi = \dim V$.

(ii) Soient (π_1, V_1) , (π_2, V_2) deux représentations irréductibles de G non équivalentes. Alors, pour tous $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $\lambda_1 \in V_1'$, $\lambda_2 \in V_2'$,

$$\int_G \phi_{v_1, \lambda_1}^{\pi_1}(g) \check{\phi}_{v_2, \lambda_2}^{\pi_2}(g) d\mu_G(g) = 0.$$

Démonstration. Soient $\lambda_1 \in V_1'$, $v_2 \in V_2$. Considérons l'application linéaire (continue) $A : V_1 \rightarrow V_2$ définie par

$$A(v) = \lambda_1(v) v_2.$$

Soient maintenant aussi $\lambda_2 \in V_2'$ et $v_1 \in V_1$. Alors, avec les notations du lemme 3.7, on a

$$\begin{aligned} \lambda_2(A \circ v_1) &= \lambda_2 \left(\int_G \pi_2(g) A(\pi_1(g)^{-1} v_1) d\mu_G(g) \right) \\ &= \lambda_2 \left(\int_G \pi_2(g) \lambda_1(\pi_1(g)^{-1} v_1) v_2 d\mu_G(g) \right) \\ &= \lambda_2 \left(\int_G \lambda_1(\pi_1(g)^{-1} v_1) \pi_2(g) v_2 d\mu_G(g) \right) \\ &= \int_G \lambda_1(\pi_1(g)^{-1} v_1) \lambda_2(\pi_2(g) v_2) d\mu_G(g). \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $g \mapsto g^{-1}$ dans l'intégrale pour retrouver le membre de gauche des égalités dans (i) et (ii). On conclut grâce à la proposition 3.8 et au fait que $\text{tr } A = \lambda_1(v_2)$ quand $\pi_1 = \pi_2$. \square

Corollaire 3.10. *Soient (π_i, V_i) , $i = 1, \dots, r$, des représentations irréductibles d'un groupe compact G , non équivalentes deux à deux. Pour chaque i , choisissons $v_i \in V_i$ et $\lambda_i \in V'_i$ non nuls. Alors les coefficients matriciels $\phi_{v_i, \lambda_i}^{\pi_i}$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{C}(G)$.*

Démonstration. Supposons que $\sum_i c_i \phi_{v_i, \lambda_i}^{\pi_i} = 0$. Fixons j entre 1 et r et choisissons $\lambda'_j \in V'_j$ tel que $\lambda'_j(v_j) = 1$ et $v'_j \in V_j$ tel que $\lambda_j(v'_j) = 1$. Alors, d'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \left(\sum_i c_i \phi_{v_i, \lambda_i}^{\pi_i}(g) \right) \check{\phi}_{v'_j, \lambda'_j}^{\pi_j}(g) d\mu_G(g) = c_j \int_G \phi_{v_i, \lambda_i}^{\pi_i}(g) \check{\phi}_{v'_j, \lambda'_j}^{\pi_j}(g) d\mu_G(g) \\ &= c_j d_{\pi_j}^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $c_j = 0$. \square

3.4 Transformation de Fourier pour les groupes compacts

Soit $L^2(G)$ l'espace de Hilbert des fonctions (à valeurs complexes, mesurables, modulo l'égalité presque partout) de carré intégrable par rapport à la mesure de Haar normalisée μ_G , le produit hermitien $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ étant défini de la manière habituelle suivante :

$$(f, h)_{L^2} := \int_G f(g) \overline{h(g)} d\mu_G(g).$$

L'espace $\mathcal{C}(G)$ est un sous-espace dense de $L^2(G)$.

Définissons le produit de convolution sur $\mathcal{C}(G)$ et $L^2(G)$. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(G)$. Leur produit de convolution $f_1 * f_2$ est défini par :

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(t) f_2(t^{-1}g) d\mu_G(t).$$

Il est clair que $f_1 * f_2 \in \mathcal{C}(G)$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$|f_1 * f_2(g)| \leq \|f_1\|_2 \|f_2\|_2,$$

ce qui montre que le produit de convolution peut être étendu par continuité à $L^2(G)$:

$$* : L^2(G) \times L^2(G) \rightarrow L^2(G).$$

L'espace $L^2(G)$ muni du produit de convolution est une algèbre associative. D'autre part, $L^2(G)$ est muni de la représentation régulière $L \times R$ de $G \times G$ et cette représentation est unitaire.

Dans le cas des groupes finis, $\mathcal{F}(G) = L^2(G)$.

Pour les groupes compacts généraux, c'est l'espace $L^2(G)$, muni de toutes ses structures (espace de Hilbert, représentation unitaire de $G \times G$, algèbre de convolution) qui joue le premier rôle, comme nous allons le voir ci-dessous. Remarquons que $L^2(G)$ n'admet pas d'élément neutre, si G n'est pas fini.

Pour (π, V) une représentation de dimension finie d'un groupe compact G , on définit l'application

$$\pi : L^2(G) \rightarrow \text{End}(V), \quad f \mapsto \pi(f) := \int_G f(g)\pi(g) d\mu_G(g).$$

L'intégrale ci-dessus est bien définie car, comme G étant compact, $L^2(G) \subset L^1(G)$.

Remarquons que $\text{End}(V)$ est naturellement muni d'une action de $G \times G$, notée $\text{End } \pi$ par :

$$(\text{End}(\pi)(g_1, g_2)A)(v) := \pi(g_1)(A\pi(g_2)^{-1}v), \quad v \in V, g_1, g_2 \in G, A \in \text{End}(V). \quad (3.1)$$

Proposition 3.11. *L'application π est un morphisme d'algèbres de $L^2(G)$ dans $\text{End}(V)$ qui entrelace la représentation régulière $L \times R$ de $G \times G$ sur $\mathcal{F}(G)$ et la représentation $\text{End } \pi$ dans $\text{End}(V)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $f_1, f_2 \in L^2(G)$,

$$\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1)\pi(f_2).$$

Dans le membre de droite, le produit est la composition des opérateurs dans

End(V). Calculons

$$\begin{aligned}
\pi(f_1 * f_2) &= \int_G (f_1 * f_2)(g) \pi(g) d\mu_G(g) \\
&= \int_G \left(\int_G f_1(t) f_2(t^{-1}g) d\mu_G(t) \right) \pi(g) d\mu_G(g) \\
&= \int_G \int_G f_1(t) f_2(g) \pi(tg) d\mu_G(g) d\mu_G(t) \\
&= \int_G \left(\int_G f_1(t) \pi(t) d\mu_G(t) \right) f_2(g) d\mu_G(g) \\
&= \pi(f_1) \pi(f_2).
\end{aligned}$$

Montrons que π est un opérateur d'entrelacement. Soient $x, y \in G$, $f \in L^2(G)$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\pi((L \times R)(x, y)f) &= \int_G ((L \times R)(x, y)f)(g) \pi(g) d\mu_G(g) \\
&= \int_G f(x^{-1}gy) \pi(g) d\mu_G(g) \\
&= \int_G f(g) \pi(xgy^{-1}) d\mu_G(g) \\
&= \pi(x) \int_G f(g) \pi(g) d\mu_G(g) \pi(y^{-1}) \\
&= \pi(x) \pi(f) \pi(y^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Ceci permet de définir la **transformée de Fourier** $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^2(G)$ comme pour les groupes finis. Pour $f \in L^2(G)$, on pose

$$\mathcal{F}f(\delta) := \pi_\delta(f) = \int_G f(g) \pi_\delta(g) d\mu_G(g), \quad \delta \in \widehat{G}.$$

Lemme 3.12. *La transformation de Fourier vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G)$,

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \mathcal{F}(f_1) \mathcal{F}(f_2).$$

(ii) L'application \mathcal{F} est un $G \times G$ -morphisme de $L^2(G)$ dans $\prod_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta)$.

Démonstration. Découle immédiatement de la proposition 3.11. □

Il faut remarquer que cette transformée de Fourier est à valeurs dans le produit infini $\prod_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta)$. Ceci pose un problème pour définir la transformée de Fourier inverse, celle-ci étant définie par une somme sur \widehat{G} (qui n'est pas fini en général), qui pourrait ne pas converger. Pour éviter cela, nous allons restreindre le domaine de la transformée de Fourier inverse à $\bigoplus_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta)$. La somme directe

$$\bigoplus_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta)$$

est le sous-espace de $\prod_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta)$ constitué des familles $(F(\delta))_{\delta \in \widehat{G}}$ telles que $F(\delta) = 0$ sauf pour un nombre fini de $\delta \in \widehat{G}$. Ceci nous assurera que la transformée de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ est bien définie sur ce sous-espace, puisque seul un nombre fini de termes sont non nuls dans la somme définissant la transformée de Fourier inverse.

Définissons la **transformée de Fourier inverse**. Soit

$$(F(\delta))_{\delta \in \widehat{G}} \in \bigoplus_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta).$$

Posons, pour tout $g \in G$,

$$\overline{\mathcal{F}}F(g) := \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \text{tr}(\pi_\delta(g) {}^t F(\delta')) = \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \text{tr}(\pi_{\delta'}(g) {}^t F(\delta)).$$

On obtient ainsi une fonction sur G .

Lemme 3.13. *Pour tout $F = (F(\delta))_{\delta \in \widehat{G}} \in \bigoplus_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta)$,*

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}F = F.$$

Démonstration. Rappelons que si V est un espace vectoriel de dimension finie, la forme bilinéaire symétrique

$$(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$$

sur $\text{End}(V)$ est non dégénérée. On a donc $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}F = F$ si et seulement si pour tout $\delta \in \widehat{G}$ et tout $A \in \text{End}(V_\delta)$, $\text{tr}((\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}F)(\delta)A) = \text{tr}(F(\delta)A)$. Calculons

$$\begin{aligned} \text{tr}((\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}F)(\delta)A) &= \text{tr} \left(\left(\int_G (\overline{\mathcal{F}}F)(g) \pi_\delta(g) d\mu_G(g) \right) A \right) \\ &= \text{tr} \left(\left(\int_G \sum_{\nu \in \widehat{G}} d_\nu \text{tr}(\pi_{\nu'}(g) {}^tF(\nu)) \pi_\delta(g) d\mu_G(g) \right) A \right) \\ &= \sum_{\nu \in \widehat{G}} d_\nu \int_G \text{tr}(\pi_{\nu'}(g) {}^tF(\nu)) \text{tr}(\pi_\delta(g)A) d\mu_G(g). \end{aligned}$$

Si l'on fixe une base $(v_i)_i$ de V_ν de base duale $(v_i^*)_i$, on a

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi_{\nu'}(g) {}^tF(\nu)) &= \sum_i v_i(\pi_{\nu'}(g) {}^tF(\nu) v_i^*) \\ &= \sum_i (\pi_\nu(g)^{-1} v_i) ({}^tF(\nu) v_i^*) = \sum_i (\pi_\nu(g)^{-1} v_i)(w_i^*) \\ &= \sum_i w_i^*(\pi_\nu(g)^{-1} v_i) = \sum_i \check{\phi}_{v_i, w_i^*}^\nu(g), \end{aligned}$$

où l'on a posé $w_i^* := {}^tF(\nu) v_i^*$.

De même, en fixant une base $(e_j)_j$ de V_δ de base duale $(e_j^*)_j$,

$$\text{tr}(\pi_\delta(g)A) = \sum_j e_j^*(\pi_\delta(g)Ae_j) = \sum_j e_j^*(\pi_\delta(g)f_j) = \sum_j \phi_{f_j, e_j^*}^\delta(g),$$

où l'on a posé $f_j = Ae_j$.

En reportant dans le calcul précédent, ceci donne

$$\text{tr}((\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}F)(\delta)A) = \sum_{i,j} \sum_{\nu \in \widehat{G}} \phi_{f_j, e_j^*}^\delta(g) \check{\phi}_{v_i, w_i^*}^\nu(g) d\mu_G(g).$$

Les formules d'orthogonalité de Schur nous disent que les termes de cette somme sont nuls sauf si $\nu = \delta$, donc

$$\begin{aligned} \text{tr}((\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}F)(\delta)A) &= \sum_{i,j} w_i^*(f_j) v_i^*(e_i) \\ &= \sum_i ({}^tF(\delta) v_i^*)(Av_i) = \sum_i v_i^*(F(\delta)Av_i) = \text{tr}(F(\delta)A). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Le problème est maintenant de déterminer l'image de $\overline{\mathcal{F}}$ dans $L^2(G)$.

Pour tout $\delta \in \widehat{G}$, on définit $\mathcal{R}(\delta)$ comme le sous-espace de $\mathcal{C}(G)$ engendré par les coefficients matriciels de la représentation δ . On pose aussi :

$$\mathcal{R}(G) := \bigoplus_{\delta \in \widehat{G}} \mathcal{R}(\delta).$$

Il est alors facile de voir que $\overline{\mathcal{F}}$ réalise un isomorphisme entre $\bigoplus_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta)$ et $\mathcal{R}(G)$, plus précisément, $\overline{\mathcal{F}}$ réalise un isomorphisme entre chaque $\text{End}(V_\delta)$ et $\mathcal{R}(\delta)$.

Le théorème de Peter-Weyl pour les groupes compacts peut s'énoncer ainsi :

Théorème 3.14 (Peter–Weyl). *Soit G un groupe compact. Le sous-espace $\mathcal{R}(G)$ de $\mathcal{C}(G)$ est dense dans $\mathcal{C}(G)$ et dans $L^2(G)$.*

Dans le cas des groupes finis, pour montrer que \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, on montre que $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}$ est l'identité, puis l'injectivité de \mathcal{F} , la surjectivité de $\overline{\mathcal{F}}$ s'en déduisant alors. Le résultat ci-dessus remplace la surjectivité de $\overline{\mathcal{F}}$. On le démontre en commençant par établir un résultat analogue de l'injectivité de \mathcal{F} .

Théorème 3.15. *Pour tout $g \in G$, $g \neq e$, il existe une représentation irréductible de dimension finie (π, V) de G telle que $\pi(g) \neq \text{Id}_V$.*

On dit que les représentations irréductibles de G “séparent les points”.

La démonstration de ce théorème utilise le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts. Nous renvoyons le lecteur à [1, chapitre 4].

Choisissons, dans chaque $\mathcal{R}(\delta)$, une base orthogonale. Alors le théorème ci-dessus affirme que la réunion de toutes ces bases forme une base **au sens hilbertien** de l'espace de Hilbert $L^2(G)$. Nous écrivons ceci de la manière suivante :

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus}_{\delta \in \widehat{G}} \mathcal{R}(\delta).$$

Nous pouvons maintenant identifier l'image de $L^2(G)$ par la transformation de Fourier \mathcal{F} . Il s'agit de l'espace de Hilbert

$$\widehat{\bigoplus}_{\delta \in \widehat{G}} \text{End}(V_\delta).$$

Concrètement, cet espace est obtenu de la manière suivante : chaque $\text{End}(V_\delta)$ est une représentation de dimension finie du groupe compact $G \times G$. Il est donc muni d'un produit hermitien invariant. On choisit une base orthonormale de chacun des $\text{End}(V_\delta)$, et l'on forme un espace de Hilbert en décrétant que la réunion de toutes ces bases est une base orthonormale (au sens hilbertien). La transformation de Fourier inverse est définie sur ce sous-espace (par une série convergente). Une autre version du théorème de Peter–Weyl est donc

Théorème 3.16 (Peter–Weyl). *Soit G un groupe compact. La transformation de Fourier \mathcal{F} réalise un isomorphisme*

$$L^2(G) \simeq \widehat{\bigoplus_{\delta \in \hat{G}} \text{End}(V_\delta)}.$$

La formule d'inversion de Fourier et la formule de Plancherel que vous connaissez pour les groupes finis sont donc valables pour les groupes compacts. Comme les fonctions dans $L^2(G)$ ne sont définies que modulo l'égalité presque partout, l'inversion de Fourier doit être comprise comme telle. En particulier, la formule pour $g = e$ n'a pas de sens dans ce contexte.

Les voici plus précisément.

Corollaire 3.17 (Formule d'inversion de Fourier). *Soient G un groupe compact et $f \in L^2(G)$. La formule d'inversion de Fourier $f = \overline{\mathcal{F}\mathcal{F}f}$ s'écrit explicitement*

$$f(g) = \sum_{\delta \in \hat{G}} d_\delta \text{tr}(\pi_\delta(f) \pi_\delta(g)^{-1}) = \sum_{\delta \in \hat{G}} d_\delta \text{tr}(\mathcal{F}f(\delta) \pi_\delta(g)^{-1}).$$

Démonstration. Il s'agit juste d'un calcul, où nous allons, dans l'ordre, utiliser le fait que $\text{tr} X = \text{tr} X^*$ pour tout opérateur X , effectuer un changement de variable $\delta \mapsto \delta'$, et enfin utiliser le fait que par définition de la représentation contragrédiente,

$$(\pi_{\delta'}(g))^* = \pi_\delta(g)^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
f(g) &= (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(g) = \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \operatorname{tr}(\pi_\delta(g)(\mathcal{F}f(\delta'))^*) \\
&= \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \operatorname{tr}(\mathcal{F}f(\delta')(\pi_\delta(g))^*) \\
&= \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \operatorname{tr}(\mathcal{F}f(\delta)(\pi_{\delta'}(g))^*) \\
&= \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \operatorname{tr}(\mathcal{F}f(\delta)\pi_\delta(g)^{-1}) \\
&= \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \operatorname{tr}(\pi_\delta(f)\pi_\delta(g)^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.18 (Formule de Plancherel). *Soient G un groupe compact et $f_1, f_2 \in L^2(G)$. Alors*

$$\int_G f_1(g)f_2(g^{-1}) d\mu_G(g) = \sum_{\delta \in \widehat{G}} d_\delta \operatorname{tr}(\mathcal{F}f_1(\delta)\mathcal{F}f_2(\delta)).$$

Démonstration. Posons $f = f_1 * f_2$. On a $\mathcal{F}(f) = (\mathcal{F}f_1)(\mathcal{F}f_2)$ et $f(e) = \int_G f_1(g)f_2(g^{-1}) d\mu_G(g)$. On utilise alors le corollaire précédent. □

Exemple 3.1. Soit $G = U(1)$. C'est un groupe abélien dont les représentations irréductibles continues (de dimension 1) sont

$$\chi_n : e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta},$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Le dual \widehat{G} s'identifie donc à \mathbb{Z} . L'inversion de Fourier dans ce cas est bien la décomposition en série de Fourier des fonctions dans $L^2(U(1))$ (que l'on peut voir comme fonctions sur \mathbb{R} , 2π -périodiques). Il est bien connu que pour une fonction continue, il n'y a dans ce cas pas convergence ponctuelle de sa série de Fourier.

3.5 Théorie des caractères pour les groupes compacts

Soient G un groupe compact et (π, V) une représentation de dimension finie de G . Son **caractère** Θ_π est la fonction définie sur G par :

$$\Theta_\pi(g) := \operatorname{tr}(\pi(g)).$$

C'est une fonction continue sur G . Comme

$$\operatorname{tr}(\pi(xy)) = \operatorname{tr}(\pi(x)\pi(y)) = \operatorname{tr}(\pi(y)\pi(x)) = \operatorname{tr}(\pi(yx)),$$

on voit que $\Theta_\pi(xy) = \Theta_\pi(yx)$ ou encore $\Theta_\pi(xyx^{-1}) = \Theta_\pi(y)$, et donc Θ_π est ce que l'on appelle une fonction centrale, i.e., un élément de

$$L^2(G)^G := \{f \in L^2(G) \mid f * h = h * f, \quad h \in L^2(G)\},$$

qui est le centre de l'algèbre $(L^2(G), *)$. En effet

Lemme 3.19. *Une fonction $f \in L^2(G)$ est dans $L^2(G)^G$ si et seulement si elle est constante sur les classes de conjugaison de G .*

Démonstration. On a

$$f * h(y) = \int_G f(x)h(x^{-1}y) d\mu_G(x) = \int_G h(x)f(yx^{-1}) d\mu_G(x).$$

Si f est constante sur les classes de conjugaison de G , le terme à droite de la deuxième égalité est alors égal à $h * f(y)$.

Pour l'implication réciproque, en supposant que $f \in L^2(G)^G$, il suffit de calculer $f * \delta_{g^{-1}}$ et $\delta_{g^{-1}}$, pour $g \in G$, avec δ_g la fonction de $L^2(G)$ qui vaut 1 en g et 0 sinon. \square

Lemme 3.20. *Soit (π, V) une représentation de dimension finie d'un groupe compact G et $x \in G$. On a alors*

$$\Theta_\pi(x^{-1}) = \overline{\Theta_\pi(x)} = \Theta_{\pi'}(x), \quad \Theta_\pi(e) = \dim V.$$

Démonstration. Comme π est de dimension finie, d'après le théorème 3.3, il existe un produit hermitien (\cdot, \cdot) sur V tel que π soit unitaire. Considérons une base orthonormale $(e_i)_i$ de V . Remarquons qu'étant donné que π est unitaire, $(f_i)_i := (\pi(x^{-1})e_i)_i$ est encore une base orthonormale de V . On a alors

$$\Theta_\pi(x^{-1}) = \sum_i (\pi(x^{-1})e_i, e_i) = \sum_i \overline{(\pi(x)f_i, f_i)} = \overline{\Theta_\pi(x)}.$$

De plus, comme π est unitaire, $(\pi'(x))^* = \pi(x^{-1})$. On en déduit la deuxième égalité. La troisième est immédiate. \square

Proposition 3.21. Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations de dimension finie d'un groupe compact G . Alors, pour tout $x \in G$,

$$\Theta_{\pi_2 \oplus \pi_2}(x) = \Theta_{\pi_1}(x) + \Theta_{\pi_2}(x), \quad \Theta_{\pi_1 \otimes \pi_2}(x) = \Theta_{\pi_1}(x) \Theta_{\pi_2}(x).$$

Démonstration. On exprime la trace en choisissant une base $(e_i)_i$ de V_1 de base duale $(e_i^*)_i$ et une base $(f_j)_j$ de V_2 de base duale $(f_j^*)_j$:

$$\text{tr } \pi_1(x) = \sum_i e_i^*(\pi_1(x)e_i), \quad \text{tr } \pi_2(x) = \sum_j f_j^*(\pi_2(x)f_j).$$

Une base de $V_1 \oplus V_2$ est obtenue en prenant la réunion des bases $(e_i)_i$ et $(f_j)_j$, la base duale étant la réunion des $(e_i^*)_i$ et des $(f_j^*)_j$, ce qui montre la première formule. Une base du produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ est $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ de base duale $(e_i^* \otimes f_j^*)_{i,j}$, donc

$$\begin{aligned} \Theta_{\pi_1 \otimes \pi_2}(x) &= \sum_{i,j} (e_i^* \otimes f_j^*)((\pi_1 \otimes \pi_2)(x)(e_i \otimes f_j)) \\ &= \sum_{i,j} (e_i^* \otimes f_j^*)((\pi_1(x)e_i \otimes \pi_2(x)f_j)) \\ &= \sum_i e_i^*(\pi_1(x)e_i) \sum_j f_j^*(\pi_2(x)f_j). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.22. Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations de dimension finie d'un groupe compact G de caractères respectifs Θ_{π_1} et Θ_{π_2} . Alors

$$(\Theta_{\pi_1}, \Theta_{\pi_2})_{L^2} = \dim \text{Hom}_G(V_1, V_2).$$

Démonstration. Rappelons que, comme V_1 et V_2 sont de dimension finie, l'application

$$V_1^* \otimes V_2 \rightarrow \text{Hom}(V_1, V_2)$$

définie par :

$$\lambda_1 \otimes v_2 \mapsto [v_1 \mapsto \lambda_1(v_1)v_2].$$

est un isomorphisme linéaire.

Rappelons l'application, donnée dans le lemme 3.7,

$$\text{Hom}(V_1, V_2) \rightarrow \text{Hom}_G(V_1, V_2), \quad A \mapsto A^\circ$$

définie par

$$A^\circ v_1 := \int_G \pi_2(g) A \pi_1(g)^{-1} v_1 d\mu_G(g).$$

On a montré en TD que cet opérateur est un projecteur orthogonal de $\text{Hom}(V_1, V_2)$ sur $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ et qu'il est, à un changement de bases près, égal à

$$\int_G (\pi'_1 \otimes \pi_2)(g) d\mu_G(g).$$

Sa trace est donc égale à la dimension de $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ et à

$$\int_G \text{tr}(\pi'_1(g)) \text{tr}(\pi_2(g)) d\mu_G(g) = \int_G \Theta_{\pi_1}(g) \overline{\Theta_{\pi_2}(g)} d\mu_G(g) = \overline{(\Theta_{\pi_1}, \Theta_{\pi_2})_{L^2}}.$$

□

Corollaire 3.23. *Soit (π, V) une représentation de dimension finie d'un groupe compact G . Alors*

$$\pi \text{ est irréductible} \iff \|\Theta_\pi\|_{L^2} = 1.$$

Démonstration. Cela découle du théorème précédent et du lemme de Schur. □

Pour tout $\delta \in \widehat{G}$, notons comme précédemment (π_δ, V_δ) une représentation de G dans la classe δ . Comme la trace est invariante par changement de base, le caractère d'une représentation irréductible ne dépend pas du choix de son représentant dans sa classe d'équivalence. On note alors Θ_δ le caractère de π_δ .

Corollaire 3.24. *Soient G un groupe compact et $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{G}$. Alors*

$$(\Theta_{\delta_1}, \Theta_{\delta_2})_{L^2} = \delta_{\delta_1 \delta_2}.$$

Corollaire 3.25. *Soit (π, V) une représentation de dimension finie d'un groupe compact G et $\pi = \bigoplus_{\delta \in I} n_\delta \pi_\delta$ sa décomposition en somme (finie) de représentations irréductibles ($I \subset \widehat{G}$ fini, $n_\delta \in \mathbb{N}$ et π_δ est un représentant de δ dans π). Alors*

(i) $n_\delta = (\Theta_\pi, \Theta_\delta)$ est bien défini,

$$(ii) \|\Theta_\pi\|^2 = \sum_{\delta \in I} n_\delta^2.$$

Démonstration. On a $V_\pi = \bigoplus_{\delta \in I} (V_{\pi_\delta} \otimes \mathbb{C}^{n_\delta})$. Pour tout $\tau \in \widehat{G}$, d'après le lemme de Schur, si $\tau \neq \delta$, les opérateurs d'entrelacement $V_\pi \rightarrow V_\xi$ sont nuls, pour tout représentant ξ de τ . Donc, encore d'après le lemme de Schur,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(V_\pi, V_{\pi_\delta}) &= \text{Hom}_G(V_{\pi_\delta}, V_{\pi_\delta} \otimes \mathbb{C}^{n_\delta}) = \mathbb{C}^{n_\delta} \otimes \text{Hom}_G(V_{\pi_\delta}, V_{\pi_\delta}) \\ &\simeq \mathbb{C}^{n_\delta} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^{n_\delta}. \end{aligned}$$

L'assertion (i) résulte alors du théorème.

Le point (ii) résulte alors de la proposition 3.21. □

Corollaire 3.26. *L'ensemble des caractères $(\Theta_\delta)_{\delta \in \widehat{G}}$ est une base orthonormale de l'espace de Hilbert $L^2(G)^G$ et on a pour tout $f \in L^2(G)^G$,*

$$f = \sum_{\delta \in \widehat{G}} (f, \Theta_\delta)_{L^2} \Theta_\delta.$$

Remarquons que les calculs fondés sur les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison dans un groupe fini ne se généralisent pas aux groupes compacts.

Références

- [1] A. Robert. *Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983. volume 80 of London Mathematical Society Lecture Note Series.