Une introduction à la formule des traces

Sofiane Souaifi [1]

[1] Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg

Journées d'Été des Mathématiciens Tunisiens à l'Étranger
20-21 juillet 2016

Introduction

Introduction

Analyse harmonique :

Introduction

Analyse harmonique :

Principe général

Introduction

Analyse harmonique :

Principe général

objets géométriques $\longleftrightarrow$ **objets spectraux**

Introduction

	Objets géométriques	Objets spectraux
Physique	particules (mécanique classique)	ondes (mécanique quantique)
Algèbre linéaire	trace d'une matrice carrée	somme de ses valeurs propres
Groupes finis	classes de conjugaison	caractères irréductibles
Géométrie différentielle	longueurs des géodésiques	valeurs propres du Laplacien
Théorie des nombres	logarithmes de puissances de nombres premiers	zéros de la fonction Zeta de Riemann
Géométrie algébrique	cycles algébriques	motifs
Formes automorphes	classes de conjugaison rationnelle	représentations automorphes

Introduction

Introduction

Philosophie.

Introduction

Philosophie.

Formule des traces

Introduction

Philosophie.

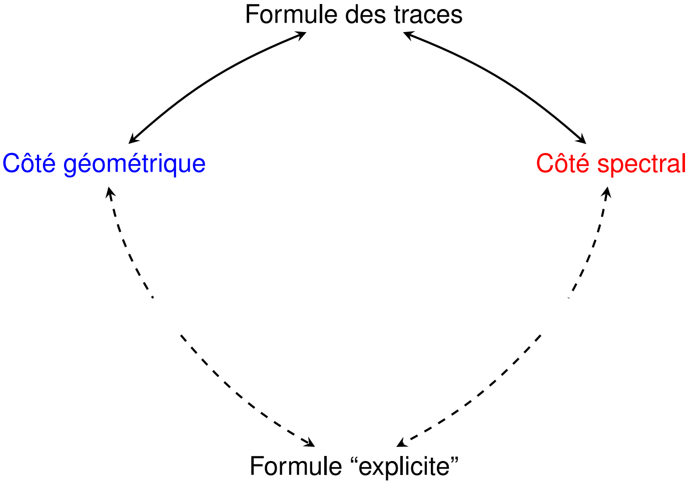
Formule des traces

Côté géométrique

Côté spectral

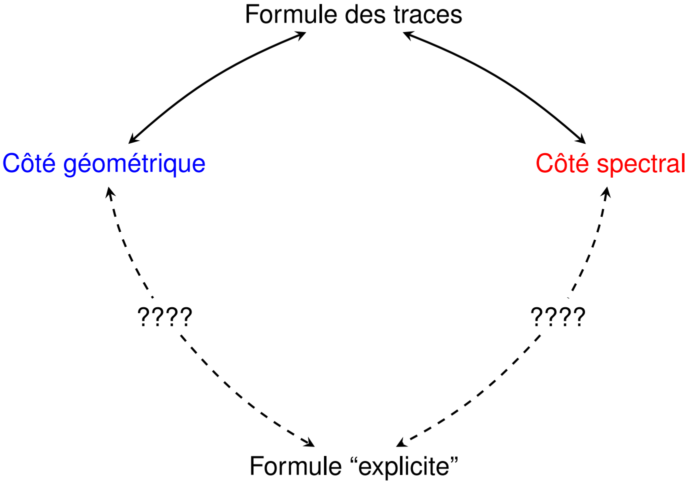
Introduction

Philosophie.



Introduction

Philosophie.



Introduction : un peu d'algèbre linéaire.

Introduction : un peu d'algèbre linéaire.

Soit A un op. linéaire sur V de dimension n, muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base orthonormale de V.

Introduction : un peu d'algèbre linéaire.

Soit A un op. linéaire sur V de dimension n, muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base orthonormale de V.
La trace de A est définie par :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) := \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{A}v_i, v_i \rangle.$$

Introduction : un peu d'algèbre linéaire.

Soit A un op. linéaire sur V de dimension n, muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base orthonormale de V.
La trace de A est définie par :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) := \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{A}v_i, v_i\rangle.$$

Autre formule pour $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Introduction : un peu d'algèbre linéaire.

Soit A un op. linéaire sur V de dimension n, muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base orthonormale de V.
La trace de A est définie par :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) := \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{A}v_i, v_i \rangle.$$

Autre formule pour $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

On a donc la formule :

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{A}v_i, v_i \rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Cas des groupes finis

Cas des groupes finis

Soit G groupe fini, $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ la $\mathbb{C}$-algèbre du groupe G, i.e. l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$, muni de la convolution :

$$\forall (a_x)_{x\in\mathrm{G}}, (b_y)_{y\in\mathrm{G}} \in \mathbb{C}^{\mathrm{G}}, \quad (\sum_{x\in\mathrm{G}} a_x 1_x) * (\sum_{y\in\mathrm{G}} b_y 1_y) := \sum_{(x,y)\in\mathrm{G}\times\mathrm{G}} a_x b_y 1_{xy},$$

où $(1_g)_{g\in\mathrm{G}}$ est la base donnée par les fonctions caractéristiques, orthonormale pour :

$$\langle\phi,\psi\rangle := \sum_{g\in\mathrm{G}} \phi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Cas des groupes finis

G groupe fini, $\mathbb{C}[G]$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(1_g)_{g\in G}$.

Cas des groupes finis

G groupe fini, $\mathbb{C}[G]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(1_g)_{g \in G}$.
La trace d'un opérateur linéaire A sur $\mathbb{C}[G]$ est :

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{g \in G} \langle A 1_g, 1_g \rangle.$$

Cas des groupes finis

G groupe fini, $\mathbb{C}[G]$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(1_g)_{g\in G}$.
La trace d'un opérateur linéaire A sur $\mathbb{C}[G]$ est :

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{g\in G} \langle A\,1_g, 1_g\rangle.$$

Considérons R l'homomorphisme de groupes de $G\times G$ dans $GL(\mathbb{C}[G])$ défini par :

$$(R(g_1,g_2)\phi)(g) := \phi(g_1^{-1} g g_2), \quad \phi\in\mathbb{C}[G].$$

Cas des groupes finis

G groupe fini, $\mathbb{C}[G]$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(1_g)_{g\in G}$.
La trace d'un opérateur linéaire A sur $\mathbb{C}[G]$ est :

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{g\in G} \langle A\,1_g, 1_g\rangle.$$

Considérons R l'homomorphisme de groupes de $G \times G$ dans $GL(\mathbb{C}[G])$ défini par :

$$(R(g_1, g_2)\phi)(g) := \phi(g_1^{-1} g g_2), \quad \phi \in \mathbb{C}[G].$$

La trace de $R(g_1, g_2)$ est alors égale à :

$$\mathrm{Tr}(R(g_1, g_2)) := \sum_{g\in G} \langle R(g_1, g_2)1_g, 1_g\rangle = |\{g \in G : g_1^{-1} g g_2 = g\}|.$$

Cas des groupes finis

G groupe fini, $\mathbb{C}[G]$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(1_g)_{g\in G}$.
La trace d'un opérateur linéaire A sur $\mathbb{C}[G]$ est :

$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{g\in G} \langle A 1_g, 1_g\rangle.$$

Considérons R l'homomorphisme de groupes de $G\times G$ dans $GL(\mathbb{C}[G])$ défini par :

$$(R(g_1,g_2)\phi)(g) := \phi(g_1^{-1} g g_2), \quad \phi \in \mathbb{C}[G].$$

La trace de $R(g_1,g_2)$ est alors égale à :

$$\mathrm{Tr}(R(g_1,g_2)) := \sum_{g\in G} \langle R(g_1,g_2)1_g, 1_g\rangle = |\{g\in G : g_1^{-1} g g_2 = g\}|.$$

Pour $f \in \mathbb{C}[G\times G]$, considérons l'opérateur linéaire sur $\mathbb{C}[G]$:

$$R(f) := \sum_{(g_1,g_2)\in G\times G} f(g_1,g_2) R(g_1,g_2).$$

Cas des groupes finis (Côté géométrique)

Cas des groupes finis (Côté géométrique)

Notons

$$\begin{aligned} C_g &:= \{xgx^{-1} : x \in G\} \\ Z_g &:= \{x \in G : xgx^{-1} = 1\} \end{aligned}$$

Cas des groupes finis (Côté géométrique)

Notons

$$\begin{aligned} C_g &:= \{xgx^{-1} : x \in G\} \\ Z_g &:= \{x \in G : xgx^{-1} = 1\} \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathrm{Tr}(R(g_1, g_2)) = \begin{cases} 0, & \text{si } C_{g_1} \neq C_{g_2} \\ |Z_g|, & \text{si } g = g_1 = g_2. \end{cases}$$

Cas des groupes finis (Côté géométrique)

Notons

$$\begin{aligned} C_g &:= \{xgx^{-1} : x \in G\} \\ Z_g &:= \{x \in G : xgx^{-1} = 1\} \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathrm{Tr}(R(g_1, g_2)) = \begin{cases} 0, & \text{si } C_{g_1} \neq C_{g_2} \\ |Z_g|, & \text{si } g = g_1 = g_2. \end{cases}$$

Alors, en posant $f = f_1 f_2 \in \mathbb{C}[G \times G]$, avec $f(g_1, g_2) = f_1(g_1) f_2(g_2)$:

$$\mathrm{Tr}(R(f)) = \sum_{(g_1,g_2)\in G\times G} f_1(g_1) f_2(g_2) \mathrm{Tr}(R(g_1, g_2)) = \sum_{C_g} |Z_g| f_1(C_g) f_2(C_g),$$

où $\phi(C_g) := \sum_{y \in C_g} \phi(y)$.

Cas des groupes finis (Côté spectral)

Cas des groupes finis (Côté spectral)

D'après un théorème de Maschke,

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\tau_1,\tau_2} V_{\tau_1} \otimes V_{\tau_2},$$

Cas des groupes finis (Côté spectral)

D'après un théorème de Maschke,

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\tau_1,\tau_2} V_{\tau_1} \otimes V_{\tau_2},$$

avec $R(f)_{|V_{\tau_1} \otimes V_{\tau_2}} = \tau_1(f_1) \otimes \tau_2(f_2)$, où $\tau_1(f_1)$ (resp. $\tau_2(f_2)$) end. diagonalisable de V_{τ_1} (resp. V_{τ_2}).

Cas des groupes finis (Côté spectral)

D'après un théorème de Maschke,

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\tau_1,\tau_2} V_{\tau_1} \otimes V_{\tau_2},$$

avec $R(f)_{|V_{\tau_1}\otimes V_{\tau_2}} = \tau_1(f_1) \otimes \tau_2(f_2)$, où $\tau_1(f_1)$ (resp. $\tau_2(f_2)$) end. diagonalisable de V_{τ_1} (resp. V_{τ_2}).

Alors :

$$\mathrm{Tr}(R(f)) = \sum_{\tau_1,\tau_2} \mathrm{Tr}(\tau_1(f_1))\mathrm{Tr}(\tau_2(f_2)).$$

Cas des groupes finis (Formule des traces)

Cas des groupes finis (Formule des traces)

Théorème (Frobenius)

$$\sum_{C_g} |Z_g| f_1(C_g) f_2(C_g) = \mathrm{Tr}(R(f)) = \sum_{\tau_1,\tau_2} \mathrm{Tr}(\tau_1(f_1))\mathrm{Tr}(\tau_2(f_2)).$$

Généralités

Généralités

De manière générale, comment définir la trace ?

Généralités

De manière générale, comment définir la trace ?

Un opérateur linéaire borné A sur un Hilbert V est dit de type trace si

$$\exists \{v_i\} \text{ base orthonormale de V}, \quad \mathrm{Tr}|\mathrm{A}| := \sum_{i=1}^{\infty} \langle (\mathrm{A}^*\mathrm{A})^{1/2} v_i, v_i \rangle \text{ soit fini.}$$

Généralités

De manière générale, comment définir la trace ?
Un opérateur linéaire borné A sur un Hilbert V est dit de type trace si

$$\exists \{v_i\} \text{ base orthonormale de V}, \quad \mathrm{Tr}|\mathrm{A}| := \sum_{i=1}^{\infty} \langle (\mathrm{A}^*\mathrm{A})^{1/2} v_i, v_i \rangle \text{ soit fini.}$$

Dans ce cas, $\sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathrm{A} v_i, v_i \rangle$ est absolument convergente et ne dépend pas du choix de la base $\{v_i\}$. On pose :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) := \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathrm{A} v_i, v_i \rangle.$$

Généralités

Généralités

Une représentation abstraite d'un groupe abstrait G est un homomorphisme de groupes

$$\pi : G \longmapsto GL(V_\pi),$$

où V_π est un espace vectoriel complexe.

Généralités

Une représentation abstraite d'un groupe abstrait G est un homomorphisme de groupes

$$\pi : \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{GL}(\mathrm{V}_\pi),$$

où V_π est un espace vectoriel complexe.
Si G est groupe top. loc. compact (e.g. groupe de Lie), alors (π, V_π) repr. continue si

$$\text{pour tout } v \in \mathrm{V}_\pi, \quad g \longmapsto \pi(g)v \text{ continue}$$

à valeurs dans un espace de Hilbert V_π.

Généralités

Une représentation abstraite d'un groupe abstrait G est un homomorphisme de groupes

$$\pi : \mathrm{G} \longmapsto \mathrm{GL}(\mathrm{V}_\pi),$$

où V_π est un espace vectoriel complexe.
Si G est groupe top. loc. compact (e.g. groupe de Lie), alors (π, V_π) repr. continue si

$$\text{pour tout } v \in \mathrm{V}_\pi, \quad g \longmapsto \pi(g)v \text{ continue}$$

à valeurs dans un espace de Hilbert V_π.

- unitaire : $\forall g \in \mathrm{G}$, $\pi(g)$ isométrie

Généralités

Une représentation abstraite d'un groupe abstrait G est un homomorphisme de groupes

$$\pi : G \longmapsto GL(V_\pi),$$

où V_π est un espace vectoriel complexe.
Si G est groupe top. loc. compact (e.g. groupe de Lie), alors (π, V_π) repr. continue si

$$\text{pour tout } v \in V_\pi, \quad g \longmapsto \pi(g)v \text{ continue}$$

à valeurs dans un espace de Hilbert V_π.

- unitaire : $\forall g \in G$, $\pi(g)$ isométrie
- irréductible : $\nexists W \subset V_\pi$ tel que $W \neq 0$, $W \neq V_\pi$ fermé, G-invariant

Généralités

Une représentation abstraite d'un groupe abstrait G est un homomorphisme de groupes

$$\pi : G \longmapsto GL(V_\pi),$$

où V_π est un espace vectoriel complexe.
Si G est groupe top. loc. compact (e.g. groupe de Lie), alors (π, V_π) repr. continue si

$$\text{pour tout } v \in V_\pi, \quad g \longmapsto \pi(g)v \text{ continue}$$

à valeurs dans un espace de Hilbert V_π.

- unitaire : $\forall g \in G$, $\pi(g)$ isométrie
- irréductible : $\nexists W \subset V_\pi$ tel que $W \neq 0$, $W \neq V_\pi$ fermé, G-invariant
- somme directe : complétion de somme directe algébrique

Généralités

Une représentation abstraite d'un groupe abstrait G est un homomorphisme de groupes

$$\pi : G \longmapsto GL(V_\pi),$$

où V_π est un espace vectoriel complexe.
Si G est groupe top. loc. compact (e.g. groupe de Lie), alors (π, V_π) repr. continue si

$$\text{pour tout } v \in V_\pi, \quad g \longmapsto \pi(g)v \text{ continue}$$

à valeurs dans un espace de Hilbert V_π.

- unitaire : $\forall g \in G$, $\pi(g)$ isométrie
- irréductible : $\nexists W \subset V_\pi$ tel que $W \neq 0$, $W \neq V_\pi$ fermé, G-invariant
- somme directe : complétion de somme directe algébrique
- équivalence : équivalence topologique

Généralités

Une représentation abstraite d'un groupe abstrait G est un homomorphisme de groupes

$$\pi : G \longmapsto GL(V_\pi),$$

où V_π est un espace vectoriel complexe.
Si G est groupe top. loc. compact (e.g. groupe de Lie), alors (π, V_π) repr. continue si

$$\text{pour tout } v \in V_\pi, \quad g \longmapsto \pi(g)v \text{ continue}$$

à valeurs dans un espace de Hilbert V_π.

- unitaire : $\forall g \in G$, $\pi(g)$ isométrie
- irréductible : $\nexists W \subset V_\pi$ tel que $W \neq 0$, $W \neq V_\pi$ fermé, G-invariant
- somme directe : complétion de somme directe algébrique
- équivalence : équivalence topologique

Notons

$$\Pi(G) := \text{classes d'équiv. des repr. unitaires irréd. de } G.$$

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Groupe additif $\mathbb{R}$, espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$. Considérons la repr. de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$:

$$(\mathrm{R}(y)\phi)(x) := \phi(x+y), \quad y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}, \phi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}).$$

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Groupe additif $\mathbb{R}$, espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$. Considérons la repr. de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$:

$$(\mathrm{R}(y)\phi)(x) := \phi(x+y), \quad y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}, \phi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}).$$

$\mathrm{R}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, n'est en général pas de type trace. Par contre, si $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{R}(f) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{R}(y)\, dy$$

l'est.

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Groupe additif $\mathbb{R}$, espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$. Considérons la repr. de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$:

$$(\mathrm{R}(y)\phi)(x) := \phi(x+y), \quad y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}, \phi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}).$$

$\mathrm{R}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, n'est en général pas de type trace. Par contre, si $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{R}(f) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{R}(y)\,dy$$

l'est.

En fait $\mathrm{R}(f)$ est un opérateur à noyau :

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Groupe additif $\mathbb{R}$, espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$. Considérons la repr. de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$:

$$(\mathrm{R}(y)\phi)(x) := \phi(x+y), \quad y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}, \phi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}).$$

$\mathrm{R}(y)$, $y \in \mathbb{R}$, n'est en général pas de type trace. Par contre, si $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{R}(f) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{R}(y)\,dy$$

l'est.
En fait $\mathrm{R}(f)$ est un opérateur à noyau :

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}(f)\phi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f(y)\mathrm{R}(y)\phi)(x)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(x+y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,y)\phi(y)\,dy,\end{aligned}$$

où $\mathrm{K}(x,y) := \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(-x+\gamma+y)$.

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x, y)\phi(y)\, dy.$$

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,y)\phi(y)\,dy.$$

$\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ est homéomorphe au cercle, il est compact $\implies$ $\mathrm{R}(f)$ est de type trace et :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,x)\,dx.$$

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,y)\phi(y)\,dy.$$

$\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ est homéomorphe au cercle, il est compact $\implies$ $\mathrm{R}(f)$ est de type trace et :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,x)\,dx.$$

$\mathrm{K}(x,y) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(-x+\gamma+y)$, donc :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,x)\,dx = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(\gamma).$$

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,y)\phi(y)\,dy.$$

$\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ est homéomorphe au cercle, il est compact $\implies$ $\mathrm{R}(f)$ est de type trace et :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,x)\,dx.$$

$\mathrm{K}(x,y) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(-x+\gamma+y)$, donc :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} \mathrm{K}(x,x)\,dx = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(\gamma).$$

On peut aussi calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f))$ à partir de la définition :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \mathrm{R}(f)w_n, w_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n),$$

où $\{w_n := e^{i2n\pi x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, base orthonormale de $\mathrm{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$ pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ standard, et $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f.

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Un autre exemple : la formule de sommation de Poisson

Théorème (formule de sommation de Poisson)

Soit $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R})$. Alors

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(\gamma) = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

La formule des traces de Selberg

La formule des traces de Selberg

- Généralisation de la formule de sommation de Poisson.

La formule des traces de Selberg

- Généralisation de la formule de sommation de Poisson.
- $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré, Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (e.g. $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$).

La formule des traces de Selberg

- Généralisation de la formule de sommation de Poisson.
- $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré, Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (e.g. $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$).
- Δ Laplace-Beltrami sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ($\simeq$ surface de Riemann non compacte), i.e.

$$\Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

La formule des traces de Selberg

- Généralisation de la formule de sommation de Poisson.
- $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré, Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (e.g. $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$).
- Δ Laplace-Beltrami sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ($\simeq$ surface de Riemann non compacte), i.e.

$$\Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

- Formule des traces de Selberg :

  Relation entre

  longueurs des géodésiques sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *et spectre discret de* Δ

La formule des traces de Selberg

- Généralisation de la formule de sommation de Poisson.
- $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré, Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (e.g. $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$).
- Δ Laplace-Beltrami sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ($\simeq$ surface de Riemann non compacte), i.e.

$$\Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

- Formule des traces de Selberg :

  Relation entre

  longueurs des géodésiques sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *et spectre discret de* Δ

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{vol}(\Gamma\setminus\mathbb{H})\,t \quad \sim \quad |\{\tfrac{1}{4}-\lambda^2 \leq t : \lambda \text{ v. pr. de } \Delta \text{ ds le sp. discret}\}|$$

La formule des traces de Selberg

- Généralisation de la formule de sommation de Poisson.
- $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré, Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (e.g. $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$).
- Δ Laplace-Beltrami sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ($\simeq$ surface de Riemann non compacte), i.e.

$$\Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

- Formule des traces de Selberg :

  Relation entre

  longueurs des géodésiques sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *et spectre discret de* Δ

  $$\frac{\pi}{2}\mathrm{vol}(\Gamma\setminus\mathbb{H})\,t \quad \sim \quad |\{\tfrac{1}{4}-\lambda^2 \leq t : \lambda \text{ v. pr. de } \Delta \text{ ds le sp. discret}\}|$$

- Traces des puissances de Δ $\sim$ fonctions zêta

  géodésiques $\sim$ nombres premiers

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Formule des traces d'Arthur-Selberg

H groupe top. loc. compact, unimodulaire, et Γ un sous-groupe fermé de H.
Supposons Γ discret, co-compact.

Formule des traces d'Arthur-Selberg

H groupe top. loc. compact, unimodulaire, et Γ un sous-groupe fermé de H.
Supposons Γ discret, co-compact.
$(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}))$ la repr. de H déf. par :

$$(\mathrm{R}(y)\phi)(x) := \phi(xy), \quad y \in \mathrm{H}, x \in \Gamma\backslash\mathrm{H}, \phi \in \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}).$$

Formule des traces d'Arthur-Selberg

H groupe top. loc. compact, unimodulaire, et Γ un sous-groupe fermé de H.
Supposons Γ discret, co-compact.
$(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}))$ la repr. de H déf. par :

$$(\mathrm{R}(y)\phi)(x) := \phi(xy), \quad y \in \mathrm{H}, x \in \Gamma\backslash\mathrm{H}, \phi \in \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}).$$

Pour $f \in \mathrm{C}_c(\mathrm{H})$, $\mathrm{R}(f)$ déf. par :

$$\mathrm{R}(f) = \int_{\mathrm{G}} f(y)\mathrm{R}(y)\,dy.$$

Formule des traces d'Arthur-Selberg

H groupe top. loc. compact, unimodulaire, et Γ un sous-groupe fermé de H.
Supposons Γ discret, co-compact.
$(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}))$ la repr. de H déf. par :

$$(\mathrm{R}(y)\phi)(x) := \phi(xy), \quad y \in \mathrm{H}, x \in \Gamma\backslash\mathrm{H}, \phi \in \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}).$$

Pour $f \in \mathrm{C}_c(\mathrm{H})$, $\mathrm{R}(f)$ déf. par :

$$\mathrm{R}(f) = \int_{\mathrm{G}} f(y)\mathrm{R}(y)\, dy.$$

Alors $\mathrm{R}(f)$ est un opérateur à noyau :

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\Gamma\backslash\mathrm{H}} \mathrm{K}(x,y)\phi(y)\, dy,$$

avec $\mathrm{K}(x,y) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$.

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Comme $\Gamma\backslash\mathrm{H}$ est compact, $\mathrm{R}(f)$ est encore un opérateur de type trace et :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\Gamma\backslash\mathrm{H}} \mathrm{K}(x,x)\,dx.$$

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Comme $\Gamma\backslash H$ est compact, $R(f)$ est encore un opérateur de type trace et :

$$\mathrm{Tr}(R(f)) = \int_{\Gamma\backslash H} K(x,x)\, dx.$$

Notons $\{\Gamma\}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans Γ et, pour $\gamma \in \Gamma$ et $\Omega \subset H$,

$$\Omega_\gamma := \{h \in \Omega : h\gamma h^{-1} = \gamma\}.$$

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Comme $\Gamma\backslash\mathrm{H}$ est compact, $\mathrm{R}(f)$ est encore un opérateur de type trace et :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\Gamma\backslash\mathrm{H}} \mathrm{K}(x,x)\,dx.$$

Notons $\{\Gamma\}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison dans Γ et, pour $\gamma \in \Gamma$ et $\Omega \subset \mathrm{H}$,

$$\Omega_\gamma := \{h \in \Omega : h\gamma h^{-1} = \gamma\}.$$

On a alors

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\Gamma\backslash\mathrm{H}} \mathrm{K}(x,x)\,dx = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\gamma)\, f_{\mathrm{H}}(\gamma),$$

avec $a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\gamma) := vol(\Gamma_\gamma\backslash\mathrm{H}_\gamma)$ et $f_{\mathrm{H}}(\gamma) := \int_{\mathrm{H}_\gamma\backslash\mathrm{H}} f(x^{-1}\gamma x)\,dx$.

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Formule des traces d'Arthur-Selberg

On peut aussi calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f))$ à partir de la définition.

Formule des traces d'Arthur-Selberg

On peut aussi calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f))$ à partir de la définition.
On a, comme $\Gamma\backslash\mathrm{H}$ compact,

$$\mathrm{R} = \bigoplus_{\pi\in\Pi(\mathrm{H})} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi)\,\pi,$$

où $a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi)$ est la multiplicité de π dans R.

Formule des traces d'Arthur-Selberg

On peut aussi calculer $\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f))$ à partir de la définition.
On a, comme $\Gamma\backslash\mathrm{H}$ compact,

$$\mathrm{R} = \bigoplus_{\pi\in\Pi(\mathrm{H})} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi)\,\pi,$$

où $a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi)$ est la multiplicité de π dans R.
Alors

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathrm{H})} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi)\, f_{\mathrm{H}}(\pi),$$

avec $f_{\mathrm{H}}(\pi) := \mathrm{Tr}(\pi(f))$.

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Théorème (Arthur-Selberg)

Soit H, Γ comme ci-dessus, $f \in \mathrm{C}_c(\mathrm{H})$ et $(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}))$ la repr. rég. droite de H. Alors

$$\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\gamma)\, f_{\mathrm{H}}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathrm{H})} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi)\, f_{\mathrm{H}}(\pi).$$

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Théorème (Arthur-Selberg)

Soit H, Γ comme ci-dessus, $f \in \mathrm{C}_c(\mathrm{H})$ et $(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}))$ la repr. rég. droite de H. Alors

$$\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\gamma) f_{\mathrm{H}}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathrm{H})} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi) f_{\mathrm{H}}(\pi).$$

Problème

Que se passe-t-il si le quotient n'est plus compact ?

Formule des traces d'Arthur-Selberg

Théorème (Arthur-Selberg)

Soit H, Γ comme ci-dessus, $f \in \mathrm{C}_c(\mathrm{H})$ et $(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}))$ la repr. rég. droite de H. Alors

$$\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\gamma) f_{\mathrm{H}}(\gamma) = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathrm{H})} a_\Gamma^{\mathrm{H}}(\pi) f_{\mathrm{H}}(\pi).$$

Problème

Que se passe-t-il si le quotient n'est plus compact ?

En général, l'opérateur $\mathrm{R}(f)$ n'est plus de type trace, et le noyau K n'est pas intégrable sur la diagonale.

Exemple simple. $\mathrm{H} = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{0\}$.

Pourquoi et comment généraliser ?

Pourquoi et comment généraliser ?

- **Programme de Langlands.**

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{repr-s du groupe} \\ \text{de Galois} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{repr-s automorphes des} \\ \text{groupes algébriques réductifs} \end{array} \right\}$$

Pourquoi et comment généraliser ?

- **Programme de Langlands.**

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{repr-s du groupe} \\ \text{de Galois} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{repr-s automorphes des} \\ \text{groupes algébriques réductifs} \end{array} \right\}$$

- **Formule des traces (globale).**

pour H un groupe algébrique réductif (non compact), Γ un sous-groupe discret de G, e.g. $\mathrm{H} = \mathrm{GL}(n)$, Γ un réseau.

Pourquoi et comment généraliser ?

- **Programme de Langlands.**

$$\left\{\begin{array}{c}\text{repr-s du groupe}\\ \text{de Galois}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{repr-s automorphes des}\\ \text{groupes algébriques réductifs}\end{array}\right\}$$

- **Formule des traces (globale).**

  pour H un groupe algébrique réductif (non compact), Γ un sous-groupe discret de G, e.g. $\mathrm{H} = \mathrm{GL}(n)$, Γ un réseau.

- **Formule des traces (locale).**

  on prend $\mathrm{H}(\mathrm{F})$ le groupe des F-points de H avec F un corps local, e.g. $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$.

Formule des traces locale d'Arthur

Formule des traces locale d'Arthur

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ et $\Gamma = \mathrm{Diag}(\mathrm{G})$.

Formule des traces locale d'Arthur

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ et $\Gamma = \mathrm{Diag}(\mathrm{G})$.

On peut identifier $\Gamma \backslash \mathrm{H}$ à G.

Formule des traces locale d'Arthur

Soit $G = SO(n)$ ou $GL(n, \mathbb{R})$, $H = G \times G$ et $\Gamma = \mathrm{Diag}(G)$.

On peut identifier $\Gamma \backslash H$ à G.

$(R, L^2(G))$ la repr. régulière de $G \times G$, i.e.

$$(R(x, y)f)(g) := f(x^{-1} g y).$$

Formule des traces locale d'Arthur

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ et $\Gamma = \mathrm{Diag}(\mathrm{G})$.

On peut identifier $\Gamma \backslash \mathrm{H}$ à G.

$(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$ la repr. régulière de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, i.e.

$$(\mathrm{R}(x, y) f)(g) := f(x^{-1} g y).$$

Soit $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{H})$ de la forme $f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathrm{G}$.

On définit

$$\mathrm{R}(f) = \int_{\mathrm{G}} \int_{\mathrm{G}} f_1(y_1) f_2(y_2) \mathrm{R}(y_1, y_2)\, d y_1 d y_2.$$

Formule des traces locale d'Arthur

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ et $\Gamma = \mathrm{Diag}(\mathrm{G})$.
On peut identifier $\Gamma \backslash \mathrm{H}$ à G.
$(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$ la repr. régulière de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, i.e.

$$(\mathrm{R}(x, y) f)(g) := f(x^{-1} g y).$$

Soit $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{H})$ de la forme $f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathrm{G}$.
On a, pour $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$,

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x, y) \phi(y) \, dy,$$

Formule des traces locale d'Arthur

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ et $\Gamma = \mathrm{Diag}(\mathrm{G})$.
On peut identifier $\Gamma \backslash \mathrm{H}$ à G.
$(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$ la repr. régulière de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, i.e.

$$(\mathrm{R}(x, y) f)(g) := f(x^{-1} g y).$$

Soit $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{H})$ de la forme $f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathrm{G}$.
On a, pour $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$,

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x, y) \phi(y) \, dy,$$

avec

$$\mathrm{K}(x, y) := \int_{\mathrm{G}} f_1(xu) f_2(uy) \, du = \int_{\mathrm{G}} f_1(u) f_2(x^{-1} u y) \, du.$$

Formule des traces locale d'Arthur

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ et $\Gamma = \mathrm{Diag}(\mathrm{G})$.
On peut identifier $\Gamma \backslash \mathrm{H}$ à G.
$(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$ la repr. régulière de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, i.e.

$$(\mathrm{R}(x,y)f)(g) := f(x^{-1} g y).$$

Soit $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{H})$ de la forme $f(y_1, y_2) = f_1(y_1) f_2(y_2), \quad y_1, y_2 \in \mathrm{G}$.
On a, pour $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$,

$$(\mathrm{R}(f)\phi)(x) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x,y)\phi(y)\, dy,$$

avec

$$\mathrm{K}(x,y) := \int_{\mathrm{G}} f_1(xu) f_2(uy)\, du = \int_{\mathrm{G}} f_1(u) f_2(x^{-1}uy)\, du.$$

Obtenir une formule des traces locale revient à étudier :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x,x)\, dx.$$

Formule des traces locale d'Arthur : le cas compact

Formule des traces locale d'Arthur : le cas compact

Supposons $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (matrices anti-symétriques).

Formule des traces locale d'Arthur : le cas compact

Supposons $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (matrices anti-symétriques).
On va utiliser deux formules :

Formule des traces locale d'Arthur : le cas compact

Supposons $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (matrices anti-symétriques).
On va utiliser deux formules :

- côté géométrique

Formule des traces locale d'Arthur : le cas compact

Supposons $G = SO(n)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (matrices anti-symétriques).

On va utiliser deux formules :

- côté géométrique $\longleftarrow$ Formule d'intégration de Weyl

Formule des traces locale d'Arthur : le cas compact

Supposons $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (matrices anti-symétriques).

On va utiliser deux formules :

- côté géométrique $\longleftarrow$ Formule d'intégration de Weyl
- côté spectral

Formule des traces locale d'Arthur : le cas compact

Supposons $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$ et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (matrices anti-symétriques).
On va utiliser deux formules :

- côté géométrique $\longleftarrow$ Formule d'intégration de Weyl
- côté spectral $\longleftarrow$ Formule de Plancherel

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour $\gamma \in G$, notons $\mathfrak{g}_\gamma$ le centralisateur de γ dans $\mathfrak{g}$, i.e.

$$\mathfrak{g}_\gamma := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(\gamma)X = X\},$$

où $\mathrm{ad}(\gamma)X := \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\gamma e^{tX}\gamma^{-1}\right)$ (repr. adjointe de G sur $\mathfrak{g}$).

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour $\gamma \in G$, notons $\mathfrak{g}_\gamma$ le centralisateur de γ dans $\mathfrak{g}$, i.e.

$$\mathfrak{g}_\gamma := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(\gamma)X = X\},$$

où $\mathrm{ad}(\gamma)X := \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\gamma e^{tX}\gamma^{-1}\right)$ (repr. adjointe de G sur $\mathfrak{g}$).
Soit T un tore maximal de G et $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl associé, e.g.

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour $\gamma \in G$, notons $\mathfrak{g}_\gamma$ le centralisateur de γ dans $\mathfrak{g}$, i.e.

$$\mathfrak{g}_\gamma := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(\gamma)X = X\},$$

où $\mathrm{ad}(\gamma)X := \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\gamma e^{tX}\gamma^{-1}\right)$ (repr. adjointe de G sur $\mathfrak{g}$).
Soit T un tore maximal de G et $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl associé, e.g.

si $n = 3$

$$T = \{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

$$W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour $\gamma \in G$, notons $\mathfrak{g}_\gamma$ le centralisateur de γ dans $\mathfrak{g}$, i.e.

$$\mathfrak{g}_\gamma := \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(\gamma)X = X\},$$

où $\mathrm{ad}(\gamma)X := \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\gamma e^{tX}\gamma^{-1}\right)$ (repr. adjointe de G sur $\mathfrak{g}$).
Soit T un tore maximal de G et $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl associé, e.g.

si $n = 3$

$$T = \left\{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

si $n = 4$

$$T = \left\{\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}\right\}$$

$$W = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes S_2$$

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour h fonction continue sur G, on a (formule d'intégration de Weyl)

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour h fonction continue sur G, on a (formule d'intégration de Weyl)

$$\int_{\mathrm{G}} h(x)\,dx = \frac{1}{|\mathrm{W}|}\int_{\mathrm{T}} |\mathrm{D}(\gamma)| \left(\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} h(v^{-1}\gamma v)\,dv\right) d\gamma,$$

où $\mathrm{D}(\gamma) := \det(1-\mathrm{ad}(\gamma))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma}$, discriminant de Weyl.

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour h fonction continue sur G, on a (formule d'intégration de Weyl)

$$\int_{\mathrm{G}} h(x)\,dx = \frac{1}{|\mathrm{W}|}\int_{\mathrm{T}} |\mathrm{D}(\gamma)| \left(\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} h(v^{-1}\gamma v)\,dv\right) d\gamma,$$

où $\mathrm{D}(\gamma) := \det(1-\mathrm{ad}(\gamma))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma}$, discriminant de Weyl.

Application :

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour h fonction continue sur G, on a (formule d'intégration de Weyl)

$$\int_{\mathrm{G}} h(x)\,dx = \frac{1}{|\mathrm{W}|}\int_{\mathrm{T}} |\mathrm{D}(\gamma)| \left(\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} h(v^{-1}\gamma v)\,dv\right) d\gamma,$$

où $\mathrm{D}(\gamma) := \det(1-\mathrm{ad}(\gamma))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma}$, discriminant de Weyl.

Application :

Posons

$$\mathrm{J}(\gamma, f) := |\mathrm{D}(\gamma)| \int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}}\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} f_1(x_1^{-1}\gamma x_1)\, f_2(x_2^{-1}\gamma x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

(Cas G fini : $|\mathrm{Z}_g| \sum_{x\in\mathrm{C}_g} f_1(x) \sum_{y\in\mathrm{C}_g} f_2(y)$)

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour h fonction continue sur G, on a (formule d'intégration de Weyl)

$$\int_{\mathrm{G}} h(x)\, dx = \frac{1}{|\mathrm{W}|} \int_{\mathrm{T}} |\mathrm{D}(\gamma)| \left(\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} h(v^{-1}\gamma v)\, dv \right) d\gamma,$$

où $\mathrm{D}(\gamma) := \det(1 - \mathrm{ad}(\gamma))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma}$, discriminant de Weyl.

Application :

Posons

$$\mathrm{J}(\gamma, f) := |\mathrm{D}(\gamma)| \int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} \int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} f_1(x_1^{-1}\gamma x_1) f_2(x_2^{-1}\gamma x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Alors, d'après la formule d'intégration de Weyl,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x, x)\, dx = \frac{1}{|\mathrm{W}|} \int_{\mathrm{T}} \mathrm{J}(\gamma, f)\, d\gamma.$$

Le cas compact : formule d'intégration de Weyl

Pour h fonction continue sur G, on a (formule d'intégration de Weyl)

$$\int_{\mathrm{G}} h(x)\,dx = \frac{1}{|\mathrm{W}|}\int_{\mathrm{T}} |\mathrm{D}(\gamma)| \left(\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} h(v^{-1}\gamma v)\,dv\right) d\gamma,$$

où $\mathrm{D}(\gamma) := \det(1-\mathrm{ad}(\gamma))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma}$, discriminant de Weyl.

Application :

Posons

$$\mathrm{J}(\gamma, f) := |\mathrm{D}(\gamma)| \int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}}\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} f_1(x_1^{-1}\gamma x_1) f_2(x_2^{-1}\gamma x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Alors, d'après la formule d'intégration de Weyl,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x,x)\,dx = \frac{1}{|\mathrm{W}|}\int_{\mathrm{T}} \mathrm{J}(\gamma, f)\,d\gamma.$$

(Cas G fini : $\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{\mathrm{C}_g} |\mathrm{Z}_g| \sum_{x\in \mathrm{C}_g} f_1(x) \sum_{y\in\mathrm{C}_g} f_2(y)$)

Le cas compact : formule de Plancherel

Le cas compact : formule de Plancherel

R_0 repr. régulière droite de G sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, i.e.

$$(\mathrm{R}_0(x)\phi)(y) := \phi(yx).$$

Le cas compact : formule de Plancherel

R_0 repr. régulière droite de G sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, i.e.

$$(\mathrm{R}_0(x)\phi)(y) := \phi(yx).$$

Théorème de Peter-Weyl

$$\mathrm{R}_0 = \bigoplus_{\pi\in\Pi(\mathrm{G})} n_\pi\,\pi,$$

avec n_π multiplicité de π dans R_0.

Le cas compact : formule de Plancherel

R_0 repr. régulière droite de G sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, i.e.

$$(\mathrm{R}_0(x)\phi)(y) := \phi(yx).$$

Théorème de Peter-Weyl

$$\mathrm{R}_0 = \bigoplus_{\pi\in\Pi(\mathrm{G})} n_\pi \pi,$$

avec n_π multiplicité de π dans R_0.

Il en résulte la formule de Plancherel : pour $\phi \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$,

$$\phi(1) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathrm{G})} n_\pi \operatorname{Tr}(\pi(\phi)),$$

i.e. la décomposition de ϕ dans une certaine base orthonormale de $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$.

Le cas compact : formule de Plancherel

Le cas compact : formule de Plancherel

Posons

$$h(v) := \int_{\mathrm{G}} f_1(u) f_2(x^{-1} v u y)\, du,$$

qui est une fonction sur G dépendant de x et y et telle que $h(1) = \mathrm{K}(x, y)$.

Le cas compact : formule de Plancherel

Posons

$$h(v) := \int_{\mathrm{G}} f_1(u) f_2(x^{-1} v u y)\, du,$$

qui est une fonction sur G dépendant de x et y et telle que $h(1) = \mathrm{K}(x, y)$.
Appliquons la formule de Plancherel à h :

Le cas compact : formule de Plancherel

Posons

$$h(v) := \int_{\mathrm{G}} f_1(u) f_2(x^{-1} v u y)\, du,$$

qui est une fonction sur G dépendant de x et y et telle que $h(1) = \mathrm{K}(x, y)$.
Appliquons la formule de Plancherel à h :

$$\mathrm{K}(x, y) = h(1) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathrm{G})} n_\pi \operatorname{Tr}\left(\pi(x)\pi(f_2)\pi(y^{-1})\pi(f_1^\vee)\right),$$

avec $f_1^\vee(x) := f_1(x^{-1})$.

Le cas compact : formule de Plancherel

Posons

$$h(v) := \int_{\mathrm{G}} f_1(u) f_2(x^{-1} v u y)\, du,$$

qui est une fonction sur G dépendant de x et y et telle que $h(1) = \mathrm{K}(x, y)$.
Appliquons la formule de Plancherel à h :

$$\mathrm{K}(x, y) = h(1) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathrm{G})} n_\pi \operatorname{Tr}\left(\pi(x)\pi(f_2)\pi(y^{-1})\pi(f_1^\vee)\right),$$

avec $f_1^\vee(x) := f_1(x^{-1})$.
La trace de $\mathrm{R}(f)$ s'écrit alors :

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{R}(f)) \left(= \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x, x)\, dx\right) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathrm{G})} n_\pi \operatorname{Tr}\left(\left(\int_{\mathrm{G}} \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx\right) \circ \pi(f_1^\vee)\right).$$

Le cas compact : formule de Plancherel

Posons

$$h(v) := \int_{\mathrm{G}} f_1(u) f_2(x^{-1} v u y)\, du,$$

qui est une fonction sur G dépendant de x et y et telle que $h(1) = \mathrm{K}(x, y)$.
Appliquons la formule de Plancherel à h :

$$\mathrm{K}(x,y) = h(1) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathrm{G})} n_\pi \operatorname{Tr}\left(\pi(x)\pi(f_2)\pi(y^{-1})\pi(f_1^\vee)\right),$$

avec $f_1^\vee(x) := f_1(x^{-1})$.
La trace de $\mathrm{R}(f)$ s'écrit alors :

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{R}(f)) \left(= \int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(x,x)\, dx\right) = \sum_{\pi \in \Pi(\mathrm{G})} n_\pi \operatorname{Tr}\left((\int_{\mathrm{G}} \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx) \circ \pi(f_1^\vee)\right).$$

Fixons $\pi \in \Pi(\mathrm{G})$ et posons

$$\mathrm{A}_\pi := \int_{\mathrm{G}} \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx.$$

Le cas compact : formule de Plancherel

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

i.e. $A_\pi = \lambda_\pi \mathrm{id}$, avec λ_π donné par :

$$\lambda_\pi = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi}.$$

On en déduit que

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

i.e. $A_\pi = \lambda_\pi \mathrm{id}$, avec λ_π donné par :

$$\lambda_\pi = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\int_G \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx \right) \circ \pi(f_1^\vee) \right) = \mathrm{Tr}(A_\pi \circ \pi(f_1^\vee))$$

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

i.e. $A_\pi = \lambda_\pi \mathrm{id}$, avec λ_π donné par :

$$\lambda_\pi = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\int_G \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx \right) \circ \pi(f_1^\vee) \right) = \mathrm{Tr}(\lambda_\pi \pi(f_1^\vee))$$

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

i.e. $A_\pi = \lambda_\pi \mathrm{id}$, avec λ_π donné par :

$$\lambda_\pi = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\left((\int_G \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx) \circ \pi(f_1^\vee) \right) = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi} \mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee)).$$

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

i.e. $A_\pi = \lambda_\pi \mathrm{id}$, avec λ_π donné par :

$$\lambda_\pi = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\left((\int_G \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx) \circ \pi(f_1^\vee) \right) = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi} \mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee)).$$

Posons $J(\pi, f) := \mathrm{Tr}(\pi(f_2))\mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee))$. (Cas G fini : $\mathrm{Tr}(\tau_1(f_1))\mathrm{Tr}(\tau_2(f_2))$)

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi,\pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

i.e. $A_\pi = \lambda_\pi \mathrm{id}$, avec λ_π donné par :

$$\lambda_\pi = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\int_G \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\,dx\right) \circ \pi(f_1^\vee) \right) = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi} \mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee)).$$

Posons $J(\pi,f) := \mathrm{Tr}(\pi(f_2))\mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee))$. Alors

$$\mathrm{Tr}(R(f)) = \sum_{\pi \in \Pi(G)} J(\pi,f)$$

Le cas compact : formule de Plancherel

A_π opérateur qui commute à $\pi(g)$, $g \in G$.

Lemme de Schur

Si π irréductible,

$$\mathrm{Hom}_G(\pi,\pi) = \mathbb{C}\mathrm{id}.$$

i.e. $A_\pi = \lambda_\pi \mathrm{id}$, avec λ_π donné par :

$$\lambda_\pi = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\int_G \pi(x)\pi(f_2)\pi(x^{-1})\, dx \right) \circ \pi(f_1^\vee) \right) = \frac{\mathrm{Tr}(\pi(f_2))}{n_\pi} \mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee)).$$

Posons $J(\pi, f) := \mathrm{Tr}(\pi(f_2))\mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee))$. Alors

$$\mathrm{Tr}(R(f)) = \sum_{\pi \in \Pi(G)} J(\pi, f)$$

(Cas G fini : $\quad \mathrm{Tr}(R(f)) = \sum_{\tau_1,\tau_2} \mathrm{Tr}(\tau_1(f_1))\mathrm{Tr}(\tau_2(f_2))$)

Le cas compact : formule des traces locale

Le cas compact : formule des traces locale

Théorème (Arthur)

Si G est compact (e.g. $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$), la formule des traces locale est :

$$\frac{1}{|\mathrm{W}|}\int_{\mathrm{T}} \mathrm{J}(\gamma, f)\, d\gamma = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathrm{G})} \mathrm{J}(\pi, f),$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(\gamma, f) &= |\mathrm{D}(\gamma)| \int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}}\int_{\mathrm{T}\backslash\mathrm{G}} f_1(x_1^{-1}\gamma x_1) f_2(x_2^{-1}\gamma x_2)\, dx_1\, dx_2. \\ \mathrm{J}(\pi, f) &= \mathrm{Tr}(\pi(f_2))\mathrm{Tr}(\pi(f_1^{\vee})). \end{aligned}$$

Le cas compact : formule des traces locale

Théorème (Arthur)

Si G est compact (e.g. $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(n)$), la formule des traces locale est :

$$\frac{1}{|\mathrm{W}|}\int_{\mathrm{T}} \mathrm{J}(\gamma, f)\, d\gamma = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}(f)) = \sum_{\pi\in\Pi(\mathrm{G})} \mathrm{J}(\pi, f),$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(\gamma, f) &= |\mathrm{D}(\gamma)| \int_{\mathrm{T}\backslash \mathrm{G}} \int_{\mathrm{T}\backslash \mathrm{G}} f_1(x_1^{-1}\gamma x_1) f_2(x_2^{-1}\gamma x_2)\, dx_1\, dx_2. \\ \mathrm{J}(\pi, f) &= \mathrm{Tr}(\pi(f_2))\mathrm{Tr}(\pi(f_1^\vee)). \end{aligned}$$

Rappel : G fini

$$\sum_{\mathrm{C}_g} |\mathrm{Z}_g| \sum_{x\in \mathrm{C}_g} f_1(x) \sum_{y\in \mathrm{C}_g} f_2(y) = \sum_{\tau_1,\tau_2} \mathrm{Tr}(\tau_1(f_1))\mathrm{Tr}(\tau_2(f_2)).$$

Formule des traces locale d'Arthur

Formule des traces locale d'Arthur

Si $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\Gamma\backslash\mathrm{H} = \mathrm{G}$ n'est plus compact.

Formule des traces locale d'Arthur

Si $G = GL(n,\mathbb{R})$, $\Gamma \backslash H = G$ n'est plus compact.

Formule des traces locale pour $(R, L^2(G))$

Côté géométrique

Côté spectral

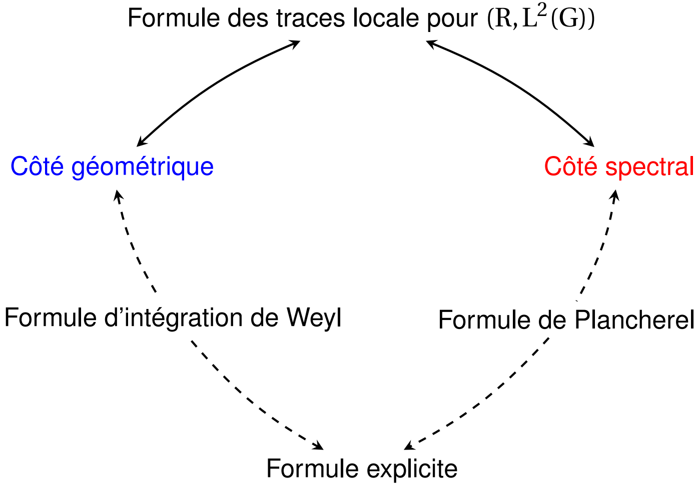
????

????

Formule explicite

Formule des traces locale d'Arthur

Si $G = GL(n, \mathbb{R})$, $\Gamma \backslash H = G$ n'est plus compact.



Formule des traces locale d'Arthur

Si $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\Gamma \backslash \mathrm{H} = \mathrm{G}$ n'est plus compact.

Formule des traces locale pour $(\mathrm{R}, \mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$

Côté géométrique

Côté spectral

Problèmes de divergence

Formule d'intégration de Weyl

Formule de Plancherel

Formule explicite

Formule des traces locale d'Arthur

Si $G = GL(n, \mathbb{R})$, $\Gamma \backslash H = G$ n'est plus compact.

Formule des traces locale pour $(R, L^2(G))$

Côté géométrique

Côté spectral

Problèmes de divergence

$\leftarrow$ **Troncation d'Arthur**

Formule d'intégration de Weyl

Formule de Plancherel

Formule explicite