

### Feuille 4 : fractions rationnelles – Décomposition en éléments simples

**Exercice 1.** — Voici une fraction rationnelle appartenant à  $\mathbb{R}(X)$  :

$$F = \frac{X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1}{3X^3 + X^2 - 4X - 2}.$$

- (a) Déterminez le représentant irréductible de  $F$ .
- (b) Quel est le domaine de définition de la fonction rationnelle définie par cette fraction ?

**Exercice 2.** — Vérifiez les égalités suivantes dans  $\mathbb{R}(X)$  :

$$\begin{aligned}\frac{X^3 + 2}{(X + 1)^2} &= X - 2 + \frac{3}{X + 1} + \frac{1}{(X + 1)^2} \\ \frac{X + 1}{X(X - 2)^2} &= \frac{1}{4X} - \frac{1}{4(X - 2)} + \frac{3}{2(X - 2)^2}.\end{aligned}$$

Quelles égalités dans  $\mathbb{R}$  pouvez-vous en déduire en prenant les fonctions associées ?

**Exercice 3.** — Décomposez en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{X + 7}{2X + 1}, \frac{X^2 + 3}{X + 3}, \frac{X^2 + 3}{X^2 - 4}, \frac{3X - 9}{X^2 - 2X - 35}, \frac{X^3 + 3}{X^2 - 1}, \\ \frac{X^2 + 2X + 3}{X^2 + 3X + 1}, \frac{X^3 - 4X^2 + 2}{X^2 - 4X + 3}, \frac{1}{X^3 - 2X^2 - 3X}, \\ \frac{X^4 - X^2 + X - 10}{X^3 - 5X^2 + 6X}.\end{aligned}$$

**Exercice 4.** — Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{X^n}{X - 1} \quad (n \geq 1).$$

**Exercice 5.** — Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{X^5 + 3}{X^2(X - 3)^2(X^2 + 1)} \in \mathbb{R}(X).$$

**Exercice 6.** — Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

- (a)  $\frac{1}{X^2(X + 3)}$  ;

(b)  $\frac{3X^2 - 1}{X^2(X + 3)}$  ;

(c)  $\frac{X^4 + 2X^3 + 1}{X^2(X + 3)}$ .

**Exercice 7.** — Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(X + 1)(X + 2)(X + 3)(X + 4)}.$$

**Exercice 8.** — Décomposez en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ , puis sur  $\mathbb{C}$ , la fraction rationnelle :

$$\frac{8}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)^2}.$$

**Exercice 9.** — Décomposez en éléments simples les fractions suivantes :

(a)  $\frac{1}{(X - 1)^3(X + 4)^2}$ .

(b)  $\frac{X^7}{(X^2 + 2)^3}$ .

**Exercice 10.** — Décomposez en éléments simples les fractions suivantes :

(a)  $\frac{1}{X^3 - 1}$  sur  $\mathbb{C}$ .

(b)  $\frac{1}{X^4 + 1}$  sur  $\mathbb{R}$ .