Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur :
Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

**Algèbre linéaire**

**Feuille de TD n° 1 : Matrices**

# 1 Connaissance du cours

**Exercice 1.1**

(a). Donnez un exemple de matrice triangulaire.

(b). Donner un exemple de matrice échelonnée.

(c). Montrez que la transposée d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.

(d). Montrez que le produit de deux matrices triangulaires est triangulaire.

(e). Montrez que toute matrice inversible est de rang maximum.

(f). Est-ce qu'une matrice échelonnée est inversible ? Si oui, pourquoi ? Si non, donnez un contre-exemple.

(g). Montrez que l'inverse de la transposée d'une matrice inversible est égale à la transposée de son inverse.

**Exercice 1.2** De tête, écrivez les définitions :

(a). du rang d'une matrice.

(b). d'une matrice inversible.

(c). d'une matrice diagonale.

Comparez le résultat avec la définition du cours.

**Exercice 1.3** Soit $A, B$ des matrices carrées inversibles de même taille. Démontrez que, l'inverse de $AB$ est $B^{-1}A^{-1}$. Souvenez-vous qu'il s'agit d'une démonstration algébrique toute simple : il n'est pas nécessaire d'utiliser les notations $a_{ij}, b_{ij}$.

# 2 Exercices d'application

**Exercice 2.1** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Que valent les coefficients $a_{13}$, $a_{22}$, $a_{32}$ et $a_{41}$ ?

**Exercice 2.2** Expliciter la matrice $A$ de $n$ lignes et $p$ colonnes dans les cas suivants :

(a). Exemple : $n = 3$, $p = 3$, $a_{ij} = i - j$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 \end{pmatrix}$$

(b). $n = 2$, $p = 4$, $a_{ij} = 3i - 2j$.

(c). $n = 3$, $p = 4$, $a_{ij}$ le plus grand des deux indices entre $i$ et $j$.

(d). $n = p = 5$, $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2. \end{cases}$

**Exercice 2.3** Déterminer les réels $a, b, c, d$ tels que

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.4** Considérons les matrices lignes et les matrices colonnes suivantes (remarquez qu'elles ont des coefficients complexes) :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} i & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad L_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Effectuez tous les produits possibles. On soignera la présentation.

Considérez la matrice $A$ que l'on construit en collant les lignes $L_1, L_2, L_3$, puis la matrice $B$ que l'on construit en collant les colonnes $C_1, C_2, C_3$. Calculez $AB$ et $BA$ en vous aidant du travail précédent.

**Exercice 2.5** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculez les matrices $AB$, $BA$, $AC$, $CA$, $AD$, $DA$, $ABC$, $BCD$.

**Exercice 2.6** Calculez, lorsque cela est possible, $A+B$, $C+D$, $A+B+D$, $AB$, $AC$, $CD$, $DC$, $BA$, $CA$, $A+B+CD$, $A+B+DC$, $A+B+(DC)^T$, $A(B+C)$, $(B+C)A$, $(A+B)C$, $C(A+B)$, $ABCD$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.7** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où $x, y$ désignent des réels quelconques. Déterminer $x$ et $y$ tels que $AX = XA$.

**Exercice 2.8** On se donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a). Calculer la matrice $B = A^2 - 2A - 3I$.

(b). En déduire que la matrice $A$ est inversible et que l'on a

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I.$$

**Exercice 2.9** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $(A + I_3)^3$. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$.

**Exercice 2.10** Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont bien échelonnées :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.11** Mettre sous forme bien échelonnée les matrices suivantes :

(a). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b). $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

(c). $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d). $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(e). $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(f). $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2.12** Déterminer le rang des matrices suivantes :

(a). $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b). $B = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c). $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(d). $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & 11 & -2 & 19 \end{pmatrix}$

(e). $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

On discutera, lorsque cela sera nécessaire, selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2.13** Inverser lorsque c'est possible les matrices suivantes :

(a). $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b). $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c). $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d). $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(e). $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(f). $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(g). $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(h). $H = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}$ donnés).

**Exercice 2.14** En utilisant les résultats du cours, démontrez les faits suivants :
- Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale.
- La transposée d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.
- L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

**Exercice 2.15** On dit qu'une matrice $A$ est un "diviseur de zéro", si $A$ est non nulle et s'il existe une matrice $B$ non nulle telle que $AB = 0$ (ou bien $BA = 0$). Montrez qu'un diviseur de zéro n'est pas inversible.

# 3 Découverte

**Exercice 3.1** Trouvez un maximum de matrices de taille $2 \times 2$, dont les coefficients sont 0 ou 1 et qui ne sont pas inversibles. En avez-vous découvert plus que votre voisin ?

**Exercice 3.2** On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

(a). Calculer $A^3$.

(b). En déduire $A^{2010}$, $A^{2011}$, $A^{2012}$, $A^{2013}$, $A^{\text{votre année de naissance}}$.

**Exercice 3.3** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. On considère les matrices

$$B = A + A^\top \quad \text{et} \quad C = A - A^\top.$$

Montrer que la matrice $B$ est symétrique et que la matrice $C$ est antisymétrique.

En déduire que $A$ peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

*Application numérique.* Écrire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

**Exercice 3.4** Cherchez une expression pour :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Cette expression doit être valable pour tout $n \geq 1$. Lorsque vous avez "intuité" le résultat, démontrez-le !

**Exercice 3.5** Dans cet exercice on travaille avec des matrices carrées. On appelle "trace" d'une matrice la somme de ses coefficients diagonaux. Par exemple :

$$\text{Trace} \begin{pmatrix} 1 & 213 & 5432 \\ 5432 & 2 & 543234 \\ 1245 & 23454 & 3 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3 = 6$$

Prenez le sudoku du journal que l'on vous a distribué ce matin à la sortie du tramway. Prenez le carré central de ce sudoku. On va considérer que c'est une matrice $A$ de taille $3 \times 3$. Calculez Trace $AA^\top$. Quel sera le résultat demain ? (inutile d'aller chercher dans les prophéties de Nostradamus).

**Exercice 3.6** On considère l'ensemble de matrices suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a). Montrer que, quelles que soient $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $A^\top \in E$ et $\lambda A \in E$.

(b). Montrer que, quelles que soient $A \in E$ et $B \in E$, on a $A + B \in E$ et $AB \in E$.

(c). Montrer que si $A \in E$ et $A \neq 0$, alors la matrice $A$ est inversible et que l'on a $A^{-1} \in E$.

Sauriez-vous trouver un lien entre les matrices de $E$ et les nombres complexes ?

# 4 QCM récapitulatif

**QCM 4.1** On peut toujours dire que

(a). Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée. ☐

(b). Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure. ☐

(c). Les matrices élémentaires sont toutes inversibles. ☐

(d). En intervertissant deux colonnes d'une matrice inversible, elle reste inversible. ☐

(e). Toute matrice carrée de rang maximum est inversible. ☐

(f). La transposée d'une matrice inversible n'est pas toujours inversible. ☐

**QCM 4.2** Si $A$, $B$ et $C$ sont des matrices carrées quelconques de même taille, on peut toujours dire que :

(a). $A(B + C) = AB + CA$. ☐

(b). Si $AB = BA$, alors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. ☐

(c). $A + B + A = 2A + B$. ☐

(d). $ABA = A^2B$. ☐

(e). $(AB)^\top = B^\top A^\top$. ☐

(f). $AB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$ ou $B = 0$. ☐

(g). L'inverse de $A^n$ est la puissance n-ième de l'inverse de $A$. ☐

**QCM 4.3** Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, alors

(a). $(AB)^\top = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. ☐

(b). $(AB)^\top = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. ☐

(c). $(AB)^\top = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$. ☐

**QCM 4.4** Toutes les matrices de ce QCM sont carrées, de même taille et inversibles. On peut toujours dire que :

(a). Si $A$ est l'inverse de $2B$ alors $B = \frac{1}{2}A^{-1}$. ☐

(b). Si $2A$ est l'inverse de $BC$ alors $C = \frac{1}{2}B^{-1}A^{-1}$. ☐

(c). Si $A$ est l'inverse de $BCD$ alors $A^{-1} = C^{-1}D^{-1}B^{-1}$. ☐

(d). Si $A$ est l'inverse de $A$ alors $A = I$. ☐

(e). Si l'inverse de $A$ est égal à l'inverse de $B$ alors $A = B$. ☐

**QCM 4.5** Quel est l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ?

(a). L'inverse n'existe pas. ☐

(b). $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. ☐

(c). $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ☐

(d). $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. ☐

**QCM 4.6** On peut dire que ces matrices sont bien échelonnées :

(a). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ☐

(b). $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ☐

(c). $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ☐

(d). $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐

(e). $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐

**QCM 4.7** Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. On peut dire que :

(a). La matrice $A$ est inversible quelle que soit la valeur de $\lambda$ dans $\mathbb{R}$. ☐

(b). La matrice $A$ est inversible quelle que soit la valeur de $\lambda$ dans $\mathcal{C}$. ☐

(c). Lorsque $\lambda = 2$, la matrice $A$ est inversible. ☐

(d). Lorsque $\lambda = \frac{3}{2}$, la matrice $A$ est inversible. ☐

(e). Lorsque $\lambda = \frac{-3}{2}$, la matrice $A$ n'est pas inversible. ☐

**QCM 4.8** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. On a :

(a). $\operatorname{rang}(A) = 2$. ☐

(b). $\operatorname{rang}(A) = 3$. ☐

(c). $\operatorname{rang}(A) = 4$. ☐

(d). $\operatorname{rang}(A) = 5$. ☐

**QCM 4.9** On peut dire que :

(a).

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(b).

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(c).

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(d).

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

**QCM 4.10** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors la 2-ième ligne de $A^{-1}$ est de la forme

(a). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & * \end{pmatrix}$.

(b). $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & * \end{pmatrix}$.

(c). $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & * \end{pmatrix}$.

(d). $\begin{pmatrix} * & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$.

(e). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

(f). $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**QCM 4.11** On peut dire que les matrices suivantes sont orthogonales.

— $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

— $N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

— $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

— La matrice $A \in \mathcal{M}_{16}$, qui est diagonale et dont les coefficients diagonaux sont $1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1$.

## 5 Exercices supplémentaires corrigés

**Exercice 5.1** Redémontrez que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Vérifions que le coefficients à l'emplacement $(i,j)$ de $(AB)^\top$ est égal au coefficient à l'emplacement $(i,j)$ de $B^\top A^\top$ :

$$[(AB)^\top]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_\ell A_{j\ell} B_{\ell i} = \sum_\ell B_{\ell i} A_{j\ell} = \sum_\ell (B^\top)_{i\ell} (A^\top)_{\ell j} = (B^\top A^\top)_{ij}$$

**Exercice 5.2** Calculer la matrice

$$A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -3 & 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -10 & -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 24 & -8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 \\ 11 & -8 & 28 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.3** Soient $a, b, c, d$ des réels. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice $B = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I$.

$B = 0$

**Exercice 5.4** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a). Calculer $A^3$.

(b). En déduire $A^{2010}$ et $A^{2011}$.

$A^3 = -I_2$ et $A^{2010} = I_2$ et $A^{2011} = A$

**Exercice 5.5** Résoudre l'équation matricielle

$$X^\top + 3X + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{11}{8} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{8} \\ -\frac{11}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{33}{8} \\ -\frac{21}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.6** On considère le nombre complexe

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a). Ecrivez $j$ sous la forme "module-argument"

(b). Calculer $j$, $j^2$ $j^3$ et $j^4$.

(c). Calculer les matrices $AB$ et $BA$.

(d). En déduire que la matrice $A$ est inversible et donner son inverse.

$A.B = B.A = 3I_3$

**Rappel de formules trigonométriques :**

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

**Exercice 5.7** Soit $\theta$ un réel. Démontrer par récurrence que l'on a

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

**Exercice 5.8** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

.

(a). Calculer $A^3$.

(b). Calculer les matrices $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$ et $(I_3 + A + A^2)(I_3 - A)$.

(c). En déduire que la matrice $I_3 - A$ est inversible et donner son inverse.

(d). Démontrer par récurrence que l'on a

$$(I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2$$

pour tout entier $n \geq 1$.

— $A^3 = 0$

— $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3$

— $(I_3 + A + A^2) = (I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 1 - \sin\theta\cos\theta & \cos\theta - \sin\theta \\ -1 - \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \cos\theta + \sin\theta \\ -\cos\theta - \sin\theta & \cos\theta - \sin\theta & 2 \end{pmatrix}$