Université de Strasbourg
L1S2

Coordonnateur :
Sofiane Souaifi
Bureau i507, IRMA/UFR math-info

Algèbre linéaire

Feuille de TD n° 2 : Systèmes linéaires

1 Connaissance du cours

Exercice 1.1 Déterminer parmi les assertions suivantes celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

(a). Un système linéaire de n équations à n inconnues a exactement une solution / au moins une solution / au plus une solution.

(b). Un système d'équations linéaires qui a plus d'inconnues que d'équations a une infinité de solutions.

(c). Une matrice qui a deux fois la même ligne ou la même colonne n'est pas inversible.

(d). Un système linéaire où apparaît deux fois la même équation n'a pas de solution.

(e). Un système linéaire triangulaire se résout plus rapidement qu'un système linéaire quelconque de même taille.

(f). Une matrice carrée qui n'a que des zéros sur sa diagonale n'est pas inversible.

(g). Considérons un système linéaire $AX = B$. Considérons la matrice $[AB]$ obtenue en collant A et B. Soit $E_1, ..., E_k$ des matrices élémentaires telles que $E_k...E_1[AB]$ est bien échelonnée. Alors le système linéaire $E_k....E_1AX = E_k...E_1B$ est équivalent au système linéaire $AX = B$.

Exercice 1.2 Dessinez schématiquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ suivants:

- $\{(x, y) : x^2 = y\}$.
- $\{(x, y) : y^2 = x\}$.
- $\{(x, y) : |y| = |x|\}$.
- $\{(x, y) : y = 2x\}$.
- $\{(x, y) : y - 2x = 1\}$.
- $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.
- $\{(x, y, z) : x = 0, z = x^2\}$.
- $\{(x, y, z) : z = (x^2 + y^2)\}$.
- $\{(x, y, z) : x = y = z\}$.

Parmi tous les ensembles représentés, dire lesquels sont solutions d'un système d'équations linéaires.

Exercice 1.3 Les systèmes décrits ci-dessous ont-ils 0, 1 ou une infinité de solutions ?
Dans le cas d'une infinité de solutions, indiquez combien de paramètres sont nécessaires pour décrire l'ensemble des solutions.

(a). un système homogène de 7 équations à 5 inconnues dont le rang est 4.

(b). un système homogène de 7 équations à 5 inconnues dont le rang est 5.

(c). un système homogène de 5 équations à 7 inconnues dont le rang est 4.

(d). un système homogène de 4 équations, à 7 inconnues, dont le rang est 4.

Qu'advient-il si l'on enlève le mot "homogène" ?

Exercice 1.4 Démontrer que si un système linéaire $AX = B$ admet 2 solutions X_1 et X_2 avec $X_1 \neq X_2$, alors il admet une infinité de solutions.

Exercice 1.5 Démontrer que si F est une matrice inversible, alors les systèmes linéaires $AX = B$ et $FAX = FB$ sont équivalents.

2 Exercices niveau 1 : sans paramètres

Exercice 2.1 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$S_1 : \begin{cases} x - 2y & = 1 \\ x + 2y & = 1 \end{cases}, \; S_2 : \begin{cases} 2x - 2y & = 1 \\ x + 2y & = 2 \end{cases}, \; S_3 : \begin{cases} 2x - 2y & = 1 \\ -x + y & = 2 \end{cases} \; S_4 : \begin{cases} 2x - 2y & = 1 \\ -x + y & = \frac{-1}{2} \end{cases}, \; S_5 : \begin{cases} 40x + 20y & = 10 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y & = \frac{1}{2} \end{cases},$$

Exercice 2.2 * Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2\,y & = & 1 \\ 2\,x - 2\,y + z & = & 2 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 4\,y + 2\,z & = & 4 \\ x + y + z & = & 2 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} 2\,x - 4\,y + 2\,z & = & 4 \\ -x + 2\,y - z & = & 2 \end{cases}$$

$$(T_1) : \begin{cases} x + 2\,y & = & -2 \\ 2\,y - z & = & 3 \\ -x - z & = & 1 \end{cases} \quad (T_2) : \begin{cases} 2\,x + 4\,z & = & -2 \\ x + y - z & = & 3 \\ x + 1/2\,z & = & 1 \end{cases} \quad (T_3) : \begin{cases} 2\,x + 2\,z & = & -2 \\ x + y - z & = & 3 \\ -3\,x - y - z & = & -1 \end{cases}$$

$$(U_1) : \begin{cases} -x + 2\,y + z + t & = & -4 \\ 2\,y + 2\,z & = & 2 \\ 2\,x + 2\,t & = & 4 \end{cases} \quad (U_2) : \begin{cases} 2\,y + z & = & 1 \\ 2\,y + 2\,z & = & 2 \\ -4\,x + 2\,t & = & -1 \end{cases} \quad (U_3) : \begin{cases} -x + y + z + t & = & 4 \\ x - y + z + t & = & -3 \\ 4\,z + 4\,t & = & 2 \end{cases}$$

Exercice 2.3 Dans l'échelonnement suivant, complétez les étapes manquantes et rajoutez des indications indiquant les opérations élémentaires que l'on a utilisées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- En déduire la solution du système linéaire dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et le second membre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- En déduire la solution du système linéaire dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et le second membre est $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- En déduire la solution du système linéaire dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et le second membre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) : \begin{pmatrix} ix + iz \\ iy \\ ix + it \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (S_2) : \begin{pmatrix} (1+i)\,x + y + iz \\ x + iy + it \\ ix + it \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (S_3) : \begin{pmatrix} ix + iy + iz \\ ix + iy + iz + it \\ \frac{1}{2}\,ix + (1+i)\,t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(T_1) : \begin{pmatrix} x + y + (1+i)\,z \\ 2\,x + 2\,y + (1-i)\,z \\ ix + iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (T_2) : \begin{pmatrix} ix + y + iz \\ ix + 2\,y - iz \\ -ix + iz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(T_3) : \begin{pmatrix} ix + 2\,iy + iz \\ x + y + z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.5 Résoudre les 3 systèmes suivants (attention, il y a une astuce pour gagner du temps).

$$(S_1) : \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z \\ 2\,x - y + z \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (S_2) : \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z \\ 2\,x - y + z \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (S_3) : \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z \\ 2\,x - y + z \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire quelle est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

3 Exercice niveau 2 : avec paramètres

Exercice 3.1 Précisez les opérations effectuées dans l'échelonnement.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & m \\ m & 0 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m-m^2 \\ 0 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1-m^2 & m-m^2 \end{pmatrix}$$

En déduire l'ensemble des solutions du système linéaire de matrice associée $\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de second membre $\begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix}$. Même question si le second membre est pris nul.

Exercice 3.2 Les échelonnements suivants sont erronés : les cas particuliers "problématiques" n'ont pas été considérés, comme ils l'auraient dû. Corrigez en essayant de prendre en compte tous les cas particuliers.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & b & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b & -1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b & -1 \\ 0 & ba+1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b & -1 \\ 0 & 1 & \frac{a+2}{ba+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2b-1}{ba+1} \\ 0 & 1 & \frac{a+2}{ba+1} \end{pmatrix} \text{FIN}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & 2 \\ b & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{a} \\ b & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{a} \\ 1 & 1 & \frac{c}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & \frac{c}{b}-\frac{2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{FIN}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 2 \\ b & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{2}{a} \\ b & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 2\,a^{-1} \\ 0 & \frac{a^2-b^2}{a} & \frac{a-2b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & \frac{a-2\,b}{a^2-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2\,a-b}{a^2-b^2} \\ 0 & 1 & \frac{a-2\,b}{a^2-b^2} \end{pmatrix} \text{FIN}$$

On considère que toutes ces matrices ont été obtenues en juxtaposant une matrice A de taille 2×2 et un vecteur B de taille 2×1. Donnez dans tous les cas et sous-cas l'ensemble des solutions des systèmes linéaires $AX = B$.

Exercice 3.3 Soit m un paramètre réel.

Trouver l'ensemble des solutions du système linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ et de second membre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3m+3 \end{pmatrix}$.

4 Modélisation

Nota Bene: Le plus important dans les exercices de ce paragraphe est de trouver le bon système linéaire à résoudre.

Exercice 4.1 J'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. Quels sont nos êges sachant qu'à nous deux nous totalisons 35 ans ?

Aide : posez comme variables : $x =$ âge actuel du narrateur, $y =$ âge actuel de son interlocuteur, $t =$ différence entre l'année actuelle et l'année du passé qui est évoquée. Certains d'entre vous se passeront peut-être de la variable t.

Exercice 4.2 J'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. Lorsque tu auras l'âge que j'ai, ensemble nous aurons 63 ans. Quels sont nos âges ?

Aide : le futur intervient également dans cet exercice. Rajoutez donc une variable.

Exercice 4.3 Une personne déclare "j'ai autant de frères que de soeurs", une soeur de la personne qui a parlé déclare "j'ai deux fois plus de frères que de soeurs". Combien sont-ils ?

Exercice 4.4 * Trouver un nombre de trois chiffres sachant que :

(a). La somme de ses chiffres est égale à 14.

(b). En échangeant le chiffre des unités et celui des dizaines ce nombre augmente de 36 .

(c). En échangeant le chiffre des unités et celui des centaines ce nombre augmente de 297 .

Exercice 4.5 Equilibrer les équations chimiques suivantes

$$\begin{aligned}
&FeS_2 + O_2 &&\longrightarrow Fe_2O_3 + SO_2 &\quad(1)\\
&C_4H_{10} + O_2 &&\longrightarrow CO_2 + H_2O &\quad(2)\\
&C_5H_{11}OH + O_2 &&\longrightarrow CO_2 + H_2O &\quad(3)\\
&Na_2CO_3 + C + N_2 &&\longrightarrow NaCN + CO &\quad(4)\\
&K_4Fe(CN)_6 + H_2SO_4 + H_2O &&\longrightarrow K_2SO_4 + FeSO_4 + (NH_4)_2SO_4 + CO &\quad(5)
\end{aligned}$$

Exercice 4.6 Dans une solution aqueuse verte de sulfate ferreux $FeSO_4$, on verse une solution aqueuse violette de permanganate de potassium $KMnO_4$ et d'acide sulfurique H_2SO_4. On obtient une solution aqueuse jaune constituée de sulfate de potassiun K_2SO_4, de sulfate de manganèse $MnSO_4$, de sulfate ferrique $Fe(SO_4)_3$. Equilibrer cette réaction.

Exercice 4.7 (Décoloration de l'encre par les effaceurs) . Du permanganate de potassium $KMnO_4$ violet est décoloré par une solution de dioxyde de soufre SO_2 en présence d'eau. Il se forme du sulfate de manganèse incolore $MnSO_4$, du sulfate de potassium K_2SO_4 et de l'acide sulfurique H_2SO_4. Equilibrer cette réaction.

Exercice 4.8 Victor est trois fois plus âgé que sa petite soeur Agathe, mais dans cinq ans il sera deux fois plus âgé qu'elle. Quels sont leurs âges ?

5 QCM

Rappelons qu'il faut répondre : vrai, faux, ou ne pas se prononcer quand la question vous paraît trop difficile.

QCM 5.1 Ceci est un système d'équations linéaires en les variables x, y et z :

(a). $x^3 + y^3 + z^3 = 4$. ☐

(b). $x = y = z$. ☐

(c). $x = y, y \neq z$. ☐

(d). $xyz = 6$. ☐

(e). $a^2x + b^2y = c^2$ avec des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$. ☐

(f). $\sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 2$. ☐

(g). $x + (\ln(\pi))y + (\sqrt{\pi})z = 2$. ☐

QCM 5.2 On peut dire que:

(a). Un système d'équations linéaires qui a autant d'inconnues que d'équations a une solution unique. ☐

(b). Un système d'équations linéaires qui a plus d'inconnues que d'équations ne peut pas avoir une solution unique. ☐

(c). Un système d'équations linéaires qui a plus d'équations que d'inconnues ne peut pas avoir une solution unique. ☐

(d). Un système d'équations linéaires homogène de rang 3 est équivalent à un système d'équations à 3 équations. $\square$

(e). Le vecteur zéro est toujours solution d'un système d'équations linéaires homogène. $\square$

QCM 5.3 Le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 3z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

(a). n'a pas de solution. $\square$

(b). a au moins une solution. $\square$

(c). a exactement une solution. $\square$

(d). a un nombre infini de solutions. $\square$

(e). a exactement deux solutions. $\square$

QCM 5.4 Le système d'équations linéaires : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 5 \\ x & - & y & + & 3z & = & -10 \end{array}\right.$

a pour solutions :

(a). $x = 0,\ y = 5,\ z = -10.$ $\square$

(b). $x = -5 - 2z,\ y = 5 + z,\ z$ quelconque. $\square$

(c). $x = 3 - 2z,\ y = 5 + z,\ z$ quelconque. $\square$

(d). $x = 1,\ y = 1,\ z = -2.$ $\square$

QCM 5.5 Quelle relation a, b et c doivent-ils satisfaire pour que le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 4y & + & 10z & = & a \\ 4x & - & 5y & + & 8z & = & b \\ -2x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}\right.$

ait des solutions ?

(a). $-a + b + c = 0.$ $\square$

(b). $7a + b - c = 0.$ $\square$

(c). $a + b + c = 0.$ $\square$

(d). Toutes les valeurs de a, b et c conviennent. $\square$

QCM 5.6 Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 7x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$.

(a). $x = 0,\ y = \frac{1}{2},\ z = 0.$ $\square$

(b). $x = z,\ y = \frac{1}{2} - 2z,\ z$ quelconque. $\square$

(c). $x = 2z$, $y = \frac{1}{2} + z$, z quelconque. ☐

(d). Il n'y a pas de solution. ☐

QCM 5.7 L'ensemble des solutions du système linéaire : $\begin{cases} x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ -4x & - & 9y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 3y & + & 4z & = & 0 \end{cases}$ est :

(a). $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ☐

(b). $\mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$. ☐

(c). $\mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$. ☐

(d). $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ☐

6 Exercices supplémentaires

Exercice 6.1 1) Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x & -y & +4z & = -4, \\ 3x & +2y & -3z & = 17, \\ 5x & -3y & +8z & = -10 \end{cases}$$

2) Discuter et résoudre selon la valeur du paramètre t le système

$$\begin{cases} tx & +y & +z & = 1, \\ x & +ty & +z & = -2, \\ x & +y & +tz & = 1 \end{cases}$$

3) Discuter et résoudre selon la valeur du paramètre m le système

$$\begin{cases} x & +y & +z & = m+1, \\ mx & +y & +(m-1)z & = m, \\ x & +my & +z & = 1 \end{cases}$$

Exercice 6.2 Résoudre les systèmes suivants.

$$(a) \begin{cases} 2x + y + 2z & = 4 \\ x + y + z & = 4 \\ -2x + y - 2z & = -4 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} 2x + y + 2z & = 7 \\ x + y + 2z & = 4 \\ -2x + y - z & = -3 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t & = 4 \\ y - z + t & = -3 \\ x + 3y - 3t & = 1 \\ x + 2y + z - 4t & = 4 \end{cases}$$

?? (a) $S = \emptyset$.

(b) $S = \{(x = 3, y = \frac{7}{3}), z = -\frac{-2}{3}\}$;

(c) $S = \{(x = -8, y = t + 3, z = 2t + 6)\}$.

Exercice 6.3 Résoudre les systèmes linéaires suivants pour des variables x, y et z complexes :

(a). $\begin{cases} x & +iy & +2z & = 0, \\ ix & & +3z & = 0. \end{cases}$

(c). $\begin{cases} x & +y & -z & = 1+2i, \\ ix & & -3z & = 3-i, \\ x & +iy & +z & = 2-i. \end{cases}$

(b). $\begin{cases} -2x & +y & & = -4+i, \\ x & & +iz & = 2-i, \\ x & -y & -iz & = 2. \end{cases}$

(d). $\begin{cases} x & +y & +z & = 1, \\ 2x & +iy & -z & = i, \\ -ix & +(1+i)y & +2iz & = 1. \end{cases}$

??

- (a) $S = \{(x \in \mathbb{C}, y = (\frac{2}{3} + i)x, z = -\frac{i}{3})\}$.
- (b) $S = \{(x = 5 + 3i, y = -6 + i, z = -2 + 2i)\}$.
- (c) $S = \{(x = \frac{1}{2}y + 2 - \frac{i}{2}, y \in \mathbb{Z}, z = \frac{1}{2}(iy - 1)\}$.
- (d) $S = \emptyset$.

7 Exercices de sujets des sessions antérieures

Exercice 7.1 Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x - y + 5z & = 1 \\ x - 2y + z & = 2 \\ x - y + 2z & = 1 \end{cases}$

Géométriquement quel est l'ensemble de ses solutions ?

Exercice 7.2 Donner la forme bien échelonnée de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x - y + 3z & = 0 \\ -x + 2y & = 0 \end{cases}$

Exercice 7.3 Donner la forme bien échelonnée de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires $\begin{cases} x - y + z & = 1 \\ 2x + y + 2t & = 1 \\ 3x - 2y + z - t & = 0 \end{cases}$

Exercice 7.4 * Soit a un nombre réel.

Trouver l'ensemble des solutions du système linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & a & -a \end{pmatrix}$ et de second membre $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.5 Soit m un nombre réel.

Trouver l'ensemble des solutions du système linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -m \end{pmatrix}$ et de second membre $\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.6 * Soient m et a deux nombres réels.

Trouver l'ensemble des solutions du système linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$ et de second membre $\begin{pmatrix} a \\ m \\ 2a \end{pmatrix}$.