

Algèbre linéaire

Feuille de TD n° 3 : Déterminants

1 Connaissance du Cours

Exercice 1.1 Les phrases suivantes sont-elles justes, fausses, imprécises, incomplètes ? Améliorez-les, complétez-les (jouez à être le plus rigoureux possible).

- (a). Le déterminant d'un produit de matrices, est le produit de leurs déterminants.
- (b). Le déterminant d'une somme de matrices, est la somme de leurs déterminants.
- (c). En intervertissant deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1 .
- (d). Le déterminant d'une matrice triangulaire est ...
- (e). Le déterminant d'une matrice inversible est ...
- (f). Le déterminant d'une matrice non carrée est ...
- (g). Le déterminant de l'inverse d'une matrice est ...
- (h). Le déterminant de la somme de deux matrice est...
- (i). Pour calculer le déterminant, on peut effectuer des manipulations sur les lignes, ou sur les colonnes, mais il ne faut pas mélanger les deux méthodes.
- (j). Le déterminant de λA est ...
- (k). Le déterminant de A^n est ...
- (l). Le déterminant de A^{-n} est ...
- (m). Si une matrice a deux fois la même ligne ou la même colonne alors ...

Exercice 1.2 Considérons une matrice carrée $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que

$$D_2(4) T_{32}(1) T_{13}(-2) P_{1,2} D_2\left(\frac{1}{2}\right) P_{2,1} T_{2,1}(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quel est le déterminant de A ? Rappels des notations des matrices élémentaires :

- $D_i(\lambda)$ ($1 \leq i \leq n$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$) la matrice diagonale dont le i -ème coefficient est λ et les autres 1,
- $T_{i,j}(\lambda)$ ($1 \leq i \neq j \leq n$, $\lambda \in \mathbb{K}$) la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, dont le coefficient sur la i -ème ligne et la j -ème colonne est λ et les autres coefficients sont nuls.
- $P_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de l'identité en permuttant les lignes i et j .

Exercice 1.3 Sachant que le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ vaut 3, donner la valeur des déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

2 Exercices d'application

Exercice 2.1 Calculer (en échelonnant tant que possible) les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

Exercice 2.2 Soient a, b, c des nombres réels. Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix},$$

En utilisant les techniques du cours, montrez que :

$$\begin{aligned} \det A &= -b(a+b)(a-b)^2 \\ \det B &= -4bc + (a-b-c)^2 \\ \det C &= (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

Exercice 2.3 Existe-t-il une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$? Même question si $A \in M_3(\mathbb{C})$.

3 Exercices niveau 2

Exercice 3.1 Voici un calcul astucieux de déterminant :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \leftarrow C_3 - aC_2 \\ \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & b(b-a) \\ 1 & c & c(c-a) \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} C_1 & C_2 \leftarrow C_2 - aC_1 & C_3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(b-a) \\ 1 & c-a & c(c-a) \end{vmatrix} \end{matrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Calculez maintenant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Sauriez-vous généraliser ce résultat ?

Exercice 3.2 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles ces matrices ne sont pas inversibles.

Exercice 3.3 Les nombres 204, 527 et 255 sont divisibles par 17. Montrer, sans le calculer, que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ est aussi divisible par 17.

Indication : $204 = 2 \times 100 + 0 \times 10 + 4 \times 1$, $255 = \dots$ et l'on ne change pas le déterminant en rajoutant à une colonne, 100 fois ou 10 fois une autre colonne...

Exercice 3.4 Soit D_n le déterminant de la matrice d'ordre n suivante $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer D_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- 2) Exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2} . Indication : développer le déterminant.
- 3) Montrer que $(D_n - D_{n-1}) = 1$. En déduire une expression explicite pour D_n .

Exercice 3.5 Soit m un nombre réel.

a) Calculer le déterminant de $B_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$.

b) Inverser B_1 si cela est possible.

c) Soit a un nombre réel. Déterminer, suivant les valeurs de a et m , si le système

$$\begin{cases} x - y + 2z = a, \\ mx + (1-m)y + (2m-2)z = m, \\ 2x + my - (3m+1)z = 2a \end{cases}$$

a une solution unique, aucune solution ou une infinité de solutions.

d) Résoudre le système précédent.

Exercice 3.6 Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$.

a) On suppose que $A^2 = 3I_4$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse en fonction de A ; sinon, donner un contre-exemple. Calculer la (ou les) valeur(s) possible(s) du déterminant de $2A$.

b) On suppose maintenant que $A^2 = 2A$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse en fonction de A ; sinon, donner un contre-exemple. Calculer $(A + I_4)^5$ en fonction de A et I_4 .

4 QCM récapitulatif

QCM 4.1 On peut dire que:

- (a). Le déterminant d'une matrice à coefficients réels est un nombre réel.
- (b). Le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des nombres imaginaires purs est un nombre imaginaire pur.
- (c). Le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des réels positifs est un nombre réel positif.
- (d). Le déterminant d'une matrice diagonale est toujours non nul.
- (e). Le déterminant du produit est le produit des déterminants.
- (f). Le déterminant de la somme est la somme des déterminants.

QCM 4.2 Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ vaut

- a) 0
- b) -1
- c) 1
- d) 2

QCM 4.3 Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ vaut

- a) 0
- b) $a + b + c$
- c) $(b - a)(c - a)$
- d) abc

QCM 4.4 Le déterminant de la matrice $(A_{ij}) = |i - j| \in M_3(\mathbb{R})$ vaut

- a) 4
- b) -4
- c) 2
- d) -2
- e) 0

QCM 4.5 Soit A une matrice carrée de taille 5 vérifiant $A^T = -A$. Le déterminant de A vaut :

a) 1

b) -1

c) 5

d) 0

QCM 4.6 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = I_n$. Alors

a) A est inversible.

b) $\det A = 1$.

c) Le déterminant de A ne peut prendre que deux valeurs.

d) $A = I_n$.

e) A est orthogonale.

f) $\det A$ vaut -1 ou $+1$. .

QCM 4.7 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = A$. Alors

a) A n'est pas nécessairement inversible.

b) $\det A = 1$.

c) $\det A$ vaut 0 ou 1.

e) $\det A$ vaut -1 ou $+1$. .

QCM 4.8 Soient A, B et C des matrices carrées de taille 2. On suppose que $\det A = 3, \det B = 2$ et $C = 2A$. Alors

a) $\det(AB^{-1}C) = 24$.

b) $\det(AB^{-1}C^{-1}) = 1$.

c) ABC est inversible.

d) $\det(AB^{-1}C^T) = 18$.

5 Exercices supplémentaires

Exercice 5.1 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} \end{pmatrix} \quad (i^2 = -1), \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 5.2 Calculer le déterminant de la matrice : $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il s'écrit $\lambda(x-1)^3$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et donner la valeur de λ .

Exercice 5.3 Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

(on donnera le résultat sous forme factorisée).

En déduire l'expression factorisée du déterminant de $B = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 2a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 4 & 2c & 2c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.4 On considère les matrices A et J dans $M_3(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}, \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Calculer le déterminant de J . Déterminer la matrice AJ . En déduire une décomposition du déterminant de A en produit de facteurs.

Exercice 5.5 Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier l'identité $\det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

2) On pose $S_n = a^n + b^n + c^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Montrer que l'on a :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{pmatrix} = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Indication : on pourra calculer la matrice AA^\top .

Exercice 5.6 Trouver un polynôme de degré 3 à coefficients réels prenant les valeurs respectives 0, -4, 5 et -15 pour $X = 1, -1, 2$ et -2 .

Indication : Chercher $P(X)$ sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$, écrire le système de 4 équations obtenu en donnant successivement à X les valeurs 1, -1, 2, -2.