

Algèbre linéaire

Feuille de TD n° 4 - Espaces vectoriels

1 Connaissance du cours

Exercice 1.1 Représentez (dessinez) les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants. Déterminez lesquels sont stables par addition, stables par multiplication par un entier, par un réel positif, par un réel. En déduire lesquels sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathbb{Z}^2 & S_2 &= \{(x, y) : x = y, x \geq 0, y \geq 0\} \\ S_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : |x| = |y|\} & S_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 1.2 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que la somme $F = F_1 + \dots + F_n$ définie par

$$F = \{v = v_1 + \dots + v_n; v_i \in F_i\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

- (b) Soit I un ensemble et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Montrer que leur intersection $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 1.3 Quels sont les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ qui vérifient :

- Pour toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires, on a $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.
- Il existe une famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires tels que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.

Exercice 1.4 Reliez les phrases/expressions équivalentes.

- (a) Famille libre.
- (b) Les lignes de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- (c) Deux vecteurs v_1, v_2 sont dans le même plan vectoriel P .
- (d) Espace vectoriel de dimension 2.
- (e) Famille liée
- (f) Les lignes de $A \in \mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendantes.
- (g) $\dim(P)=2$, $v_1 \in P$ et $v_1 + v_2 \in P$.
- (h) $A \in \mathcal{M}_{7,5}(\mathbb{R})$ est de rang maximal.
- (i) Deux vecteurs v_1, v_2 sont dans une même droite vectorielle.
- (j) Les colonnes de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- (k) Deux vecteurs v_1, v_2 sont colinéaires.
- (l) $A \in \mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{R})$ est de rang maximal.

- (m) Les colonnes de $A \in \mathcal{M}_{7,5}(\mathbb{R})$ sont linéairement indépendantes.
- (n) Deux vecteurs v_1, v_2 sont alignés.
- (o) La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.
- (p) Plan vectoriel.

Exercice 1.5 Remplissez les espaces vides.

Proposition: Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit w un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique famille de scalaires $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tels que $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

Démonstration: Comme la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est il existe une famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires tels que $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Supposons qu'il existe une seconde famille $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$ telle que $w = \alpha'_1 v_1 + \alpha'_2 v_2 + \dots + \alpha'_n v_n$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= w - w \\ &= (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) - (\alpha'_1 v_1 + \alpha'_2 v_2 + \dots + \alpha'_n v_n) \\ &= (\alpha_1 - \alpha'_1) v_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) v_n \end{aligned}$$

Comme la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est , on a :

Exercice 1.6 Soit A une matrice carré de taille d . Lesquelles, parmi les propriétés ci-dessous, impliquent-elles que A est inversible ? Justifier.

- (a) Les lignes de A forment une base de $\mathbb{R}^d$.
- (b) Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^d$.
- (c) Le système linéaire $AX = 0$ possède une unique solution.
- (d) Le déterminant de A est non nul.
- (e) Le déterminant de A^T est non nul.

2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 2.1 L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois suivantes est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

- (a) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;
- (b) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$;
- (c) $(x, y) + (x', y') = (0, 0)$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;
- (d) $(x, y) + (x', y') = (y + y', x + x')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;
- (e) $(x, y) + (x', y') = (x + x' - 1, y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x - \lambda + 1, \lambda y)$.

Exercice 2.2 Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$.
- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, -1, 4)$.
- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ avec $m \in \mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, $u(X) = (3X + 1)^2 - 3X^2 + 2$, $u_1 = 1 + X$, $u_2 = X + 2$, $u_3 = X^2 + X + 1$.
- Dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $u = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $u(t) = \cosh(t)$, $u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = e^{-t}$, $u_3(t) = t + 1$.

Exercice 2.3 Dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$u_1 = (-i, 1 + i, 4 + i), \quad u_2 = (-1, 1, 3), \quad u_3 = (1 - i, i, i).$$

Écrire le vecteur $(1 + i, 2, i)$ comme combinaison linéaire de la famille u_1, u_2, u_3 .

Exercice 2.4 Montrer que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels:

- l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- l'ensemble des matrices symétriques $S_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | A = A^T\}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- l'ensemble des suites arithmétiques à valeurs réelles.
- L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- l'ensemble $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.

Exercice 2.5 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - 5y - 1 = 0\}$
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\}$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
- $H = \{(x, 2x, 4x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$
- $I = \{(1, y) | y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

- $\{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = xy\}$.
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$

Exercice 2.7 Pour chacune des parties de $\mathbb{R}^3$ suivantes, dites s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

- $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, 2x + 3y - 7z = 0\}$
- $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, x + y = y + z = z + x = 0\}$
- $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, xyz = 0\}$
- $\{(a - b + c, a + b - c, 2a + 3b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2.8 Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels?

- (a) $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est paire}\}$ (d) $D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$
 (b) $B = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est impaire}\}$ (e) $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0\}$
 (c) $C = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) + 2\}$ (f) $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = 0\}$

Exercice 2.9 Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$ lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- (a) $\{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P = 7\}$ (c) $\{P \in \mathbb{R}[X] : P \text{ est pair}\}$
 (b) $\{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq 3\}$ (d) $\{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$

Exercice 2.10 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

3 Familles de vecteurs libres, liées, génératrices, bases

Exercice 3.1 Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ou liées ?

$$\begin{aligned} &((1, -1, 1), (2, -2, 2), (3, -1, 1), (4, 2, 1)), & ((1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 0)), & ((2, 3), (1, 1)), \\ &((1, 2, 0, 0), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 0, -1)), & ((2, 0, 1, 0), (2, 2, 1, 1), (-1, 1, -1, 0), (0, -1, 2, 0)). \end{aligned}$$

Exercice 3.2 Soit $F = \{(2\alpha + 3\beta, \alpha - \beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(2, 1, 1, 2)$ et $(3, -1, 2, -1)$.

Exercice 3.3 Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, montrer que le sous-espace vectoriel engendré par $u = (2, 0, -1)$ et $v = (3, 2, -4)$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par $w = (1, 2, -3)$ et $z = (0, 4, -5)$, c'est à dire:

$$\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w, z).$$

Exercice 3.4 On considère les vecteurs suivants dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (1, 1, 1), u_4 = (1, 0, -1), u_5 = (\pi, 1, -1).$$

Dans chacune des situations suivantes, dire s'il existe des réels λ_i non tous nuls tels que :

- (a) $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. (c) $\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_3 + \lambda_4 u_5 = 0$.
 (b) $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_4 u_4 = 0$.

Exercice 3.5 Montrer que les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivantes sont libres (on précisera la valeur de n pour chaque famille) :

- (a) $((1, 0), (1, 1))$; (c) $((-3, -1, -1), (-19, -11, -2), (0, -1, 1))$.
 (b) $((1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, -1))$; (d) $((3, -20, -13, 1), (-6, 41, 26, -1), (-3, 19, 4, 2))$.

Exercice 3.6 Soit E l'espace vectoriel formé des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une famille libre dans E .

Exercice 3.7 Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre $m \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (-1, m, 1)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.8 Dans $\mathbb{K}[X]$, considérons les polynômes

$$P_0 = X^2 + X, P_1 = X - 2, P_3 = -X^2 + 1$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle libre ou liée ?

Exercice 3.9 On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dites si les familles de fonctions suivantes sont libres :

a) $\{x \mapsto 1, x \mapsto x\}$

c) $\{x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x\}$

b) $\{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\}$

d) $\{x \mapsto x, x \mapsto \exp(-x), x \mapsto \exp(x), x \mapsto \exp(2x)\}$

Exercice 3.10 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 1, -1)$$

$$w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 1, 1)$$

Exprimer chaque w_i comme combinaison linéaire des v_j puis chaque v_i comme combinaison linéaire des w_j .

Exercice 3.11 On considère les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (1, 1, 2, 3), u_3 = (2, 3, 5, 7), u_4 = (-1, 0, -1, -2).$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ? Si elle est liée, déterminer une relation de dépendance linéaire existante entre ces vecteurs.

Exercice 3.12 Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La famille (I, A, B, A^2, B^2, AB) est-elle libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 3.13 On considère les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'elles, indiquer si la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ associée est : libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$, une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.14 Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

(a) Montrer que l'ensemble S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) En donner une famille génératrice puis une base.

(c) Quelles sont les coordonnées du vecteur $(3, 2, -1)$ dans cette base ?

Exercice 3.15 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) qui vérifient l'équation

$$x + y + z + t = 0.$$

Donner une base de ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.16 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble des vecteurs (x, y, z) qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Donner une base de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 3.17 Soit S l'ensemble des solutions des équations $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^3$ i.e.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \text{ et } 2y + z = 0\}.$$

- (a) Montrer que l'ensemble S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (b) En donner une famille génératrice puis une base. Quelle est la dimension de S ?

Exercice 3.18 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$u_1 = (1 - i, i, 1 - i), u_2 = (-1, 1, 3), u_3 = (1 - i, i, i).$$

- (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.
- (b) Calculer les coordonnées du vecteur $(1 + i, 2, i)$ dans la base (u_1, u_2, u_3) .

Exercice 3.19 Montrer que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(1 - X) = P(X)\}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel puis en donner une base. En déduire la dimension de E .

Exercice 3.20 On considère la famille suivante de polynômes :

$$\mathcal{F} = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}.$$

- (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$?
- (b) Donner les coordonnées d'un polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ dans cette base.

4 Intersection, somme, supplémentaire, somme directe

Exercice 4.1 Considérons les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note S_1 respectivement S_2, S_3 , l'ensemble des vecteurs v tels que $A_1 v^T = 0$, respectivement $A_2 v^T = 0, A_3 v^T = 0$. Ce sont chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ pour un certain n . Préciser à chaque fois lequel. Trouver la dimension de $S_i \cap S_j$ pour tous les couples (i, j) possibles.

Exercice 4.2 Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$ et $G = \{(x - y, x + y, x - 3y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (a) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer une équation satisfaite par les coordonnées des éléments de G .
- (c) Déterminer deux familles $A \subset \mathbb{R}^3$ et $B \subset \mathbb{R}^3$ telles que $F = \text{Vect}(A)$ et $G = \text{Vect}(B)$.
- (d) Déterminer une base du sous-espace vectoriel $F \cap G$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 4.3 Soient

$$v_1 = (1, 1, 3, -1), \quad v_2 = (2, -1, -4, 4), \quad v_3 = (0, 1, 2, 0).$$

On pose $G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - z = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\}$.

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
- (b) Déterminer une base de G , en déduire sa dimension.
- (c) Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur appartenant à G . Déterminer une équation satisfaite par les coordonnées de u .
- (d) Déterminer $F \cap G$. A-t-on $F + G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 4.4 Soient $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$, D_1 le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(2, 1)$ et D_2 le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(0, 1)$. Montrer que $\mathcal{P}$ est la somme directe de D_1 et de D_2 . Soit D'_2 le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 1)$. Montrer que $\mathcal{P}$ est aussi la somme directe de D_1 et de D'_2 .

Exercice 4.5 Les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}((3, 0, 1, 2))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 3y - z + 2t = 0\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4.6 On se place dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Soient $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n | x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $u = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 4.7 Soient E le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et F la famille formée des matrices
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un sous-espace supplémentaire

de F dans E ne contenant pas la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.8 Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^4$ engendré par $u = (1, 2, 2, i), v = (2, 4, 2, -2i)$. Déterminer un supplémentaire V de P dans $\mathcal{C}^4$.

Exercice 4.9 On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$.

Soient $F = \{f \in E | f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(\sin, \cos)$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 4.10 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.

On définit

$$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A\} \quad \text{et} \quad A_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A = -A\}$$

respectivement l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices anti-symétriques où ${}^t A$ désigne la transposée de la matrice A .

(a) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de E .

(b) Prenons $n = 2$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Écrire explicitement M sous la forme $M = M_s + M_a$ avec M_s une matrice symétrique et M_a une matrice anti-symétrique.

(c) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

5 Changements de bases

Exercice 5.1 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2y + t = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 4y + z = 0 \\ y + t = -1 \end{cases}$$

Trouvez les coordonnées du vecteur $(1, 2, 0, -1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ avec $v_1 = (0, 1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 2, 4, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ et $v_4 = (1, 0, 0, 1)$.

Exercice 5.2 Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ces matrices sont inversibles et calculer leurs inverses.

Donner les coordonnées des vecteurs :

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1), v_4 = (1, 2, 3), v_5 = (0, 0, 0)$$

dans les bases de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices associées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement A , B et C .

Exercice 5.3 Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice associée dans la base canonique est égale à A . Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^4$.

Considérons les vecteurs w_1, w_2, w_3 dont les coordonnées dans la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sont respectivement :

$$(1, 2, 1, 2), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, -1, 1/2, 15).$$

Déterminer les coordonnées de w_1 , w_2 et w_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5.4 Considérons la base (e_1, e_2) dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dessiner les deux vecteurs de cette base de $\mathbb{R}^2$. On pourra éventuellement utiliser un compas et/ou ses connaissances de trigonométrie (cosinus, sinus). Dessinez les vecteurs suivants :

$$v_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}), v_2 = (0, \frac{2}{\sqrt{2}}), v_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), v_4 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}), w_1 = (2, 1), w_2 = (-1, 3), w_3 = (0, -2).$$

Graphiquement, quelles sont les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 dans la base (e_1, e_2) . Par le calcul, déterminer les coordonnées des vecteurs w_1, w_2, w_3 dans la base (e_1, e_2) .

Exercice 5.5 Considérons la base (e_1, e_2) dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dessiner les deux vecteurs de cette base. On pourra éventuellement utiliser un compas et/ou ses connaissances de trigonométrie (cosinus, sinus). Dessiner les vecteurs w_1, w_2, w_3 dont les coordonnées dans la base (e_1, e_2) sont données respectivement par :

$$(2, 1), (-1, 3), (0, -2).$$

Exercice 5.6 Considérons les matrices orthogonales suivantes:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Quelle est l'écriture des vecteurs :

$$w_1 = (0, 1, -1), w_2 = (1, 2, 0), w_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1).$$

dans les différentes bases de $\mathbb{R}^3$ de matrices associées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) A et B .

Exercice 5.7 Considérons la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que cette matrice est orthogonale ? En déduire les valeurs des produits scalaires $e_i \cdot e_j$ des vecteurs de la base. Considérons la base (e'_1, e'_2, e'_3) dont la matrice associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que cette matrice est orthogonale. Considérons les vecteurs

$$w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (1, 0, -1), w_3 = (4, 0, 1).$$

Calculer les produits scalaires entre les w_i et les e_i . En déduire les coordonnées des vecteurs w_i dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Calculer les produits scalaires entre les w_i et les e'_i . En déduire les coordonnées des vecteurs w_i dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$.

6 QCM récapitulatifs

QCM 6.1 On peut dire que:

- (a) Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^d$ qui est stable par combinaisons linéaires est un sous-espace-vectoriel.
- (b) L'intersection de deux s.e.v. peut être vide.
- (c) Un plan affine de $\mathbb{R}^3$ (une partie d'équation $ax + by + cz + d = 0$) est toujours un sev.
- (d) Une droite affine de $\mathbb{R}^2$ (une partie d'équation $ax + by + c = 0$) qui passe par zéro est un s.e.v.

QCM 6.2 Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On peut dire que :

- (a) S contient au moins une droite.
- (b) Si $\dim S = 3$, le vecteur $(1, 1, 1)$ est dans S .
- (c) Si S contient les droites vectorielles engendrées par $(0, 1, 0)$ et $(1, 1, 0)$ alors S contient tout le plan d'équation $z = 0$.
- (d) Si S contient deux droites vectorielles distinctes alors sa dimension est au minimum de 2.
- (e) L'intersection de deux plans vectoriels distincts est toujours une droite vectorielle.

QCM 6.3 Notons S le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x + 2y + z = 0$.

- (a) S est une droite.
- (b) S contient la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2, 1)$.
- (c) S est inclus dans le s.e.v. engendré par les vecteurs $(3, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$, $(-1, -2, -1)$.
- (d) S contient le vecteur $v = (1, -1, 1)$ ainsi que tous les vecteurs colinéaires à v .

QCM 6.4 Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si...

- (a) Toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires vérifie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.
- (b) Il existe une famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires vérifiant $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.
- (c) La seule famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires vérifiant $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ est la famille $(0, 0, \dots, 0)$.
- (d) Pour toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires, si l'on a $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ alors on a nécessairement $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.
- (e) Si une famille $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de scalaires vérifie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, alors l'un au moins des α_i est nul.

QCM 6.5 Considérons l'ensemble S des (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases}$$

On peut dire que

- (a) S n'est pas un sous-espace vectoriel. ☐
- (b) Une base de S contient 2 vecteurs. ☐
- (c) S est un sous-espace vectoriel dont une base est donnée par $((-1, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 1))$. ☐
- (d) S est un sous-espace vectoriel dont une base est donnée par $((1, 1, -1, 1), (0, 0, 1, -2))$. ☐
- (e) On a $S = \{\lambda(1, -1, 0, 0) + \mu(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) : \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$ ☐

QCM 6.6 Soient $v_1 = (1, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 4)$, $v_3 = (1, 2, 3, -1)$. On peut dire que :

- (a) $\text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ est de dimension 2.
- (b) Il faut au minimum 3 équations pour décrire $\text{vect}(v_1, v_2, v_3)$.
- (c) $\text{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ est l'ensemble des solutions de
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$
.
- (d) Il faut exactement deux équations linéairement indépendantes pour décrire $\text{vect}(v_1, v_2, v_3)$.
- (e) Un système d'équations de $\text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ est

$$\begin{cases} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ -3x & + & 2y & & & + & t & = & 0 \end{cases}$$

QCM 6.7 Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est liée si et seulement si...

- (a) Un des vecteurs v_i peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- (b) $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^n$.
- (c) Il existe une famille de scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ qui vérifie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.
- (d) Toute famille de scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vérifie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.

QCM 6.8 : Les familles suivantes forment des bases de $\mathbb{R}^3$...

- (a) $\{(-1, -2), (2, 4)\}$.
- (b) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
- (c) $\{(1, 0), (0, 1)\}$.
- (d) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.
- (e) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

QCM 6.9 Soient $v_1 = (1, 3, 5)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ et $b = (2, 9, 14)$. On peut dire que :

- (a) b est une combinaison linéaire de v_1 et v_2 .
- (b) b n'est pas dans $\text{vect}(v_1, v_2)$.
- (c) La famille (v_1, v_2) engendre $\mathbb{R}^3$.

(d) v_1 et v_2 sont linéairement indépendants.

(e) v_1 et b sont colinéaires.

(f) (v_1, v_2, b) est une base de $\mathbb{R}^3$.

QCM 6.10 Soient $v_1 = (1, -1, -3)$, $v_2 = (-5, 7, 8)$ et $v_3 = (1, 1, h)$. On peut dire que :

(a) Pour $h = 0$ les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont linéairement dépendants.

(b) Pour $h = -10$ les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont linéairement dépendants.

(c) Pour $h = 10$ les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont linéairement indépendants.

(d) Pour tout h les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont linéairement indépendants.

(e) Il existe h tel que (v_1, v_2, v_3) forme une base.

QCM 6.11 On peut dire que :

(a) Les coordonnées de $v = (1, 0, 2)$ dans la base $((1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0))$ sont $(2, -1, 0)$.

(b) Les coordonnées de $v = (1, 0, 2)$ dans la base $((1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0))$ sont $(0, 2, 1)$.

(c) Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

sont inverses l'une de l'autre.