Stabilité homologique pour les groupes d'automorphismes

Arthur Soulié

UFR de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Strasbourg

Mémoire de deuxième année de Master recherche
Mathématiques fondamentales
Directeur de mémoire : Christine Vespa

Année 2014/2015

Table des matières

Introduction

Ce mémoire concerne l'étude de la stabilité homologique pour des familles de groupes d'automorphismes, dans certaines catégories. Il nous faut donc, au préalable, introduire cette notion de stabilité. En considérant une catégorie $\mathcal{C}$ adéquate (en particulier monoïdale, avec $\oplus$ le produit), X et A des objets de $\mathcal{C}$, on pose $G_n := Aut_{\mathcal{C}}\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$. On considère également $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{K} - Mod$ un foncteur. On obtient alors une suite de groupes d'homologie du type :

$$\cdots \longrightarrow H_i\left(G_{n-1}, F\left(A \oplus X^{\oplus n-1}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(G_n, F\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(G_{n+1}, F\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right)\right) \longrightarrow \cdots$$

L'homologie peut ainsi être à coefficients tordus ou bien constants, si on choisit le foncteur constant $F = \mathbb{Z}$.
L'étude de cette suite de groupes d'homologie soulève deux questions :
1) d'une part, on cherche à savoir si la suite se stabilise, c'est-à-dire si à partir d'un certain n, les applications $H_i\left(G_n, F\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(G_{n+1}, F\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right)\right)$ sont des isomorphismes, et si c'est le cas, déterminer une borne pour n à partir de laquelle il y a stabilisation ;
2) d'autre part, on veut calculer la colimite de cette suite. Cette colimite est appelée homologie stable pour la famille des groupes G_n à coefficients tordus par F, lorsque ce foncteur n'est pas constant.
Nous nous limiterons dans ce mémoire au problème 1). Des résultats sont déjà connus pour certaines familles de groupes : le cas des groupes généraux linéaires sur un anneau A, qui correspond à la catégorie des A-modules de type fini avec une structure monoïdale donnée par le produit direct, a été traité par Quillen (non-publié) pour les coefficients constants et par Dwyer pour les coefficients tordus dans [12] ; pour les groupes symétriques, ce qui correspond à la catégorie des ensembles finis avec une structure monoïdale donnée par l'union disjointe, le cas à coefficients constants a été démontré par Nakaoka dans [24] ; pour les groupes d'automorphismes des groupes libres de type fini, qui correspondent à la catégorie des groupes libres de type fini avec une structure monoïdale donnée par le produit libre, le cas à coefficients constants est fait par Hatcher et Vogtmann dans [18].

Dans une prépublication très récente [32], Nathalie Wahl développe un cadre général pour obtenir des résultats de stabilité à coefficients contants et tordus. Les théorèmes exposés dans cet article permettent à la fois de retrouver les résultats connus donnés plus haut, mais également d'en obtenir de nouveaux notamment pour l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus.

Ce mémoire est en grande partie basé sur [32] et son contenu suit la logique suivante. Dans la première partie, on fera essentiellement des rappels généraux sur les groupoïdes et les catégories monoïdales ; ce sera l'occasion d'introduire quelques exemples et de fixer quelques notations.

La seconde partie abordera les notions de catégories pré-tressées puis homogènes et les principaux résultats qui nous seront utiles dans la suite de ce mémoire. Ce concept de catégorie homogène demeure peu classique et assez récent (voir [32]) et est inspiré de celui établi dans le travail de Djament et Vespa pour le calcul des l'homologie stable de familles de groupes à coefficients tordus (voir [11]). Dans la suite de cette partie, nous donnons deux constructions de la catégorie homogène pré-tressée universelle associée à un groupoïde monoïdal tressé vérifiant quelques autres conditions. L'une est une méthode générale nouvelle, tandis que l'autre se base sur une idée due à Quillen et on aura alors besoin que le groupoïde considéré vérifie une propriété d'annulation (voir [15]).

Nous verrons ensuite dans la troisième section le lien entre les catégories homogènes, les complexes simpliciaux et les ensembles semi-simpliciaux. Cela nous permettra de formuler, pour les catégories homogènes étudiées, l'hypothèse fondamentale (**H3**), nécessaire à l'établissement des résultats centraux de l'article.

Ces prérequis étant rappelés, ce n'est ainsi qu'à partir de la quatrième partie que l'on introduira le premier théorème majeur de l'article : le théorème A. C'est un résultat de stabilité homologique pour des coefficients constants, donnant notamment des bornes pour celle-ci.

Théorème A : *Soit* $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ *une catégorie homogène, vérifiant pour* $A, X \in Obj\left(\mathcal{C}\right)$ *l'hypothèse* (**H3**) *avec un entier $k \geq 2$. On considère l'application en homologie :*

$$H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \xrightarrow{\Psi} H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right)\right).$$

Il s'agit de l'unique application définie en homologie qui est induite par l'application :

$$\begin{array}{rcl}\Sigma_n^X : G_n & \longrightarrow & \left(G_{n+1} = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n} \oplus X\right)\right). \\ f & \longmapsto & f \oplus id_X\end{array}$$

Alors, Ψ est un isomorphisme si $i \leq \frac{n-1}{k}$ et une surjection si $i \leq \frac{n}{k}$.

On donnera également les étapes de sa démonstration et en particulier le cas $k = 2$, faisant le lien avec un autre article de Wahl (voir [33]).

Ensuite, la cinquième partie sera quant à elle dédiée à l'étude et la démonstration d'un théorème de stabilité homologique qualitative à coefficients tordus, dans le sens où l'on caractérise cette stabilité. Nous aurons besoin au préalable d'introduire les notions de suspensions supérieures et inférieures, de systèmes de coefficients ainsi que de foncteurs stables et fortement stables.

Théorème B : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène pré-tressée, $X, A \in Obj(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}_{X,A}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont $X^{\oplus m} \oplus A \oplus X^{\oplus n}$ pour tous entiers $m, n \geq 0$ et $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients. Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse* (**H3**) *pour un entier k. Si les systèmes de coefficients* $\ker(F)$ *et $coker(F)$ sont fortement stables par rapport à X en A, alors F est fortement stable par rapport à X en A.*

Enfin, dans la sixième partie, on commencera par introduire une notion de degré pour les systèmes de coefficients. Puis on s'attachera à l'exposition du théorème C, donnant un critère de stabilité homologique à coefficients tordus pour une catégorie homogène pré-tressée et des bornes explicites (c'est en ce sens une version quantitative).

Théorème C : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène pré-tressée vérifiant la propriété* (**H3**) *en (X, A) pour un entier k. Si $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un système de coefficients de degré r, alors le groupe d'homologie relatif en A au rang n pour l'application de suspension s'annule pour $i \leq \frac{n-r}{k}$.*
En particulier, l'application

$$H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right), F\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right), F\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right)\right)$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-r}{k}$ et un isomorphisme pour $i \leq \frac{n-r}{k} - 1$.

En particulier, le théorème C permet d'obtenir des résultats concrets. En l'appliquant à la catégorie des ensembles finis avec les injections, où la structure monoïdale est donnée par l'union disjointe $(FI, \sqcup, \emptyset)$ (que l'on définira exactement dans la suite du mémoire), on obtient :

Théorème : *Soit $F : FI \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients de degré k. Alors, l'application*

$$H_i\left(\mathfrak{S}_n, F\left(\{1, \ldots, n\}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(\mathfrak{S}_{n+1}, F\left(\{1, \ldots, n+1\}\right)\right)$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-k}{2}$ et est isomorphisme pour $i \leq \frac{n-k-2}{2}$.

On généralise ainsi le résultat obtenu par Nakaoka. On peut également utiliser le théorème C pour la catégorie des groupes libres de type fini avec les homomorphismes injectifs avec scindement fixe, où la structure monoïdale est donnée par le produit libre $\left(U\left(f\mathcal{G}\right)_{libre}, *, \{e\}\right)$ (que l'on définira plus précisément dans le corps du mémoire), et cela donne le théorème suivant.

Théorème : *Soit* $F : U(f\mathcal{G})_{libre} \longrightarrow \mathcal{A}$ *un système de coefficients de degré* k*. Alors, l'application*

$$H_i\left(Aut\left(F_n\right), F\left(F_n\right)\right) \longrightarrow H_i\left(Aut\left(F_{n+1}\right), F\left(F_{n+1}\right)\right)$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-k-1}{2}$ *et est isomorphisme pour* $i \leq \frac{n-k-3}{2}$.

Ce résultat est la conjecture A donnée par Randal-Williams dans [27].

1 Préliminaires

Nous allons introduire dans cette partie un certain nombre de notions fondamentales pour la compréhension du corps de ce mémoire. Il s'agit essentiellement de notions plus ou moins basiques de théorie des catégories. Nous nous basons surtout sur la référence [21] pour ce travail.

1.1 Groupoïdes

Tout d'abord, il est nécessaire d'introduire le concept de groupoïde, étendant la notion de groupe. Les exemples étudiés illustrant les résultats majeurs de ce mémoire auront un lien étroit avec eux.

Définition : *Soit $\mathcal{G}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{G}$ est un groupoïde si tout morphisme de $\mathcal{G}$ est inversible, c'est-à-dire un isomorphisme. De manière plus explicite, en plus des axiomes d'une catégorie, on ajoute l'hypothèse suivante : pour tous $A, B \in Obj(\mathcal{G})$, il existe une application*

$$\begin{array}{rcl} inv_{A,B} : \hom_{\mathcal{G}}(A,B) & \longrightarrow & \hom_{\mathcal{G}}(B,A) \\ f & \longmapsto & inv_{A,B}(f) = f^{-1} \end{array}$$

telle que $\forall f \in \hom_{\mathcal{G}}(A,B), f \circ inv_{A,B}(f) = id_B, inv_{A,B}(f) \circ f = id_A$.

Divers exemples de groupoïdes apparaissent de façon très naturelle.

Remarque : Souvent, on fait également l'hypothèse que $\mathcal{G}$ est une petite catégorie pour cette définition, c'est-à-dire une catégorie pour laquelle $Obj(\mathcal{G})$ et $\hom(\mathcal{G})$ sont des ensembles. Néanmoins, nous prenons des conditions plus larges ici.

Exemple : Un groupoïde à un objet x est la catégorie associée au groupe $G = Aut(x)$. Par conséquent, tout groupe peut être considéré comme un groupoïde à un objet. Un groupoïde peut alors se voir comme un groupe à plusieurs objets.

Exemple : Soit $\mathscr{S}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes sont les bijections entre ces ensembles. Alors, $\mathscr{S}$ est un groupoïde.

Exemple : Soit $f\mathcal{G}$ la catégorie dont les objets sont les groupes de type fini et les morphismes sont les isomorphismes entre ces groupes. Alors, $f\mathcal{G}$ est un groupoïde.

Par ailleurs, les groupoïdes sont également utiles dans l'étude de n'importe quelle catégorie. En effet, pour une catégorie $\mathcal{C}$ donnée, on peut définir un groupoïde particulier associé à $\mathcal{C}$.

Définition : *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit le groupoïde sous-jacent $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$ comme le sous-groupoïde maximal de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ définie par :*

(i) Objets : $Obj(\mathcal{G}) = Obj(\mathcal{C})$;

(ii) Morphismes : pour $A, B \in Obj(\mathcal{G}) = Obj(\mathcal{C})$, un morphisme dans le groupoïde $(\varphi : A \longrightarrow B) \in \hom_{\mathcal{G}}(A,B)$ est un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire que $(\varphi : A \longrightarrow B) \in \hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ et c'est un morphisme inversible) et tous les isomorphismes de $\mathcal{C}$ sont contenus dans $\mathcal{G}$.

Exemple : Soit Ens^f la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes sont les applications ensemblistes. Son groupoïde sous-jacent est alors $\mathscr{S}$.

Propriété : *On note* **Cat** *la catégorie petites des catégories et* **Grpd** *la catégorie des petits groupoïdes.*

On définit $\mathcal{G} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Grpd}$ le foncteur qui à une catégorie $\mathcal{C}$ associe son groupoïde sous-jacent $\mathcal{G}(\mathcal{C})$. Ce foncteur est adjoint à droite au foncteur d'oubli $Oub : \mathbf{Grpd} \to \mathbf{Cat}$. Cette propriété définit alors la propriété universelle du groupoïde sous-jacent d'une catégorie : celui-ci est unique à isomophisme près.

<u>*Démonstration*</u> : Soient $\mathcal{G}_1 \in Obj(\mathbf{Grpd})$ et $\mathcal{C} \in Obj(\mathbf{Cat})$. Soient $\varphi \in \hom_{\mathbf{Grpd}}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}(\mathcal{C}))$ et $\psi \in \hom_{\mathbf{Cat}}(Oub(\mathcal{G}_1), \mathcal{C})$.
Alors ψ envoie tout les morphismes de $\mathcal{G}_1$, c'est-à-dire des isomorphismes, sur des isomorphismes de $\mathcal{C}$. D'où, on pose $\forall A \in Obj(\mathcal{G}_1)$, $\mathcal{G}(\psi)(A) = \psi(A)$ et $\forall f \in \hom(\mathcal{G}_1)$, $\mathcal{G}(\psi)(f) = \psi(f)$. Ainsi : $Oub(\mathcal{G}(\psi)) = \psi$.
De même, on pose $\forall B \in Obj(\mathcal{G}_1) = Obj(Oub(\mathcal{G}_1))$, $\mathcal{G}(\varphi)(B) = \varphi(B)$ et $\forall f \in \hom(Oub(\mathcal{G}_1)) = \hom(\mathcal{G}_1)$, $\mathcal{G}(\psi)(f) = \psi(f)$. Ainsi : $\mathcal{G}(Oub(\varphi)) = \varphi$.
La naturalité par rapport aux deux catégories est évidente et se déduit facilement des définitions. □

1.2 Catégories monoïdales et foncteurs monoïdaux

La notion de catégorie monoïdale est au coeur de ce mémoire : par la suite, nous travaillerons systématiquement avec ce type de catégorie et les principaux résultats de notre travail porteront sur celle-ci. Il s'agit ici d'étendre le concept de produit tensoriel aux catégories.

Définition : *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) il existe $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ un bifoncteur appelé produit monoïdal ;

(ii) il existe $0 \in Obj(\mathcal{C})$ appelé objet unité ;

(iii) il existe $\alpha_{-_1,-_2,-_3} : ((-_1 \oplus -_2) \oplus -_3) \xrightarrow{\cong} (-_1 \oplus (-_2 \oplus -_3))$ un isomorphisme naturel entre les foncteurs $((-_1 \oplus -_2) \oplus -_3)$ et $(-_1 \oplus (-_2 \oplus -_3))$ appelé associateur, c'est-à-dire une transformation naturelle telle que

$$\forall A, B, C \in Obj(\mathcal{C}), \alpha_{A,B,C} : ((A \oplus B) \oplus C) \xrightarrow{\cong} (A \oplus (B \oplus C));$$

(iv) il existe $\lambda_- : 0 \oplus - \xrightarrow{\cong} id_{\mathcal{C}}(-)$ et $\rho_- : - \oplus 0 \xrightarrow{\cong} id_{\mathcal{C}}(-)$ des isomorphismes naturels de $0 \oplus -$ respectivement $- \oplus 0$ vers $id_{\mathcal{C}}(-)$, appelés respectivement foncteur unité à gauche et foncteur unité à droite, c'est-à-dire des transformations naturelles telles que

$$\forall A \in Obj(\mathcal{C}), \quad \lambda_A : 0 \oplus A \xrightarrow{\cong} A \quad ; \quad \rho_A : A \oplus 0 \xrightarrow{\cong} A$$

(v) les conditions de cohérence suivantes (T) et (P) sont vérifiées.
• *Axiome (P) (dit "du pentagone") : pour tous $A, B, C, D \in Obj(\mathcal{C})$, le diagramme ci-dessous est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
 & (A \oplus (B \oplus C)) \oplus D \arrow[dr, "\alpha_{A,B\oplus C,D}"] & \\
((A \oplus B) \oplus C) \oplus D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C}\oplus id_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\oplus B,C,D}"'] & & A \oplus ((B \oplus C) \oplus D) \arrow[d, "id_A\oplus\alpha_{B,C,D}"] \\
(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\oplus D}"'] & & A \oplus (B \oplus (C \oplus D))
\end{tikzcd}$$

• *Axiome (T) (dit "du triangle") : pout tous $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, le diagramme ci-dessous est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
(A \oplus 0) \oplus B \arrow[rr, "\alpha_{A,0,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes id_B"'] & & A \oplus (0 \oplus B) \arrow[dl, "id_A \oplus \lambda_B"] \\
& A \oplus B &
\end{tikzcd}$$

Certaines catégories monoïdales ont une structure qui se simplifie au niveau des isomorphismes naturels α, λ et ρ qui les définissent : ce sont les catégories monoïdales strictes. Nous n'étudierons d'ailleurs que des catégories de ce type à partir de la section 2.

Définition : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ une catégorie monoïdale. On dit que $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie monoïdale stricte si $\alpha_{-_1,-_2,-_3} = id_{\mathcal{C}}(-_1, -_2, -_3)$, $\lambda(-) = id_{\mathcal{C}}(-)$ et $\rho(-) = id_{\mathcal{C}}(-)$. Une catégorie monoïdale stricte se notera alors $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$.*

Exemple : La catégorie $(FI, \sqcup, \emptyset)$ dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes sont les injections entre ces ensembles, est monoïdale stricte : le produit monoïdal est l'union disjointe d'ensemble $\sqcup$ et l'élément unité est l'ensemble vide $\emptyset$.

Exemple : On considère la catégorie $S(\mathbb{K})$, dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et les morphismes sont les applications linéaires injectives qui se scindent : pour tous $V, W \in Obj(S(\mathbb{K}))$, un morphisme est une paire (f, H) où $f : V \to W$ est un homomorphisme injectif d'espaces vectoriels et H est un sous-espace vectoriel de W tel que $W = H \oplus f(V)$. $(S(\mathbb{K}), \oplus, 0)$ est monoïdale stricte : le produit monoïdal $\oplus$ est la somme directe $\oplus$ et l'élément unité est 0 l'espace vectoriel de dimension nulle.

Exemple : Le groupoïde $\mathscr{S}$ défini plus haut permet d'obtenir une catégorie monoïdale stricte : le produit monoïdal est donné par l'union disjointe d'ensemble $\sqcup$ et l'élément unité est l'ensemble vide $\emptyset$.

Exemple : Le groupoïde $f\mathcal{G}$ défini plus haut permet d'obtenir deux catégories monoïdales strictes. D'une part, on prend le produit libre de groupe $*$ comme produit monoïdal sur cette catégorie et l'élément unité est le groupe trivial $\{e\}$. On rappelle que le produit libre se définit de la façon suivante. Soient G_1 et G_2 deux groupes de type fini, $G_1 * G_2$ est le groupe dans lequel G_1 et G_2 s'injectent (on pose $G_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} G_1 * G_2$ et $G_2 \overset{i_2}{\hookrightarrow} G_1 * G_2$) qui vérifie la propriété universelle : pour tout groupe de type fini K, pour tout morphismes $K \overset{f_1}{\to} G_1$ et $K \overset{f_2}{\to} G_2$, il existe un unique morphisme $G_1 * G_2 \overset{f}{\to} K$ tel que $f \circ i_1 = f_1$ et $f \circ i_2 = f_2$. Le produit libre est un coproduit dans la catégorie des groupes. $(f\mathcal{G}, *, \{e\})$ est un groupoïde monoïdal strict.
D'autre part, on prend le produit direct de groupe $\times$ comme produit monoïdal sur cette catégorie et l'élément unité est le groupe trivial $\{e\}$. Le produit direct est un produit dans la catégorie des groupes. $(f\mathcal{G}, \times, \{e\})$ est un groupoïde monoïdal strict.

Voyons enfin la définition d'un certain type de foncteurs associé aux catégories monoïdales : les foncteurs monoïdaux. Ceux-ci nous seront uniquement utiles dans la deuxième partie de la section 2.

Définition : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus_{\mathcal{C}}, 0_{\mathcal{C}}, \alpha_{\mathcal{C}}, \lambda_{\mathcal{C}}, \rho_{\mathcal{C}})$ et $(\mathcal{D}, \oplus_{\mathcal{D}}, 0_{\mathcal{D}}, \alpha_{\mathcal{D}}, \lambda_{\mathcal{D}}, \rho_{\mathcal{D}})$ des catégories monoïdales. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est dit monoïdal s'il préserve la structure monoïdale. De façon plus explicite, on associe au foncteur F :*

• *une transformation naturelle $\{\phi_{A,B} : (F(A) \oplus_{\mathcal{D}} F(B)) \longrightarrow F(A \oplus_{\mathcal{C}} B)\}_{A,B \in Obj(\mathcal{C})}$, ces applications étant appelées applications de cohérence ;*

• *un morphisme $\phi : 0_{\mathcal{D}} \longrightarrow F(0_C)$, appelé morphisme de structure ;*

tels que $\forall A, B, C \in Obj\,(\mathcal{C})$, les trois diagrammes suivants sont commutatifs dans la catégorie $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
\left(F\left(A\right) \oplus_{\mathcal{D}} F\left(B\right)\right) \oplus_{\mathcal{D}} F\left(C\right) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "\phi_{A,B} \oplus_{\mathcal{D}} 0_{\mathcal{D}}"'] & F\left(A\right) \oplus_{\mathcal{D}} \left(F\left(B\right) \oplus_{\mathcal{D}} F\left(C\right)\right) \arrow[d, "0_{\mathcal{D}} \oplus_{\mathcal{D}} \phi_{A,B}"] \\
F\left(A \oplus_{\mathcal{C}} B\right) \oplus_{\mathcal{D}} F\left(C\right) \arrow[d, "\phi_{(A \oplus_{\mathcal{C}} B),C}"'] & F\left(A\right) \oplus_{\mathcal{D}} F\left(BC\right) \arrow[d, "\phi_{A,B \oplus_{\mathcal{C}} C}"] \\
F\left(\left(A \oplus_{\mathcal{C}} B\right) \oplus_{\mathcal{C}} C\right) \arrow[r, "F(\alpha_{\mathcal{C}})"] & F\left(A \oplus_{\mathcal{C}} \left(B \oplus_{\mathcal{C}} C\right)\right)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F\left(A\right) \oplus_{\mathcal{D}} 0_{\mathcal{D}} \arrow[r, "0_{\mathcal{D}} \oplus_{\mathcal{D}} \phi"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{D}}"'] & F\left(A\right) \oplus_{\mathcal{D}} F\left(0_{\mathcal{C}}\right) \arrow[d, "\phi_{A,0_{\mathcal{C}}}"] \\
F\left(A\right) & F\left(A \oplus_{\mathcal{C}} 0_{\mathcal{C}}\right) \arrow[l, "F(\rho_{\mathcal{C}})"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0_{\mathcal{D}} \oplus_{\mathcal{D}} F\left(B\right) \arrow[r, "\phi \oplus_{\mathcal{D}} 0_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "\lambda_{\mathcal{D}}"'] & F\left(0_{\mathcal{C}}\right) \oplus_{\mathcal{D}} F\left(B\right) \arrow[d, "\phi_{0_{\mathcal{C}},B}"] \\
F\left(B\right) & F\left(0_{\mathcal{C}} \oplus_{\mathcal{C}} B\right) \arrow[l, "F(\lambda_{\mathcal{C}})"]
\end{tikzcd}$$

1.3 Catégories monoïdales tressées et symétriques

Par la suite, certaines catégories monoïdales munies de propriétés supplémentaires nous seront utiles pour notre étude. Nous exposons donc ici ces nouveaux types de catégories et poursuivons avec les exemples traités plus haut. On commence par s'intéresser aux catégories monoïdales tressées.

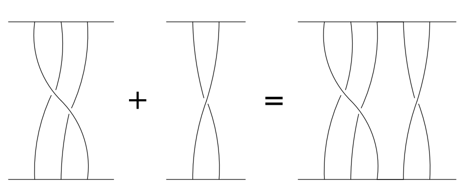
Définition : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ une catégorie monoïdale. On définit $\oplus^{op} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ le bifoncteur tel que $\forall A, B \in Obj\,(\mathcal{C})\,, A \oplus^{op} B = B \oplus A$. On dit que $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie monoïdale tressée s'il existe un isomorphisme naturel b du foncteur $- \oplus -$ vers le foncteur $- \oplus^{op} -$, c'est-à-dire une transformation naturelle telle que*

$$\forall A, B \in Obj\,(\mathcal{C})\,, b_{A,B} : A \oplus B \xrightarrow{\cong} B \oplus A.$$

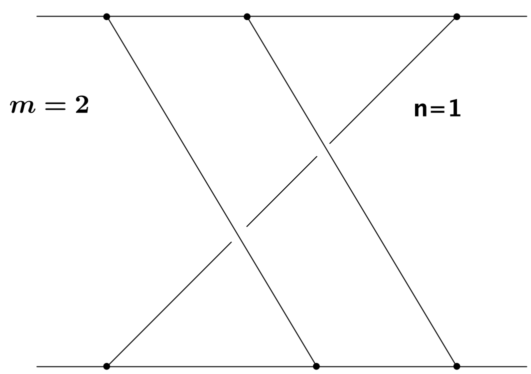
Exemple : L'exemple classique est celui de la catégorie $\mathcal{B}$ associée aux groupes de tresses. Pour des rappels sur les groupes de tresses et une étude approfondie de cette catégorie, on se référera au chapitre $XIII$ de [19] et à la partie 4 de la section XI de [21]. La catégorie associée se définit en combinant ces groupes de tresses. On définit $\mathcal{B}$ de la manière suivante :

- Objets : les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$;
- Morphismes : $\hom_{\mathcal{B}}(n,m) = \begin{cases} B_n & si\ \ n = m \\ \emptyset & si\ \ n \neq m \end{cases}$ où B_n désigne le groupe des tresses $n \longrightarrow n$.

On pose un produit monoïdal $+ : B \times B \longrightarrow B$ qui d'une part se définit naturellement sur les objets par l'addition usuelle entre deux entiers naturels ; d'autre part, pour les morphismes, le produit monoïdal de deux tresses consiste à concaténer deux tresses l'une à côté de l'autre, comme sur le dessin qui suit :



Cette opération est évidemment associative et la tresse vide sur l'objet nul (notée 0) en est l'unité. Ainsi, $(B, +, 0)$ est une catégorie monoïdale stricte. Cette catégorie est de plus tressée. En effet, pour $m, n \in \mathbb{N}$ puisque $m + n = n + m$ (car l'addition est commutative sur les entiers naturels), on peut définir le tressage $b_{m,n} : m + n \xrightarrow{\cong} n + m$ sur les tresses en faisant passer les m tresses au-dessus des n tresses :



L'isomorphisme $b_{-,-}$ ainsi défini est naturel en m et en n (Voir [21]).

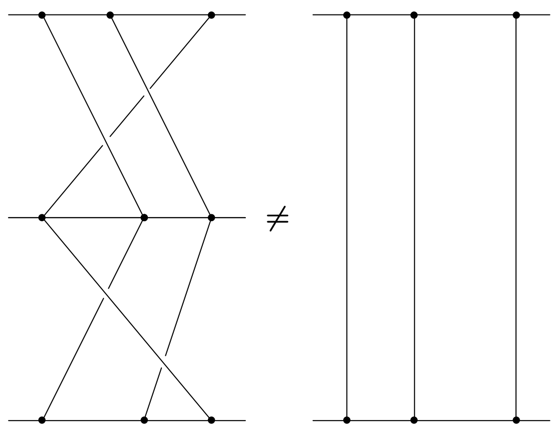
Voyons maintenant un type particulier de catégorie monoïdale tressée : les catégories monoïdales symétriques.

Définition : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho, b)$ une catégorie monoïdale tressée. On dit que $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho, b)$ est une catégorie monoïdale symétrique si $\forall A, B \in Obj\,(\mathcal{C})\,, b_{A,B} = b^{-1}_{B,A}$.*

Exemple : Le groupoïde $\mathscr{S}$ défini ci-dessus est monoïdal et symétrique, la symétrie étant donnée par la bijection canonique $A \sqcup B \xrightarrow{\cong} B \sqcup A$, isomorphisme naturel en les deux variables.

Exemple : Le groupoïde monoïdal $(f\mathcal{G}, *, \{e\})$ est symétrique, le tressage symétrique étant donné par l'isomorphisme canonique $G_1 * G_2 \overset{\cong}{\to} G_2 * G_1$, isomorphisme naturel en les deux variables, provenant de la propriété universelle du produit libre : puisque $G_1 \hookrightarrow G_1 * G_2$, $G_1 \hookrightarrow G_2 * G_1$, $G_2 \hookrightarrow G_1 * G_2$ et $G_2 \hookrightarrow G_2 * G_1$, il existe un unique morphisme $G_1 * G_2 \overset{f}{\to} G_2 * G_1$ et il existe un unique morphisme $G_2 * G_1 \overset{g}{\to} G_1 * G_2$ tels que $f \circ g = id_{G_2 * G_1}$ et $g \circ f = id_{G_1 * G_2}$.
Le groupoïde monoïdal $(f\mathcal{G}, \times, \{e\})$ est symétrique, le tressage symétrique étant donné par l'isomorphisme canoniques $G_1 \times G_2 \overset{\cong}{\to} G_2 \times G_1$, isomorphisme naturel en les deux variables, provenant de la propriété universelle du produit libre : puisque $G_1 \times G_2 \twoheadrightarrow G_1$, $G_1 \times G_2 \twoheadrightarrow G_2$, $G_2 \times G_1 \twoheadrightarrow G_1$ et $G_2 \times G_1 \twoheadrightarrow G_2$, il existe un unique morphisme $G_1 \times G_2 \overset{f}{\to} G_2 \times G_1$ et il existe un unique morphisme $G_2 \times G_1 \overset{g}{\to} G_1 \times G_2$ tels que $f \circ g = id_{G_2 \times G_1}$ et $g \circ f = id_{G_1 \times G_2}$.

Remarque : Il existe des catégories tressées qui ne sont pas symétriques. Par exemple, la catégorie $(\mathcal{B}, +, 0)$ est monoïdale stricte tressée, néanmoins, elle n'est pas symétrique : pour tous objets $m, n \in \mathbb{N}$, $b_{m,n}^{-1} \neq b_{n,m}$. En effet :



2 Catégories homogènes

Cette deuxième partie s'attache à l'étude des catégories homogènes. Nous les présentons et en donnons quelques propriétés remarquables et utiles pour la suite du mémoire. Le principal résultat de cette section, qui sera expliqué dans la deuxième partie, permet d'associer une catégorie homogène à n'importe quel groupoïde monoïdal tressé vérifiant de faibles conditions supplémentaires. Enfin, nous verrons une alternative à ce résultat via une construction due à Quillen.

2.1 Catégories pré-tressées

Au préalable, intéressons-nous aux catégories monoïdales pré-tressées. C'est une notion plus générale que celle de catégorie tressée, qui se révèlera utile pour les catégories homogènes de cette section. En effet, l'étude de la stabilité homologique à coefficients tordus utilisera l'application de stabilisation inférieure, envoyant A sur $X \oplus A$, et l'application de stabilisation supérieure, envoyant A sur $A \oplus X$, et on aura besoin de ce type de catégorie.

Définition : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ une catégorie monoïdale. On suppose que l'élément unité 0 est initial pour la catégorie. On note $(\mathcal{G}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ le groupoïde sous-jacent à $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$. On dit que $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie monoïdale pré-tressée si :*
- *$(\mathcal{G}, \oplus, 0, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie monoïdale tressée ;*
- *Pour tous $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, le tressage b associé au groupoïde vérifie la relation :*

$$b_{A,B} \circ (id_A \oplus \iota_B) = \iota_B \oplus id_A : A \longrightarrow B \oplus A$$

où $\iota_B : 0 \longrightarrow B$ désigne l'unique morphisme de $\mathcal{C}$ allant de 0 vers B (défini puisque 0 est initial).

Tous les exemples de catégories homogènes qui apparaissent dans le corps de ce mémoire seront pré-tressés. Ils seront en fait construit à partir d'un groupoïde monoïdal tressé sous-jacent. On remarque qu'une catégorie monoïdale tressée est en particulier pré-tressée. Néanmoins la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : On considère la catégorie $\mathcal{C}_2$ définie par :

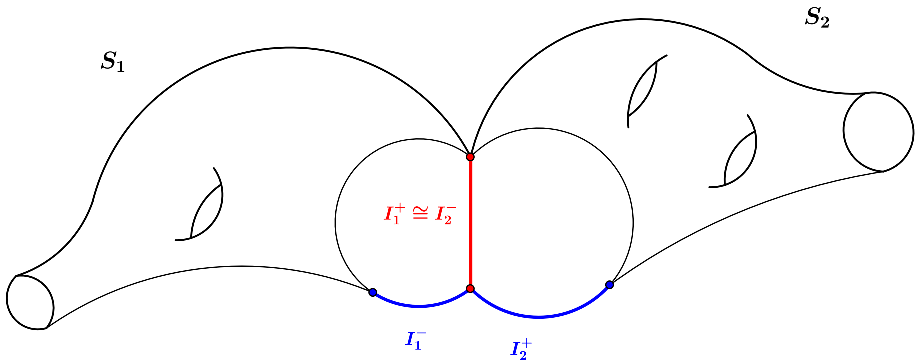
- Objets : les surfaces décorées (S, I), où S est une surface compacte connexe possédant au moins une composante de bord et $I : [-1, 1] \hookrightarrow \partial S$ un intervalle paramétré du bord de S ;

- Morphismes : on note $\partial_0 S$ la composante de bord de S qui contient l'intervalle I et $\partial' S = \partial S \setminus \partial_0 S$ les autres composantes de bords de S. Soient (S_1, I_1) et (S_2, I_2) des objets de $\mathcal{C}_2$, on définit les morphismes de (S_1, I_1) vers (S_2, I_2) par :

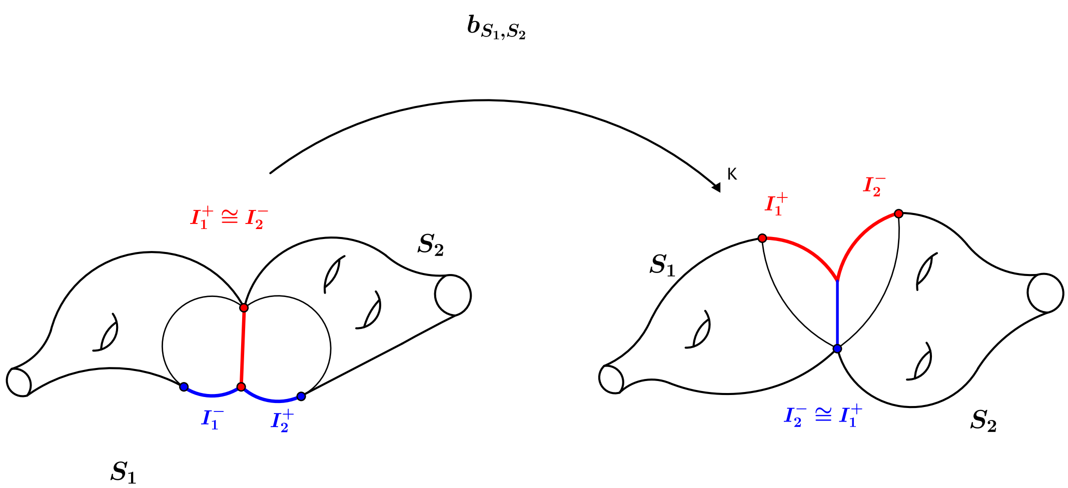
$$\hom_{\mathcal{C}_2}((S_1, I_1), (S_2, I_2)) := \pi_0 (Plong^c((S_1, \partial' S_1; I_1), (S_2, \partial' S_2; I_2)))$$

à savoir, la classe d'isotopie des plongements $f : S_1 \hookrightarrow S_2$, envoyant $\partial' S_1$ sur $\partial' S_2$, commutant avec les applications $[-1, 1] \longrightarrow I_{1,2}$ et si S_2 est non-orientable alors le complémentaire de S_1 dans S_2 est soit de genre 0 soit non-orientable. On remarque que le complémentaire de S_1 dans S_2 est nécessairement connexe. De plus, si S_1 et S_2 sont orientables, alors le plongement préserve les orientations induites par I_1 et I_2.

On peut définir un produit monoïdal $\natural : \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ de la façon suivante : soient (S_1, I_1) et (S_2, I_2) des objets de $\mathcal{C}_2$, $(S_1 \natural S_2, I_1 \natural I_2)$ est la surface obtenue en recollant le demi-intervalle de droite $I_1^+ \in \partial S_1$ avec le demi-intervalle de gauche $I_2^- \in \partial S_2$ et en posant $I_1 \natural I_2 = I_1^- \cup I_2^+$ (voir figure ci-dessous). L'unité pour ce produit est le disque (D^2, I).



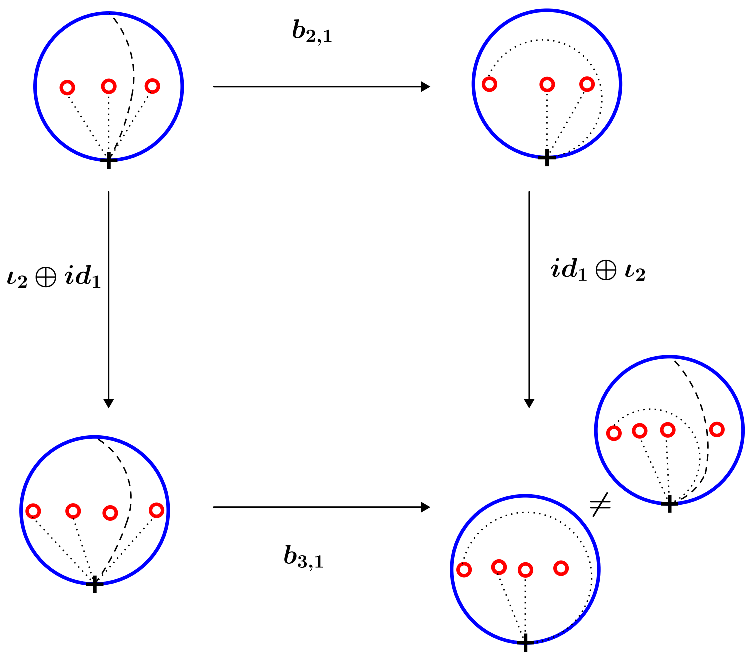
Par ailleurs, cette catégorie est pré-tressée. En effet, on définit, pour (S_1, I_1) et (S_2, I_2) des objets de $\mathcal{C}_2$, le pré-tressage $b_{S_1,S_2} : (S_1 \natural S_2, I_1 \natural I_2) \longrightarrow (S_2 \natural S_1, I_2 \natural I_1)$ en décollant le demi-intervalle de droite $I_1^+ \in \partial S_1$ du demi-intervalle de gauche $I_2^- \in \partial S_2$ et en collant le demi-intervalle de gauche $I_1^- \in \partial S_1$ avec le demi-intervalle de droite $I_2^+ \in \partial S_2$. Le dessin ci-dessous illustre cette construction.



Ce pré-tressage provient en fait du tressage du groupoïde sous-jacent $\mathcal{M}_2$ des surfaces décorées (on se référera à la section 6.4 de [32] pour plus de détails). On a bien la relation caractéristique :

$$b_{S_1,S_2} \circ (id_{S_1} \natural \iota_{S_2}) = \iota_{S_2} \natural id_{S_1} : S_1 \longrightarrow S_2 \natural S_1.$$

On considère maintenant la sous-catégorie de $\mathcal{C}_2$ dont les objets sont les disques épointés. Alors, on constate que le pré-tressage $b_{-,-}$ ne définit pas un tressage. En effet, l'exemple suivant contredit la naturalité du tressage par rapport aux morphismes. On note $b_{n,m}$ le pré-tressage n étant le nombre de trous à gauche de la séparation par rapport à laquelle on fait le tressage et m le nombre de trous à droite de la séparation. Les indices sur les applications désigne la portion du disque (par son nombre de trous) sur laquelle l'application agit.



2.2 Introduction aux catégories homogènes et premières propriétés

En premier lieu, nous nous devons de définir ce que sont les catégories homogènes, à partir desquelles nous travaillerons dans la suite de l'article. Convenons tout d'abord de définitions basiques, nécessaires à celle de catégorie homogène. On considère une catégorie monoïdale stricte et petite $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ où l'objet unité 0 est initial. Pour tout objet A de cette catégorie, $\iota_A : 0 \longrightarrow A$ désigne l'unique morphisme de $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ allant de 0 vers A. Pour toute paire (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$, on définit ainsi :

- une application privilégiée
$$\iota_A \oplus id_B : (B = 0 \oplus B) \longrightarrow A \oplus B;$$
- un ensemble caractérisé par cette application privilégiée
$$Fix\,(B) = Fix\,(B, A \oplus B) = \{\phi \in Aut\,(A \oplus B) \mid \phi \circ (\iota_A \oplus id_B) = \iota_A \oplus id_B\}\,.$$

De plus, puisque $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ est supposée petite, $\hom(A, B)$ est un ensemble et $Aut(B)$ définit un groupe (pour la composition des applications). On fait agir $Aut(B)$ par post-composition sur $\hom(A, B)$:

$$\begin{array}{rcl} Aut(B) \times \hom(A, B) & \longrightarrow & \hom(A, B). \\ (\phi, f) & \longmapsto & \phi \circ f \end{array}$$

On peut maintenant définir convenablement les catégories homogènes.

Définition : *Soit* $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ *une catégorie monoïdale stricte et petite. On dit que* $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ *est une catégorie homogène si* 0 *est un objet initial dans* $\mathcal{C}$ *et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(**H1**) *Pour toute paire d'objets* $A, B \in Obj(\mathcal{C})$*, l'action pour la composition de* $Aut(B)$ *sur* $\hom(A, B)$ *est transitive.*

(**H2**) *Pour toute paire d'objets* $A, B \in Obj(\mathcal{C})$*, l'application*

$$\begin{array}{ccc} Aut(A) & \longrightarrow & Aut(A \oplus B) \\ f & \longmapsto & f \oplus id_B \end{array}$$

est injective et d'image $Fix(B) = \{\phi \in Aut(A \oplus B) \mid \phi \circ (\iota_A \oplus id_B) = \iota_A \oplus id_B\}$.

Remarque : Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ vérifiant (**H1**) et (**H2**) est determinée par son groupoïde sous-jacent.

Nous nous plaçons en fait ici dans le cadre de notions définies par Djament-Vespa pour l'homologie des foncteurs (voir [11] et [31]). Voyons quelques exemples classiques de catégories homogènes.

Exemple : Un premier exemple de catégorie homogène est la catégorie FI. Cette catégorie est petite et $\emptyset$ est objet initial.
D'une part, pour tout $B \in Obj(FI)$, $Aut_{FI}(B) = \mathfrak{S}_{|B|}$, le groupe des permutations des éléments de B. Ainsi, pour tout ensemble fini A, $Aut_{FI}(B)$ agit transitivement sur $\hom_{FI}(A, B) = Inj(A, B)$. (**H1**) est donc vérifiée.
D'autre part, $\forall A, B \in Obj(FI)$:

$$\begin{array}{ccc} Aut(A) & \longrightarrow & Aut(A \sqcup B) \\ f & \longmapsto & f \sqcup id_B = \begin{cases} f & sur \;\; A \\ id_B & sur \;\; B \end{cases} \end{array}$$

est évidemment une injection. De plus, pour tout $f \in Aut(A)$, puisque $\iota_A : 0 \longrightarrow A$ est l'unique morphisme de $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ allant de 0 vers A, alors $f \circ \iota_A : 0 \longrightarrow A$ est un morphisme de $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ allant de 0 vers A. Donc : $f \circ \iota_A = \iota_A$. Ainsi, $\forall f \in Aut(A)$:

$$(f \sqcup id_B) \circ (\iota_A \sqcup id_B) = \begin{cases} f \circ \iota_A = \iota_A & sur \;\; 0 \\ id_B \circ id_B = id_B & sur \;\; B \end{cases} = \iota_A \sqcup id_B.$$

Réciproquement, soit $\Phi \in Fix(B)$. Alors, par définition $\Phi \circ (\iota_A \sqcup id_B) = \iota_A \sqcup id_B$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \Phi \circ \iota_A = \iota_A & sur \;\; 0 \\ \Phi \circ id_B = id_B & sur \;\; B \end{cases}$$

et donc $\Phi_{|B} = id_B$ (puisque id_B est l'élément neutre de $Aut(B)$). On écrit donc $\Phi = \tilde{\Phi} \sqcup id_B$ où $\tilde{\Phi} \in Aut(A)$. D'où, l'image de l'injection considérée est $Fix(B)$. (**H2**) est donc vérifiée.
La catégorie FI connaît un regain d'intérêt depuis quelques années dans les travaux de Farb et de ses coauteurs (voir [7] et [8]).

Exemple : On considère la catégorie monoïdale stricte $(S(\mathbb{K}), \oplus, 0)$. Soient $V, W \in Obj(FVect)$. Le groupe général linéaire $GL(W)$ est le groupe d'automorphismes de W.
Les complémentaires de sous-espaces isomorphes de W sont isomorphes. Soit $(f, H) \in \hom(V, W)$, donc $W = H \oplus f(V)$. Alors, pour $\varphi \in GL(W)$, $\varphi(H) \cong H$ et donc $\varphi \circ f(V) \cong f(V)$. Puisque $\varphi \in GL(W)$, $\forall (f, H), (g, H') \in \hom(V, W)$, $\varphi \circ f(V) \cong f(V) \cong g(V) \cong \varphi \circ g(V)$, et par conséquent $H \cong H'$. De plus, $\forall (f, H), (g, H') \in \hom(V, W)$, puisque $f(V) \cong g(V)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, il existe

une matrice inversible, c'est-à-dire un élément de $GL(W)$, permettant de passer d'une base de $f(V)$ à celle de $g(V)$: $\exists \varphi \in GL(W)$ telle que $\varphi \circ f = g$. $GL(W)$ agit donc bien sur $\hom(V, W)$, et cette action est transitive. (**H1**) est donc vérifiée.
Le morphisme privilégié $\iota_V \oplus id_W : W \to V \oplus W$ est en fait égal à la paire (i_W, V) constituée de l'inclusion canonique $i_W : W \hookrightarrow V \oplus W$ et de la copie de V comme complémentaire. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \longrightarrow & GL(V \oplus W). \\ f & \longmapsto & f \oplus id_W \end{array}$$

Cette application est évidemment injective. L'image de $GL(V)$ par cette application est

$$Fix(W) = \{\phi \in GL(V \oplus W) \mid \phi \circ (\iota_V \oplus id_W) = \iota_V \oplus id_W\}.$$

En effet : d'une part, $\forall f \in GL(V)$, $(f \oplus id_W) \circ (\iota_V \oplus id_W) = (f \oplus id_W) \circ (i_W, V) = (i_W, f(V)) = (i_W, V)$ car $V \oplus W = f(V) \oplus W$; d'autre part, soit $\Phi \in GL(V \oplus W)$ fixant (i_W, V), alors Φ doit laisser globalement invariant l'ensemble V et doit être fixe sur tout élément de W (c'est-à-dire égal à l'identité sur W), et par conséquent il doit exister $f \in GL(V)$ tel que $\Phi = f \oplus id_W$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "{(i_W,V)}"] \arrow[d, "{(i_W,V)}"'] & V \oplus W \\ V \oplus W \arrow[ur, "f \oplus id_W"'] & \end{tikzcd}$$

(**H2**) est donc vérifiée.

Exemple : On considère la catégorie monoïdale stricte $(\mathcal{C}_2, \natural, D^2)$. C'est une catégorie homogène. En effet :
(**H1**) : Soient (S_1, I_1), (S_2, I_2) deux objets de $\mathcal{C}_2$ et f, f' deux représentants de morphismes de $\hom_{\mathcal{C}_2}((S_1 I_1), (S_2, I_2))$. Alors on peut montrer que (voir page 34 de [32]), pour C difféomorphe à C' :

$$S_2 = f(S_1) \underset{f(\partial_0 S_1 \setminus I_1)}{\cup} C = f'(S_1) \underset{f'(\partial_0 S_1 \setminus I_1)}{\cup} C'.$$

Soit $g : C \longrightarrow C'$ un difféomorphisme envoyant $f(\partial_0 S_1 \setminus I_1)$ sur $f'(\partial_0 S_1 \setminus I_1)$ via $f' \circ f^{-1}$, on obtient un difféomorphisme :

$$\phi = (f' \circ f^{-1}) \natural g : S_2 \longrightarrow S_2$$

tel que $\phi \circ f = f'$. ϕ fixe ainsi $I_2 = f(I_1) = f'(I_1)$. ϕ représente donc un élément de $Aut_{\mathcal{C}_2}(S_2, I_2)$ qui agit donc transitivement sur $\hom_{\mathcal{C}_2}((S_1 I_1), (S_2, I_2))$.
(**H2**) : pour la démonstration du fait que $Aut_{\mathcal{C}_2}(S_1, I_1) \longrightarrow Aut_{\mathcal{C}_2}(S_1 \natural S_2, I_1 \natural I_2)$ est injective, on renvoie au troisième pargraphe de la page 34 de [32]. Il nous faut montrer que l'image de cette application est $Fix(S_2, I_2)$, ce qui correspond à l'exactitude en π_0 du terme central de suite exacte longue associée à la fibration (6.1) de [32].

On peut également donner des exemples de catégories qui ne sont pas homogènes.

Exemple : La catégorie Ens^f (les objets sont les ensembles finis et les morphismes sont les applications ensemblistes) n'est pas homogène car la propriété (**H1**) n'est alors pas vérifiée. En effet, prenons par exemple dans cette catégorie $A = B = \{0, 1\}$ et considérons les morphsimes $id_{\{0,1\}} : x \in \{0, 1\} \longmapsto x$ et $0_{\{0,1\}} : x \in \{0, 1\} \longmapsto 0$. Supposons qu'il existe $\varphi \in Aut(\{0, 1\})$ tel que $\varphi \circ 0_{\{0,1\}} = id_{\{0,1\}}$, alors $1 = \varphi \circ 0_{\{0,1\}}(1) = \varphi(0) = \varphi \circ 0_{\{0,1\}}(0) = 0$: il y a contradiction.

Exemple : La catégorie $M(\mathbb{K})$ (les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur un corps

$\mathbb{K}$ et les morphismes sont les applications linéaires injectives) n'est pas homogène, car la propriété (**H2**) n'est pas vérifiée. En effet, soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$, et on considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi : Aut(V) & \longrightarrow & Aut(V \oplus W). \\ f & \longmapsto & f \oplus id_W \end{array}$$

Ainsi :

$$Fix\,(W) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} M & 0 \\ N & id_W \end{array} \right), \det(M) \neq 0 \right\} \neq \left\{ \left(\begin{array}{cc} M & 0 \\ 0 & id_W \end{array} \right), \det(M) \neq 0 \right\} = Im\,(\phi)\,.$$

Intéressons-nous maintenant à des propriétés basiques et directes des catégories homogènes. Elles seront la clef de voûte de notre travail dans les sections 3, 4 et 5 suivantes, au travers l'étude de groupes construits à partir de certains types de groupes d'automorphismes de ces catégories.

Propriétés : *Soit* $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ *une catégorie homogène. Soient* $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$*. Alors :*

(i) $\hom(B, A \oplus B) \cong Aut\,(A \oplus B)\,/Aut\,(A)$.

En effet, considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} Aut\,(A \oplus B) & \overset{\Psi}{\longrightarrow} & \hom(B, A \oplus B)\,. \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ (\iota_A \oplus id_B) \end{array}$$

D'après (**H1**), l'action pour la post-composition de $Aut\,(A \oplus B)$ sur $\hom(B, A \oplus B)$ est transitive. A fortiori, pour tout $f \in \hom(B, A \oplus B)$, il existe $\psi \in Aut\,(A \oplus B)$ tel que $\psi \circ (\iota_A \oplus id_B) = f$: Ψ est donc surjective. D'après (**H2**), l'application $Aut(A) \to Aut\,(A \oplus B)$ envoyant $f \in Aut(A)$ sur $f \oplus id_B$ est injective et d'image $Fix\,(B)$ (et donc $Fix\,(B) \cong Aut\,(A)$). Or :

$$\ker(\Psi) = \{\psi \in Aut\,(A \oplus B) \mid \psi \circ (\iota_A \oplus id_B) = \iota_A \oplus id_B\} = Fix\,(B)\,.$$

D'où $\ker(\Psi) \cong Aut\,(A)$. Par un résultat classique de théorie des groupes, On en déduit que :

$$\hom(B, A \oplus B) \cong Aut\,(A \oplus B)\,/\ker(\Psi) \cong Aut\,(A \oplus B)\,/Aut\,(A)\,.$$

(ii) $End(A) := \hom(A, A) = Aut(A)$.

En effet, l'unité 0 est supposée objet initial et n'admet donc pas d'automorphisme non-trivial. Ainsi :

$$\hom(A, A) = \hom(A, 0 \oplus A)\,/Aut\,(0) = Aut(A).$$

(iii) Si $\hom(A, B) \neq \emptyset$ *et* $\hom(B, A) \neq \emptyset$*, alors* $A \cong B$*.*

En effet, soient $f \in \hom(B, A)$ et $g \in \hom(A, B)$, alors on obtient $f \circ g = \phi \in Aut\,(A)$ et $g \circ f = \psi \in Aut\,(B)$ qui sont donc inversibles, et de plus $g \circ f \circ g = \psi \circ g = g \circ \phi$. D'après les deux premières équations, il s'ensuit que $f \circ \left(g \circ \phi^{-1}\right) = id_A$ et $\left(\psi^{-1} \circ g\right) \circ f = id_B$. On déduit de la troisième égalité que $g \circ \phi^{-1} = \psi^{-1} \circ g$. D'où f et g sont inversibles et donc $A \cong B$.

Définition : *Soient* $X, A \in Obj\,(\mathcal{C})$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on définit les groupes* $G_n := Aut\,(A \oplus X^{\oplus n})$ *et l'application canonique*

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_n^X : G_n & \longrightarrow & \left(G_{n+1} = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n} \oplus X\right)\right). \\ f & \longmapsto & f \oplus id_X \end{array}$$

Remarques : D'après (**H2**), l'application Σ_n^X est injective : G_n peut donc se voir comme un sous-groupe de G_{n+1}. Ainsi, pour une paire d'objets $X, A \in Obj\,(\mathcal{C})$, on peut définir une suite de groupes emboîtés :

$$G_1 \overset{\Sigma_1^X}{\hookrightarrow} G_2 \cdots \overset{\Sigma_{n-1}^X}{\hookrightarrow} G_n \overset{\Sigma_n^X}{\hookrightarrow} G_{n+1} \overset{\Sigma_{n+1}^X}{\hookrightarrow} \cdots$$

Ce type de suite donne des informations majeures sur la catégorie $\mathcal{C}$ considérée. En particulier, d'après le point (i) de la propriété, on obtient que :

$$\hom\left(X, A \oplus X^{\oplus n+1}\right) \cong G_{n+1}/G_n$$

ce qui signifie qu'il y a $\mid G_{n+1}/G_n \mid$ différentes applications dans $\mathcal{C}$, allant de X à $A \oplus X^{\oplus n+1}$, toutes liées en post-composant par des éléments de G_{n+1}. Le groupe G_n est ainsi isomorphe au sous-groupe de G_{n+1} qui fixe n'importe laquelle de ces applications. La catégorie contient ainsi G_{n+1}/G_n inclusions distinctes de G_n dans G_{n+1}.

Les sections suivantes s'attacheront ainsi à l'étude de la stabilité homologique de telles suites. Montrons maintenant une version symétrisée de l'hypothèse (**H2**) pour les catégories homogènes pré-tressées (qui nous seront utiles pour l'étude de la stabilité homologique à coefficients tordus).

Proposition : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène pré-tressée. Soient $A, B \in Obj\,(\mathcal{C})$. On considère l'application :*

$$\begin{array}{ccc} Aut\,(B) & \longrightarrow & Aut\,(A \oplus B)\,. \\ f & \longmapsto & id_A \oplus f \end{array}$$

Cette application définit l'isomorphisme suivant :

$$Aut\,(B) \xrightarrow{\cong} Fix\,(A) = Fix\,(A, A \oplus B) := \{\phi \in Aut\,(A \oplus B)\,|\phi \circ (id_A \oplus \iota) = id_A \oplus \iota\}\,.$$

<u>*Démonstration*</u> : Par définition, l'application $b_{A,B} : A \oplus B \to B \oplus A$ satisfait l'égalité $b_{A,B} \circ (id_A \oplus \iota_B) = (\iota_B \oplus id_A) : A \to B \oplus A$, et c'est une transformation naturelle. Donc la conjugaison par $b_{A,B}$ envoie les morphismes de la forme $\varphi \oplus id_A \in Aut\,(B \oplus A)$ sur $id_A \oplus \varphi \in Aut(A \oplus B)$ pour $\varphi \in Aut\,(B)$. Ensuite, remarquons que la conjugaison par $b_{A,B}$ donne un isomorphisme $Fix\,(A, B \oplus A) \cong Fix\,(A, A \oplus B)$. En effet, considérons :

$$\begin{array}{ccc} Fix\,(A, B \oplus A) & \overset{\Phi}{\longrightarrow} & Fix\,(A, A \oplus B)\,. \\ \phi & \longmapsto & b_{A,B}^{-1} \circ \phi \circ b_{A,B} \end{array}$$

Il s'agit clairement d'un morphisme de groupes pour la composition. Soit $\phi' \in Fix\,(A, A \oplus B)$, alors $b_{A,B} \circ \phi' \circ b_{A,B}^{-1} \in Fix\,(A, B \oplus A)$ et $b_{A,B}^{-1} \circ \left(b_{A,B} \circ \phi' \circ b_{A,B}^{-1}\right) \circ b_{A,B} = \phi'$. Φ est donc surjective. Par ailleurs, soit $\phi \in Fix\,(A, B \oplus A)$ tel que $\phi \in \ker(\Phi)$, donc $b_{A,B}^{-1} \circ \phi \circ b_{A,B} = id_{A \oplus B}$. D'où, en composant à gauche par $b_{A,B}$ et à droite par $b_{A,B}^{-1}$, on obtient que $\phi = id_{A \oplus B}$. Φ est donc injective et a fortiori un isomorphisme.
De plus, d'après (**H2**), on a l'isomorphisme $Fix\,(A, B \oplus A) \cong Aut\,(B)$. On en déduit le résultat énoncé dans la proposition. $\square$

2.3 Construction générale des catégories homogènes

Dans cette sous-partie, nous allons nous intéresser à une méthode générale de construction d'une catégorie homogène, à partir d'un groupoïde monoïdal tressé vérifiant des conditions supplémentaires relativement faibles. Nous verrons ensuite des exemples illustrant ce principe.

Théorème 1 : *Soit* $(\mathcal{G},\oplus,0)$ *un groupoïde monoïdal strict tressé satisfaisant les deux conditions :*

(i) $Aut(0)=\{id\}$ *;*

(ii) *Pour tous objets* $A,B\in Obj\,(\mathcal{G})$*, l'application suivante est injective :*

$$\begin{array}{ccc} Aut_{\mathcal{G}}(A) & \longrightarrow & Aut_{\mathcal{G}}(A\oplus B). \\ f & \longmapsto & f\oplus id_B \end{array}$$

Alors, il existe une catégorie homogène pré-tressée $(U\,(\mathcal{G})\,,\oplus,0)$ *telle que* $(\mathcal{G},\oplus,0)$ *est son groupoïde monoïdal tressé sous-jacent (et le pré-tressage de* $U\,(\mathcal{G})$ *se restreint au tressage de* $\mathcal{G}$*).*
De plus, $U\,(\mathcal{G})$ *a la propriété universelle suivante : soit* $(\mathcal{C},\oplus_{\mathcal{C}},0_{\mathcal{C}})$ *une autre catégorie homogène pré-tressée telle que* $(\mathcal{G},\oplus,0)$ *est son groupoïde monoïdal tressé sous-jacent, alors il existe un unique* $F:U\,(\mathcal{G})\to\mathcal{C}$ *foncteur monoïdal égal à l'identité sur le groupoïde monoïdal tressé* $\mathcal{G}$*.*

Remarque : La propriété universelle de la catégorie homogène pré-tressée $U\,(\mathcal{G})$ est équivalente à dire que le foncteur $U:\mathbf{Grpd}\to\mathbf{Mono_{pré-tressée}}$ (où $\mathbf{Mono_{pré-tressée}}$ désigne la catégorie des petites catégories monoïdales pré-tressée) est adjoint à gauche au foncteur $\mathcal{G}':\mathbf{Mono_{pré-tressée}}\to\mathbf{Grpd}$ le foncteur qui à une catégorie monoïdale pré-tressée $\mathcal{C}$ associe son groupoïde sous-jacent $\mathcal{G}'\,(\mathcal{C})$. qui catégorie homogène pré-tressée.

Donnons d'abord la construction explicite de la catégorie $U\,(\mathcal{G})$.

Définition : *Soit* $(\mathcal{G},\oplus,0)$ *un groupoïde monoïdal tressé vérifiant les hypothèses du théorème précédent. On définit la catégorie* $U\,(\mathcal{G})$ *à partir de* $\mathcal{G}$ *par :*

- *Objets :* $Obj\,(\mathcal{G})=Obj\,(U\,(\mathcal{G}))$ *;*
- *Morphismes :* $\forall A,B\in Obj\,(\mathcal{G})$*, si il existe* $H\in Obj\,(\mathcal{G})$ *tel que* $B\cong H\oplus A$*, alors on choisit un isomorphisme* $H\oplus A\xrightarrow{\cong}B$ *qui nous permet d'identifier* $\hom_{U(\mathcal{G})}(A,B)$ *à* $\hom_{U(\mathcal{G})}(A,H\oplus A)=Aut_{\mathcal{G}}\,(H\oplus A)\,/Aut_{\mathcal{G}}\,(H)$*, où l'application* $Aut_{\mathcal{G}}(H)\to Aut_{\mathcal{G}}\,(H\oplus A)$ *envoyant* $f\in Aut_{\mathcal{G}}(A)$ *sur* $f\oplus id_A$ *permet d'identifier* $Aut(H)$ *comme un sous-groupe de* $Aut_{\mathcal{G}}\,(H\oplus A)$*. Ainsi, on définit :*

$$\hom_{U(\mathcal{G})}(A,B)=\begin{cases} Aut_{\mathcal{G}}\,(H\oplus A)\,/Aut_{\mathcal{G}}\,(H) & si\ \exists H\in Obj\,(\mathcal{G})\,,B\cong H\oplus A \\ \emptyset & sinon\end{cases}$$

- *Composition : soient* $A,B,C\in Obj\,(\mathcal{G})$*. On peut supposer qu'il existe* $H,H'\in Obj\,(\mathcal{G})$ *tels que* $B\cong H\oplus A$ *et* $C\cong H'\oplus B$ *(les autres cas étant triviaux). Alors, puisque*

$$\begin{array}{ccc} Aut_{\mathcal{G}}\,(H)\times Aut_{\mathcal{G}}\,(H') & \hookrightarrow & Aut_{\mathcal{G}}\,(H\oplus H') \\ (f,f') & \to & f\oplus f'=\begin{cases} f & sur\ \ H \\ f' & sur\ \ H'\end{cases}\end{array}$$

est injective (car seul $(id_H,id_{H'})$ *est envoyé sur* $id_{H\oplus H'}$ *d'après les propriétés de structure monoïdale), la composition est bien définie par :*

$$\begin{array}{ccc} \hom_{U(\mathcal{G})}(A,B)\times\hom_{U(\mathcal{G})}(B,C) & \longrightarrow & Aut_{\mathcal{G}}\,(H'\oplus H\oplus A)\,/Aut_{\mathcal{G}}\,(H'\oplus H) \\ \left(f=\left(\tilde{f}+Aut_{\mathcal{G}}\,(H)\right),g=\left(\tilde{g}+Aut_{\mathcal{G}}\,(H')\right)\right) & \longmapsto & \left[(g\circ f):=\left(\tilde{g}\circ\left(id_{H'}\oplus\tilde{f}\right)\right)+Aut_{\mathcal{G}}\,(H'\oplus H)\right]\end{array}$$

où $\tilde{f}\in Aut_{\mathcal{G}}\,(H\oplus A)$ *et* $\tilde{g}\in Aut_{\mathcal{G}}\,(H'\oplus H\oplus A)$*.*
On doit vérifier l'axiome de composition d'une catégorie. Soient $D\in Obj\,(\mathcal{G})$ *tel qu'il existe* $H''\in Obj\,(\mathcal{G})\,,D\cong H''\oplus C$ *et* $h\in\hom_{U(\mathcal{G})}(C,D)$*. Il faut donc montrer que* $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$*. On a :*

$$h\circ(g\circ f)=\tilde{h}\circ\left(id_{H''}\oplus\left(\tilde{g}\circ\left(id_{H'}\oplus\tilde{f}\right)\right)\right)+Aut_{\mathcal{G}}\,(H''\oplus H'\oplus H)\ \ ;$$

$$(h \circ g) \circ f = \left(\tilde{h} \circ (id_{H''} \oplus \tilde{g})\right) \circ \left(id_{H''} \oplus id_{H'} \oplus \tilde{f}\right) + Aut_{\mathcal{G}} (H'' \oplus H' \oplus H) .$$

D'après l'axiome d'associativité de la composition dans le groupoïde $\mathcal{G}$, on obtient que dans $Aut\,(H'' \oplus H' \oplus H \oplus A)$:

$$\left(\tilde{h} \circ (id_{H''} \oplus \tilde{g})\right) \circ \left(id_{H''} \oplus id_{H'} \oplus \tilde{f}\right) \quad = \quad \tilde{h} \circ \left((id_{H''} \oplus \tilde{g}) \circ \left(id_{H''} \oplus id_{H'} \oplus \tilde{f}\right)\right).$$

Puisque $\oplus$ est le produit monoïdal de $\mathcal{G}$ (et a fortiori un bifoncteur), par propriété de conservation de la composition, on en déduit que :

$$(id_{H''} \oplus \tilde{g}) \circ \left(id_{H''} \oplus id_{H'} \oplus \tilde{f}\right) = (id_{H''} \circ id_{H''}) \oplus \left(\tilde{g} \circ \left(id_{H'} \oplus \tilde{f}\right)\right) = id_{H''} \oplus \left(\tilde{g} \circ \left(id_{H'} \oplus \tilde{f}\right)\right)$$

Ainsi, on obtient que :

$$\tilde{h} \circ \left(id_{H''} \oplus \left(\tilde{g} \circ \left(id_{H'} \oplus \tilde{f}\right)\right)\right) = \left(\tilde{h} \circ (id_{H''} \oplus \tilde{g})\right) \circ \left(id_{H''} \oplus id_{H'} \oplus \tilde{f}\right).$$

En passant au quotient par $Aut_{\mathcal{G}} (H'' \oplus H' \oplus H)$, on obtient alors que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
• *Identité : pour tout $A \in Obj\,(\mathcal{G})$, on peut écrire $A = 0 \oplus A$, donc $\hom_{U(\mathcal{G})} (A, A) = Aut_{\mathcal{G}} (A, A) / Aut_{\mathcal{G}} (0) = Aut\,(A, A)$ et il existe $id_A \in Aut_{\mathcal{G}} (A, A) = \hom_{\mathcal{G}} (A, A)$ morphisme identité dans $\hom_{U(\mathcal{G})} (A, A)$. Vérifions l'axiome sur l'identité. Soit $f \in \hom_{U(\mathcal{G})} (A, H \oplus A)$, alors on a directement par axiome de l'identité sur $\mathcal{G}$ que :*

$$f \circ id_A = f = id_{H \oplus A} \circ f.$$

<u>*Démonstration du théorème 1*</u> : $U(\mathcal{G})$ est par définition une catégorie et elle vérifie les hypothèses caractéristiques :
• (**H1**) : dans le cas où $A, B \in Obj\,(\mathcal{G})$ tels qu'il existe $H \in Obj\,(\mathcal{G})$ tel que $B = H \oplus A$ (l'autre cas est trivial), puisque $Aut_{\mathcal{G}} (B) = Aut_{\mathcal{G}} (H \oplus A)$ agit transitivement sur $Aut_{\mathcal{G}} (A, H \oplus A)$, et a fortiori $Aut_{\mathcal{G}} (B)$ agit transitivement sur $\hom_{U(\mathcal{G})} (A, B) = Aut_{\mathcal{G}} (A, H \oplus A) / Aut_{\mathcal{G}} (H)$.
• (**H2**) : Soient $A, B \in Obj\,(\mathcal{G})$. L'application $Aut_{\mathcal{G}} (A) \longrightarrow Aut_{\mathcal{G}} (A \oplus B)$ envoyant f sur $f \oplus id_B$ est injective d'après l'hypothèse (ii). Soit $\iota_A \oplus id_B : B \to A \oplus B$ la classe d'équivalence de l'application $id_{A \oplus B}$ dans $\hom_{U(\mathcal{G})} (A, A \oplus B) = Aut_{\mathcal{G}} (A \oplus B) / Aut_{\mathcal{G}} (A)$. Alors, par définitions :

$$Aut_{\mathcal{G}} (A) = \{\phi \in Aut_{\mathcal{G}} (A \oplus B) \,|\, \phi \circ (\iota_A \oplus id_B) = \iota_A \oplus id_B\} = Fix\,(B) .$$

Puisque 0 est objet unité et initial dans $\mathcal{G}$, pour tout $A \in Obj\,(\mathcal{G})$, $A = 0 \oplus A$ et donc

$$\hom_{U(\mathcal{G})} (0, A) = Aut_{\mathcal{G}} (A) / Aut_{\mathcal{G}} (A) = \{\star\} .$$

Ainsi, 0 est objet initial dans $U(\mathcal{G})$. Par ailleurs, on sait que le groupoïde $\mathcal{G}$ est une sous-catégorie de $U(\mathcal{G})$ (par définition). De plus, étant donnée notre construction, un morphisme $U(\mathcal{G})$ entre $A, B \in Obj\,(\mathcal{G})$ est un isomorphisme si et seulement si $H = 0$, et donc cet isomorphisme appartient à $\mathcal{G}$. Par propriété universelle, $\mathcal{G}$ est ainsi le groupoïde sous-jacent de $U(\mathcal{G})$.

Il s'agit maintenant de définir une structure monoïdale et pré-tressée sur $U(\mathcal{G})$ compatible avec celle de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire construire le produit monoïdal sur $U(\mathcal{G})$ et étendre le tressage de $\mathcal{G}$ en un pré-tressage de $U(\mathcal{G})$. En fait, on choisit le même produit monoïdal $\oplus$ que $\mathcal{G}$ sur les objets et les isomorphismes, qu'il faut étendre aux morphismes c'est-à-dire définir pour tous les $A, B, C, D \in Obj\,(\mathcal{G})$:

$$\hom_{U(\mathcal{G})} (B, A \oplus B) \times \hom_{U(\mathcal{G})} (D, C \oplus D) \xrightarrow{\oplus} \hom_{U(\mathcal{G})} (B \oplus D, A \oplus B \oplus C \oplus D) .$$

Puisque $Aut_{\mathcal{G}} (A \oplus B) \times Aut_{\mathcal{G}} (C \oplus D) \hookrightarrow Aut_{\mathcal{G}} (A \oplus B \oplus C \oplus D)$, alors on peut définir une injection :

$$\hom_{U(\mathcal{G})} (B, A \oplus B) \times \hom_{U(\mathcal{G})} (D, C \oplus D) \longrightarrow Aut_{\mathcal{G}} (A \oplus B \oplus C \oplus D) / Aut_{\mathcal{G}} (A) \times Aut_{\mathcal{G}} (C) .$$

On note $c_{B,C}$ la conjugaison par le tressage $b_{B,C}$ de $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{rcl} Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus B\oplus C\oplus D\right) & \longrightarrow & Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\oplus B\oplus D\right). \\ \varphi & \longmapsto & b_{B,C}^{-1}\circ\varphi\circ b_{B,C} \end{array}$$

Elle induit une application

$$Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus B\oplus C\oplus D\right)/Aut_{\mathcal{G}}\left(A\right)\times Aut_{\mathcal{G}}\left(C\right)\longrightarrow Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\oplus B\oplus D\right)/Aut_{\mathcal{G}}\left(A\right)\times Aut_{\mathcal{G}}\left(C\right).$$

Puisque $Aut_{\mathcal{G}}\left(A\right)\times Aut_{\mathcal{G}}\left(C\right)\subset Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\right)$, alors on a la surjection :

$$Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\oplus B\oplus D\right)/Aut_{\mathcal{G}}\left(A\right)\times Aut_{\mathcal{G}}\left(C\right)\twoheadrightarrow Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\oplus B\oplus D\right)/Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\right).$$

De plus, $Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\oplus B\oplus D\right)/Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus C\right)=\hom_{U(\mathcal{G})}\left(B\oplus D,A\oplus C\oplus B\oplus D\right)$. On considère donc enfin :

$$\hom_{U(\mathcal{G})}\left(B\oplus D,A\oplus C\oplus B\oplus D\right)\xrightarrow{b_{B,C}^{-1}}\hom_{U(\mathcal{G})}\left(B\oplus D,A\oplus B\oplus C\oplus D\right).$$

Le produit monoïdal va ainsi se définir par la composition de ces quatre applications, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rcl} \hom_{U(\mathcal{G})}\left(B,A\oplus B\right)\times\hom_{U(\mathcal{G})}\left(D,C\oplus D\right) & \longrightarrow & Aut_{\mathcal{G}}\left(A\oplus B\oplus C\oplus D\right)/Aut_{\mathcal{G}}\left(A\right)\times Aut_{\mathcal{G}}\left(C\right) \\ (f,g) & \longmapsto & f\oplus g=\left(\bar{f}\oplus\bar{g}\right)\circ b_{B,C}^{-1}\circ\left(\iota_{A\oplus C}\oplus id_{B\oplus D}\right) \end{array}$$

où $\bar{f}\in Aut\left(A\oplus B\right)$ est tel que $f=\bar{f}\circ\left(\iota_A\oplus id_B\right)$ et $\bar{g}\in Aut\left(C\oplus D\right)$ est tel que $g=\bar{g}\circ\left(\iota_C\oplus id_D\right)$. Considérons : $\iota_B=id_{0\oplus B}\oplus\iota_B\in\hom_{U(\mathcal{G})}\left(0,0\oplus B\right)$ et $id_A=id_{0\oplus A}\oplus\iota_0\in\hom_{U(\mathcal{G})}\left(A,0\oplus A\right)$. On a alors :

$$\begin{array}{c} id_A\oplus\iota_B=\left(id_{0\oplus A}\oplus id_{0\oplus B}\right)\circ b_{A,B}^{-1}\circ\left(\iota_{0\oplus A}\oplus id_{B\oplus 0}\right)=b_{A,B}^{-1}\circ\left(\iota_A\oplus id_B\right) \\ \iota_B\oplus id_A=\left(id_{0\oplus B}\oplus id_{0\oplus A}\right)\circ b_{0,0}^{-1}\circ\left(\iota_{B\oplus 0}\oplus id_{0\oplus A}\right)=\iota_B\oplus id_A \end{array}$$

Ainsi, on obtient par la première relation ci-dessus que :

$$b_{A,B}\circ\left(id_A\oplus\iota_B\right)=\left(\iota_A\oplus id_B\right)$$

donc le tressage de $\mathcal{G}$ s'étend bien à un pré-tressage de $U\left(\mathcal{G}\right)$.

La propriété d'associativité du produit provient du fait que b est un tressage.

Vérifions maintenant la propriété universelle. Soit $\left(\mathcal{C},\oplus_{\mathcal{C}},0_{\mathcal{C}}\right)$ une autre catégorie homogène pré-tressée telle que $\left(\mathcal{G},\oplus,0\right)$ est son groupoïde monoïdal tressé sous-jacent. Il nous faut définir le foncteur monoïdal $F:U\left(\mathcal{G}\right)\longrightarrow\mathcal{C}$ de l'énoncé. On le définit par

$$\forall A\in Obj\left(U\left(\mathcal{G}\right)\right),F\left(A\right)=A$$

$$\forall\varphi\in Aut_{U(\mathcal{G})},F\left(\varphi\right)=\varphi.$$

Il reste maintenant à définir F sur tous les morphismes de $U\left(\mathcal{G}\right)$. Soit $f\in\hom_{U(\mathcal{G})}\left(A,H\oplus A\right)$, on peut factoriser $f=\phi\circ\left(id_A\oplus\iota_H\right)$, où $\phi\in Aut\left(H\oplus A\right)$ et $\left(id_A\oplus\iota_H\right):\left(A\cong A\oplus 0\right)\longrightarrow A\oplus H$. Alors, on obtient que $F\left(f\right)=F\left(\phi\right)\circ\left(F\left(id_A\right)\oplus F\iota_H\right)=F\left(\phi\right)\circ\left(id_{F(A)}\oplus\iota_{F(H)}\right)$ est bien défini, car nous avons sa définition sur les automorphismes et le fait que $0_{\mathcal{C}}$ est initial dans $\mathcal{C}$. Le foncteur F est donc bien défini.
Par ailleurs, la structure monoïdale d'une catégorie homogène pré-tressée est déterminée par celle de son groupoïde sous-jacent et par le tressage. En effet, la structure monoïdale définie auparavant est obtenue en étendant la structure monoïdale pré-tressée de $\mathcal{G}$; pour les morphismes, soient $f\in\hom_{U(\mathcal{G})}\left(B,A\oplus B\right)$ et $g\in\hom_{U(\mathcal{G})}\left(D,C\oplus D\right)$, on écrit $f=\bar{f}\circ\left(\iota_A\oplus id_B\right)$ où $\bar{f}\in Aut\left(A\oplus B\right)$ et $g=\bar{g}\circ\left(\iota_C\oplus id_D\right)$ où $\bar{g}\in Aut\left(C\oplus D\right)$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f\oplus g & = & \bar{f}\circ\left(\iota_A\oplus id_B\right)\oplus\bar{g}\left(\iota_C\oplus id_D\right) \\ & = & \left(\bar{f}\oplus\bar{g}\right)\circ\left(\left(\iota_A\oplus id_B\right)\oplus\left(\iota_C\oplus id_D\right)\right) \\ & = & \left(\bar{f}\oplus\bar{g}\right)\circ\left(\left(id_A\oplus b_{B,C}^{-1}\oplus id_D\right)\circ\left(\iota_A\oplus\iota_C\oplus id_B\oplus id_D\right)\right). \end{array}$$

Puisque F est défini comme l'identité sur le groupoïde $\mathcal{G}$, l'identité étant un foncteur monoïdal, F conserve donc la structure monoïdale de $U(\mathcal{G})$. Enfin, l'unicité de F provient de notre construction. En effet, l'extension élaborée est définie de manière unique par les axiomes des foncteurs et l'hypothèse que F doit être l'identité sur le groupoïde : le seul élément de construction sur F est son action sur les morphismes de $U(\mathcal{G})$ et celle-ci est déterminée de manière unique par l'axiome de composition des foncteurs. $\square$

Beaucoup de groupoïdes monoïdaux tressés vérifient les hypothèses de ce théorème. Voyons maintenant les catégories homogènes associées aux groupoïdes définis par les groupes symétriques, les groupes de tresses, les groupes généraux linéaires et les groupes de difféotopies.

Exemple : Le groupoïde $\mathscr{S}$ vérifie les hypothèses du théorème 1. En effet, $Aut(\emptyset) = \{id_\emptyset\}$ et pour tous ensembles finis A et B, l'application suivante est évidemment injective.

$$\begin{array}{ccc} Aut(A) & \longrightarrow & Aut(A \sqcup B) \\ f & \longmapsto & f \sqcup id_B = \begin{cases} f & sur\ \ A \\ id_B & sur\ \ B \end{cases} \end{array}$$

Exemple : Le groupoïde monoïdal symétrique (et a fortiori tressé) $(f\mathcal{G}, *, \{e\})$ vérifie les hypothèses du théorème 1. En effet, d'une part l'unique morphisme du groupe trivial dans lui-même est $id_{\{e\}}$ et donc $Aut(\{e\}) = \left\{id_{\{e\}}\right\}$; d'autre part, pour tous groupes de type fini G_1 et G_2, on considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} Aut(G_1) & \longrightarrow & Aut(G_1 * G_2) \\ f & \longmapsto & f * id_{G_2} \end{array}$$

Soient $f, g \in Aut(G_1)$ tels que $f * id_{G_2} = g * id_{G_2}$. Alors, $f = (f * id_{G_2}) \circ i_1 = (g * id_{G_2}) \circ i_1 = g$. Par conséquent, l'application considérée est injective.

Exemple : Le groupoïde monoïdal symétrique (et a fortiori tressé) $(f\mathcal{G}, \times, \{e\})$ vérifie les hypothèses du théorème 1. En effet, d'une part l'unique morphisme du groupe trivial dans lui-même est $id_{\{e\}}$ et donc $Aut(\{e\}) = \left\{id_{\{e\}}\right\}$; d'autre part, pour tous groupes de type fini G_1 et G_2, on considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} Aut(G_1) & \longrightarrow & Aut(G_1 \times G_2) \\ f & \longmapsto & f \times id_{G_2} \end{array}$$

Soient $f, g \in Aut(G_1)$ tels que $f \times id_{G_2} = g \times id_{G_2}$. Alors, pour toute paire $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, $(f(g_1), g_2) = (g(g_1), g_2)$ et donc en projetant sur G_1, on obtient que $g(g_1) = f(g_1)$ et ainsi, $f = g$. Donc l'application considérée est injective.

Enfin, intéressons-nous à un résultat remarquable pour les groupoïdes monoïdaux symétriques : la propriété de symétrie se transfert à la catégorie monoïdale associée.

Proposition 2 : *Soit $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$ un groupoïde monoïdal vérifiant les hypothèses (i) et (ii) du théorème* 1. *Si $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$ est symétrique, alors la catégorie monoïdale $(U(\mathcal{G}), \oplus, 0)$ définie dans le théorème* 1 *est symétrique.*

Démonstration : Soit σ le tressage symétrique de $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$. Par le théorème 1, on sait que $(U(\mathcal{G}), \oplus, 0)$ est pré-tressée et il nous faut montrer qu'elle est symétrique, c'est-à-dire que σ est également la symétrie de $U(\mathcal{G})$ (puisqu'on a vu dans la démonstration précédente que le pré-tressage de $U(\mathcal{G})$ était le tressage de $\mathcal{G}$). Si on montre que σ est un tressage pour $U(\mathcal{G})$, alors σ sera automatiquement une symétrie pour $U(\mathcal{G})$ car par construction les objets de $U(\mathcal{G})$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{G}$.

Montrons donc que σ est un tressage pour $U(\mathcal{G})$, c'est-à-dire un isomorphisme naturel de $\oplus$ vers $\oplus^{op}$.

Soient $A, B, C, D \in Obj(\mathcal{G})$, on doit montrer que pour tout $f \in \hom_{U(\mathcal{G})}(B, A \oplus B)$ et tout $g \in \hom_{U(\mathcal{G})}(D, C \oplus D)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B \oplus D \arrow[r, "\sigma_{B,D}"] \arrow[d, "f\oplus g"'] & D \oplus B \arrow[d, "g\oplus f"] \\
A \oplus B \oplus C \oplus D \arrow[r, "\sigma_{A\oplus B, C\oplus D}"] & C \oplus D \oplus A \oplus B
\end{tikzcd}$$

On écrit $f = \bar{f} \circ (\iota_A \oplus id_B)$ où $\bar{f} \in Aut(A \oplus B)$ et $g = \bar{g} \circ (\iota_C \oplus id_D)$ où $\bar{g} \in Aut(C \oplus D)$. On doit donc vérifier que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
B \oplus D \arrow[r, "\sigma_{B,D}"] \arrow[d, "\iota_{(A\oplus C)}\oplus id_{(B\oplus D)}"'] & D \oplus B \arrow[d, "\iota_{(C\oplus A)}\oplus id_{(D\oplus B)}"] \\
A \oplus C \oplus B \oplus D \arrow[d, "id_A\oplus\sigma^{-1}_{B,C}\oplus id_D"'] & C \oplus A \oplus D \oplus B \arrow[d, "id_C\oplus\sigma^{-1}_{D,A}\oplus id_B"] \\
A \oplus B \oplus C \oplus D \arrow[r, "\sigma_{A\oplus B, C\oplus D}"] \arrow[d, "\bar{f}\oplus\bar{g}"'] & C \oplus D \oplus A \oplus B \arrow[d, "\bar{g}\oplus\bar{f}"] \\
A \oplus B \oplus C \oplus D \arrow[r, "\sigma_{A\oplus B, C\oplus D}"] & C \oplus D \oplus A \oplus B
\end{tikzcd}$$

D'une part, puisque $\bar{f} \in Aut(A \oplus B)$ et $\bar{g} \in Aut(C \oplus D)$ (c'est-à-dire des morphismes de $\mathcal{G}$) et qu'on sait que σ est la symétrie sur $\mathcal{G}$, alors par définition d'un tressage :

$$\sigma_{A\oplus B, C\oplus D} \circ \left(\bar{f} \oplus \bar{g}\right) = \left(\bar{g} \oplus \bar{f}\right) \circ \sigma_{A\oplus B, C\oplus D}$$

donc le carré du bas du diagramme est commutatif.
D'autre part, puisque σ est une tressage sur $\mathcal{G}$, alors $\sigma_{B,D}$ est un isomorphisme naturel, donc :

$$\left(\iota_{(C\oplus A)} \oplus id_{(D\oplus B)}\right) \circ \sigma_{B,D} = \left(id_{C\oplus A} \oplus \sigma_{B,D}\right) \circ \left(\iota_{(C\oplus A)} \oplus id_{(B\oplus D)}\right).$$

De plus, puisque σ est une symétrie sur $\mathcal{G}$, alors $\sigma^{-1}_{D,A} = \sigma_{A,D}$ et c'est un isomorphisme naturel. Ainsi :

$$\left(id_C \oplus \sigma^{-1}_{D,A} \oplus id_B\right) \circ \left(id_{C\oplus A} \oplus \sigma_{B,D}\right) = id_C \oplus \sigma_{D,A\oplus B}.$$

Par ailleurs, puisque σ est une symétrie sur $\mathcal{G}$, alors $\sigma^{-1}_{B,C} = \sigma_{C,B}$ et c'est un isomorphisme naturel. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sigma_{A\oplus B, C\oplus D} \circ \left(id_A \oplus \sigma^{-1}_{B,C} \oplus id_D\right) &= \sigma_{A\oplus B, C\oplus D} \circ \left(id_A \oplus \sigma_{C,B} \oplus id_D\right) \\
&= \left(id_C \oplus \sigma_{D,A\oplus B}\right) \circ \left(\sigma_{A,C} \oplus id_{B\oplus D}\right).
\end{aligned}$$

Or, par définition de $\sigma_{A,C}$, $\sigma_{A,C} \circ \iota_{A\oplus C} = \iota_{C\oplus A}$ et a fortiori

$$\left(\sigma_{A,C} \oplus id_{B\oplus D}\right) \circ \left(\iota_{(A\oplus C)} \oplus id_{(B\oplus D)}\right) = \left(\iota_{(C\oplus A)} \oplus id_{(B\oplus D)}\right).$$

Finalement, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sigma_{A\oplus B, C\oplus D} \circ \left(id_A \oplus \sigma^{-1}_{B,C} \oplus id_D\right) \\
\circ \left(\iota_{(A\oplus C)} \oplus id_{(B\oplus D)}\right) &= \left(id_C \oplus \sigma_{D,A\oplus B}\right) \circ \left(\sigma_{A,C} \oplus id_{B\oplus D}\right) \\
&\qquad \circ \left(\iota_{(A\oplus C)} \oplus id_{(B\oplus D)}\right) \\
&= \left(id_C \oplus \sigma_{D,A\oplus B}\right) \circ \left(\iota_{(C\oplus A)} \oplus id_{(B\oplus D)}\right) \\
&= \left(id_C \oplus \sigma^{-1}_{D,A} \oplus id_B\right) \circ \left(id_{C\oplus A} \oplus \sigma_{B,D}\right) \\
&\qquad \circ \left(\iota_{(C\oplus A)} \oplus id_{(B\oplus D)}\right) \\
&= \left(id_C \oplus \sigma^{-1}_{D,A} \oplus id_B\right) \circ \left(\iota_{(C\oplus A)} \oplus id_{(D\oplus B)}\right) \circ \sigma_{B,D}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le carré du haut dans le diagramme commute, donc σ est un tressage pour $U(\mathcal{G})$ et a fortiori $U(\mathcal{G})$ est symétrique. $\square$

2.4 Construction alternative de Quillen

Il existe une construction alternative de la catégorie $U(\mathcal{G})$, que nous allons maintenant décrire. Tout d'abord, il est nécessaire d'avoir une propriété supplémentaire, dite d'annulation.

Définition : *Soit $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$ un groupoïde. On dit que $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$ satisfait la propriété d'annulation (à droite) si pour tous $A, B, C \in Obj(\mathcal{G})$:*

$$[(A \oplus C) \cong (B \oplus C)] \Longrightarrow [A \cong B].$$

Exemple : Le groupoïde $\mathscr{S}$ vérifie la propriété d'annulation. En effet, pour A, B et C des ensembles finis :

$$[(A \sqcup C) \cong (B \sqcup C)] \Longrightarrow [A \cong B].$$

Exemple : On considère le groupoïde monoïdal symétrique $(f\mathcal{G}, *, \{e\})$. Il vérifie la propriété d'annulation pour le produit libre. En effet, le théorème de Grushko (voir [16]) donne l'unicité de la décomposition des groupes de type fini pour le produit libre. A fortiori, pour G_1, G_2 et G_3 des groupes de type fini :

$$[(G_1 * G_3) \cong (G_2 * G_3)] \Longrightarrow [G_1 \cong G_2].$$

Remarque : Il existe la propriété analogue d'annulation à gauche. Il convient de remarquer que les annulations à gauche et à droite sont équivalentes pour les groupoïdes monoïdaux tressés.

On introduit maintenant une nouvelle catégorie $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$.

Définition : *Soit $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$ un groupoïde monoïdal. La catégorie $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$ se définit par :*

(i) Objets : $Obj(< \mathcal{G}, \mathcal{G} >) = Obj(\mathcal{G})$;

(ii) Morphismes : pour $A, B \in Obj(\mathcal{G}) = Obj(< \mathcal{G}, \mathcal{G} >)$, un morphisme de A vers B est la classe d'équivalence (pour $\sim$ définie ci-dessous) des paires (X, f) où $X \in Obj(\mathcal{G}) = Obj(< \mathcal{G}, \mathcal{G} >)$ et $(f : X \oplus A \to B) \in \hom(\mathcal{G})$.
La relation d'équivalence est : $(X, f) \sim (X', f')$ si et seulement si il existe $g \in \hom_{\mathcal{G}}(X, X')$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} X \oplus A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \oplus id_A"'] & B \\ X' \oplus A \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque : Il s'agit d'une construction effectuée par Quillen dans *[15]*, bien qu'il considère dans son travail le cas plus général d'une catégorie monoïdale S agissant sur une catégorie X et on suppose dans notre définition $S = X = \mathcal{G}$.

La proposition suivante relie alors la catégorie de Quillen à $U(\mathcal{G})$.

Proposition : *Soit $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$ un groupoïde monoïdal tressé. Si $(\mathcal{G}, \oplus, 0)$ satisfait la propriété d'annulation et les propriétés (i) et (ii) du théorème 1, alors :*

$$U(\mathcal{G}) \cong < \mathcal{G}, \mathcal{G} > .$$

Démonstration : On cherche à construire un isomorphisme entre les deux catégories, c'est-à-dire définir deux foncteurs $F :< \mathcal{G}, \mathcal{G} >\rightarrow U(\mathcal{G})$ et $G : U(\mathcal{G}) \rightarrow< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$ tels que $G \circ F = id_{U(\mathcal{G})}$ et $F \circ G = id_{<\mathcal{G},\mathcal{G}>}$.
Un foncteur se définit en particulier par l'image qu'il attribue à chaque objet et à chaque morphisme de la catégorie de départ. En ayant une idée claire et distincte de ces objets et morphismes, on pourra alors construire les foncteurs cherchés.
Par définitions, $Obj(< \mathcal{G}, \mathcal{G} >) = Obj(\mathcal{G}) = Obj(U(\mathcal{G}))$. Il suffit donc de poser :

$$\forall A \in Obj(\mathcal{G}), F(A) = A = G(A).$$

Concernant les morphismes, remarquons tout d'abord que $\mathcal{G}$ est un groupoïde. Donc, par définition, pour tout $A, B \in Obj(\mathcal{G})$, il existe un morphisme entre A et B dans $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$ s'il existe $H \in Obj(\mathcal{G})$ tel que $f : B \xrightarrow{\cong} H \oplus A$ (le morphisme sera alors (H, f)). Ainsi, tout morphisme de $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$ appartient à un ensemble du type $\hom_{<\mathcal{G},\mathcal{G}>}(A, H \oplus A) = \left\{[(X, f) \in \hom(< \mathcal{G}, \mathcal{G} >)]_{\sim} \mid f : X \oplus A \xrightarrow{\cong} H \oplus A\right\}$ (et on en obtient a fortiori la forme).
Or, d'après la propriété d'annulation, $X \oplus A \cong H \oplus A$ implique que $X \cong H$. Par définition :

$$\hom_{U(\mathcal{G})}(A, H \oplus A) = \frac{Aut(H \oplus A)}{\{(\phi_g : f \longmapsto f \circ (g \oplus id_A)) \in Aut(H \oplus A) \mid g \in Aut(H)\}}.$$

On en déduit que, d'après la relation d'équivalence :

$$\begin{aligned}
\hom_{<\mathcal{G},\mathcal{G}>}(A, H \oplus A) &= \left\{[f \in \hom(\mathcal{G})]_{\sim} \mid f : H \oplus A \xrightarrow{\cong} H \oplus A\right\} \\
&\cong \frac{\{f \in Aut(H \oplus A)\}}{\left\{f \circ (g \oplus id_A) \mid \left(g : H \xrightarrow{\cong} H\right) \in \hom(\mathcal{G})\right\}} \\
&\cong \frac{Aut(H \oplus A)}{\{(f \longmapsto f \circ (g \oplus id_A)) \in Aut(H \oplus A) \mid g \in Aut(H)\}} \\
&\cong \hom_{U(\mathcal{G})}(A, H \oplus A).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, de même que pour $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$, tout morphisme de $U(\mathcal{G})$ appartient à un ensemble du type $\hom_{U(\mathcal{G})}(A, H \oplus A)$. Puisqu'il y a isomorphisme entre les morphismes entre deux mêmes objets pour les deux catégories $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$ et $U(\mathcal{G})$, on peut donc définir pour tout $\varphi \in \hom_{<\mathcal{G},\mathcal{G}>}(A, H \oplus A) = \hom_{U(\mathcal{G})}(A, H \oplus A)$:

$$\begin{aligned}
F(\varphi) &= \varphi; \\
G(\varphi) &= \varphi.
\end{aligned}$$

De plus, puisque tout morphisme de $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$ (respectivement $U(\mathcal{G})$) appartient à un ensemble du type $\hom_{<\mathcal{G},\mathcal{G}>}(A, H \oplus A)$ (respectivement $\hom_{U(\mathcal{G})}(A, H \oplus A)$), on définit ainsi entièrement les deux foncteurs F et G.

Par définition des deux foncteurs, on remarque que :
- $\forall A \in Obj(< \mathcal{G}, \mathcal{G} >) = Obj(\mathcal{G}) = Obj(U(\mathcal{G})), G \circ F(A) = A = F \circ G(A)$;
- $\forall \varphi \in \hom_{<\mathcal{G},\mathcal{G}>}(A, H \oplus A) = \hom_{U(\mathcal{G})}(A, H \oplus A), G \circ F(\varphi) = \varphi = F \circ G(\varphi)$.

Ainsi, $F \circ G = id_{U(\mathcal{G})}$ et $F \circ G = id_{<\mathcal{G},\mathcal{G}>}$.

Il y a donc isomorphisme entre les catégories $< \mathcal{G}, \mathcal{G} >$ et $U(\mathcal{G})$. $\square$

Exemple : On peut s'intéresser au cas du groupoïde $\mathscr{S}$. Il vérifie bien les hypothèses du théorème 1 et la propriété d'annulation. La construction de Quillen nous donne la catégorie homogène associée $U(\mathscr{S}) =< \mathscr{S}, \mathscr{S} >$, définie par :
- Objets : ensembles finis ;
- Morphismes : pour un morphisme entre deux ensembles finis A et B sera la classe d'équivalence de paires

(X, f) où X est un ensemble fini et $f : X \sqcup A \xrightarrow{\cong} B$ est une bijection, pour la relation d'équivalence $(X, f) \sim (X', f')$ si il existe $g : X \xrightarrow{\cong} X'$ tel que

$$f = f' \circ (g \sqcup id_A) : X \oplus A \longrightarrow X' \oplus A \longrightarrow B.$$

On remarque que nécessairement $f_{|A} = f'_{|A}$ et donc une classe de morphismes (X, f) est déterminée par l'injection $f_{|A}$. On en déduit que $U(\mathscr{S}) = FI$.

Exemple : On considère le groupoïde monoïdal symétrique $(f\mathcal{G}, *, \{e\})$. Il vérifie bien les hypothèses du théorème 1 et la propriété d'annulation. On peut alors utiliser la construction de Quillen pour obtenir la catégorie homogène associée $(U(f\mathcal{G}), *, \{e\})$, caractérisée par :
• Objets : les groupes de type fini.
• Morphismes : G_1 et G_2 deux groupes de type fini. Un morphisme de G_1 vers G_2 est une classe d'équivalence de paires (f, H) où $f : G_1 \hookrightarrow G_2$ est un homomorphisme injectif et H un sous-groupe de type fini $H \leq G_2$ tel que $G_2 = H * f(G_1)$. La composition se définit ainsi par : $(f, H) \circ (g, K) = (g \circ f, g(H) * K)$.
La catégorie $(U(f\mathcal{G}), *, \{e\})$ est homogène et pré-tressée. On considérera dans la suite la sous-catégorie pleine de $U(f\mathcal{G})$ des groupes libres de type fini $U(f\mathcal{G})_{libre}$.

Remarque : Un groupoïde monoïdal tressé vérifiant les hypothèses du théorème 1 ne vérifie pas nécessairement la propriété d'annulation. Par exemple, considérons le groupoïde $\mathcal{M}_2$ dont les objets sont les surfaces compactes à bord et les morphismes sont les classes d'isotopie des dfféomorphismes se restreignant à l'identité sur I. On a de nouveau le produit monoïdal $\natural$ défini de la même manière que pour $\mathcal{C}_2$: en réalité on construit d'abord ce produit monoïdal pour $\mathcal{M}_2$ et la construction de Quillen donne $U(\mathcal{M}_2) = \mathcal{C}_2$, ce qui étend ce produit monoïdal (voir partie 6.4 de [32]). La classification des surfaces (voir [23]) donne alors la propriété d'annulation pour les surfaces orientables de $\mathcal{M}_2$, mais elle n'est plus valable pour les surfaces non-orientables.

Un autre exemple de groupoïde monoïdal symétrique ne vérifiant pas la propriété d'annulation est $(f\mathcal{G}, \times, \{e\})$: d'après le théorème A de [29], il existe des groupes de type fini G qui se factorisent en des produits directs d'eux-mêmes. On ne peut donc pas utiliser la méthode de Quillen ici, car elle n'est pas suffisante pour décrire la catégorie homogène associée.

C'est pourquoi, nous ne considérerons dans la suite que la sous-catégorie $(fAb, \times, \{e\})$ des groupes abéliens libres de type fini de la catégorie $(f\mathcal{G}, \times, \{e\})$, avec la structure monoïdale induite par le produit direct. Or, on a un théorème classique de structure (voir [9]) qui nous fournit une classification des groupes abéliens de type fini à isomorphisme près. La catégorie $(fAb, \times, \{e\})$ vérifie donc la propriété d'annulation.

Exemple : On considère le groupoïde monoïdal symétrique $(fAb, \times, \{e\})$. Il vérifie les hypothèses du théorème 1 et la propriété d'annulation. On peut alors utiliser la construction de Quillen pour obtenir la catégorie homogène associée $(U(fAb), \times, \{e\})$, caractérisée par :
• Objets : les groupes abéliens libres de type fini c'est-à-dire les $\mathbb{Z}^n$ pour tout $n \geq 0$.
• Morphismes : paires (f, H) où $f : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ est un homomorphisme injectif de groupes et $H \leq \mathbb{Z}^n$ un sous-groupe tel que $\mathbb{Z}^n \cong H \times f(\mathbb{Z}^m)$.
La catégorie $(U(fAb), \times, \{e\})$ est homogène et symétrique.

3 Complexes simpliciaux et ensembles semi-simpliciaux

Les catégories homogènes considérées dans les théorèmes majeurs de stabilité homologique dans ce mémoire auront besoin d'une propriété de connexité supplémentaire. Cette propriété sera définie à partir de suites de complexes simpliciaux et d'ensembles semi-simpliciaux associées à chaque paire d'objets de ces catégories homogènes : c'est l'objectif de cette partie.

3.1 Lien avec les catégories homogènes

Rappelons en premier lieu la définition de complexe simplicial.

Définition : *Un complexe simplicial X est un ensemble X_0 de sommets associés à une collection de sous-espaces de X_0, fermé en prenant les sous-ensembles. On appelle $p-$simplexe de X un sous-ensemble de cardinal $p+1$ et les sous-ensembles d'un $p-$simplexe sont appelés les faces de ce $p-$simplexe.*

Il s'agit maintenant d'associer une suite de complexes simpliciaux à chaque paire d'objets d'une catégorie homogène.

Définition : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène, $A, X \in Obj(\mathcal{C})$ et $n \geq 1$ un entier naturel. On définit le complexe simplical $S_n(X, A)$ par :*
• Sommets : ce sont les applications $f \in \hom_{\mathcal{C}}(X, A \oplus X^{\oplus n})$;
• $p-$simplexes : les collections $< f_0, \ldots, f_p >$ de sommets $f_i \in \hom_{\mathcal{C}}(X, A \oplus X^{\oplus n})$ telles qu'il existe un relèvement $\tilde{f}$ de $< f_0, \ldots, f_p >$ pour l'ordre défini par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}$, c'est-à-dire une application $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right)$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\tilde{f} \circ i_j^0 = f_{\sigma(j)}$ où

$$i_j^0 = \iota_{X^{\oplus j-1}} \oplus id_X \oplus \iota_{X^{\oplus p-j+1}} : X = 0 \oplus X \oplus 0 \longrightarrow X^{\oplus p+1}.$$

On définit bien de cette façon un complexe simplicial : si $< f_{j_1}, \ldots, f_{j_k} >$ est une face du $p-$simplexe $< f_0, \ldots, f_p >$ de relèvement f pour la permutation σ, alors $\tilde{f} \circ (i_{\sigma^{-1}(j_1)} \oplus \cdots \oplus i_{\sigma^{-1}(j_k)})$ est un relèvement de $< f_{j_1}, \ldots, f_{j_k} >$ et donc $S_n(X, A)$ est bien fermé en prenant les sous-ensembles.

Dans la suite de cette section nous étudierons les propriétés de ces complexes simpliciaux $S_n(X, A)$. On va maintenant s'intéresser aux suite d'ensembles semi-simpliciaux qu'on peut associer à chaque paire d'objets d'une catégorie homogène.

Définition : *Un ensemble semi-simplicial X est une suite d'ensembles X_n pour $n \geq 0$ et d'applications de faces $d_i : X_p \longrightarrow X_{p-1}$ vérifiant les relations appelée identité simpliciale :*

$$\forall i < j, d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i.$$

On remarque qu'on lie facilement la notion de complexe simplicial et ensemble semi-simplicial.

Définition : *Soit X un complexe simplicial. On peut lui associer l'ensemble semi-simplicial des simplexes ordonnés X^{ord} défini par :*

$$\forall p \geq 0, X_p^{ord} = \left\{(x_0, \ldots, x_p) \in (X_0)^{p+1} \,|< x_0, \ldots, x_p > \text{ } est \text{ } un \text{ } p - simplexe \text{ } de \text{ } X\right\}.$$

De plus, à chaque paire d'objets d'une catégorie homogène $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$, on peut associer une suite d'ensembles cette fois-ci semi-simpliciaux. Elle sera liée à la suite de complexes simpliciaux définie pour la même paire d'objets.

Définition : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène et $A, X \in Obj(\mathcal{C})$. On définit l'ensemble semi-simplical $W_n(X, A)$ par :*
• *La suite des $p-$simplexes :*

$$\forall p \geq 0, (W_n(X, A))_p := \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right);$$

• *Les applications de faces :*

$$\begin{array}{rcl} d_i : \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right) & \longrightarrow & \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p}, A \oplus X^{\oplus n}\right) \\ \left[f : X^{\oplus p+1} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n}\right] & \longmapsto & \left[f \circ (id_{X^{\oplus i}} \oplus \iota_X \oplus id_{X^{p-i}}) : X^{\oplus p+1} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n}\right]. \end{array}$$

Nous aurons besoin dans les résultats qui suivent de la notion de réalisation d'un ensemble semi-simplicial ou d'un complexe simplicial : on se référera à cette fin au chapitre 8, section 1, page 257 de [34]. Le théorème suivant va permettre de lier le complexe simplicial $S_n(X, A)$ et les ensembles semi-simpliciaux $S_n(X, A)^{ord}$ et $W_n(X, A)$.

Théorème : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène et $A, X \in Obj(\mathcal{C})$. Alors :*

(i) Un simplexe de $S_n(X, A)$ admet au plus un relèvement pour chaque agencement de ses sommets.

(ii) Il y a deux possibilités pour les simplexes de $S_n(X, A)$ (pour tout entier naturel n) : soit chaque simplexe admet un relèvement par rapport à chaque permutation de ses sommets (on dit que $S_n(X, A)$ admet tous ses relèvements) ; soit chaque simplexe admet un unique relèvement par rapport à toutes les permutations de ses sommets (on dit que $S_n(X, A)$ admet un unique relèvement).

Démonstration : On se référera essentiellement à la partie 7 de [32] pour une démonstration complète de ce théorème. On va néanmoins faire ici celle du point (i). On a besoin au préalable du lemme suivant (démontré en tant que lemme 7.1 dans [32]).
Lemme : Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène. Alors, pour toute paire d'objets $A, X \in Obj(\mathcal{C})$, l'aplication canonique suivante est injective.

$$\begin{array}{rcl} I : Aut(A) & \longrightarrow & \hom_{\mathcal{C}}(A, A \oplus B) \\ f & \longmapsto & f \oplus \iota_B \end{array}$$

On considère les applications

$$i_j^A = \iota_{A \oplus X^{\oplus j-1}} \oplus id_X \oplus \iota_{X^{\oplus p-j+1}} : X = 0 \oplus X \oplus 0 \longrightarrow A \oplus X^{\oplus p+1}.$$

D'après l'hypothèse (**H1**), le résultat de l'énoncé est équivalent à démontrer que le $p-$simplexe $< i_{n-p}^A, \ldots, i_n^A >$ de $S_n(X, A)$ admet uniquement le relèvement

$$(i = \iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{p \oplus 1}}) : X^{\oplus p+1} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n}$$

pour l'ordre canonique de ses sommets.
Soit f un autre relèvement de $< i_{n-p}^A, \ldots, i_n^A >$ pour l'ordre canonique des sommets. D'après l'hypothèse (**H2**), il existe $g \in Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ une application telle que $g \circ i = f$. Or, f est un relèvement de $< i_{n-p}^A, \ldots, i_n^A >$ pour l'ordre canonique des sommets, donc, par définition, pour tout $n - p \leq j \leq n-1$:

$$g \circ i_j^A = (g \circ i) \circ i_j^0 = f \circ i_j^0 = i_j^A.$$

g est donc un élément de $Fix\left(i_{n-p}^A, \ldots, i_n^A\right)$. g fixe donc i_n et ainsi d'après l'hypothèse (**H2**), il existe $g_1 \in Aut\left(A \oplus X^{\oplus n-1}\right)$ tel que $g_1 \oplus id_X = g$.
Soit $n - p \leq j \leq n-1$, on peut écrire $i_j^A = i_j^{A,1} \oplus \iota_X$ où $i_j^{A,1} \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X, A \oplus X^{\oplus n-1}\right)$, et alors :

$$g \circ i_j^A = (g_1 \oplus id_X) \circ \left(i_j^{A,1} \oplus \iota_X\right) = \left(g_1 \circ i_j^{A,1}\right) \oplus \iota_X.$$

Or, g fixe i_j^A, d'où :

$$\left(g_1 \circ i_j^{A,1}\right) \oplus \iota_X = i_j^{A,1} \oplus \iota_X.$$

A fortiori, g_1 fixe $i_j^{A,1}$. Par récurrence, on en déduit que $g = g_{p+1} \oplus id_{X^{p+1}}$. Par définition de i, on obtient donc que :

$$g \circ i = (g_{p+1} \circ \iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}}) \oplus id_{X^{p+1}} = \iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{p+1}} = i.$$

g fixe donc i et on en déduit que $f = i$.
Pour la démonstration du point (ii), on regardera la démonstration du théorème 7.3 de [32]. □

REMARQUE : En l'état actuel des choses, il y a une erreur assez importante dans la définition de l'application $i_{(k,k+1)}$, dans la démonstration au point 3 du théorème 7.3 de [32] (démontrant que si le simplexe $< i_1, i_2 >$ admet tous ses relèvements, alors tout p-simplexe admet tous ses relèvements). En supposant que la catégorie $\mathcal{C}$ est pré-tressée, on sauve la démonstration en introduisant le pré-tressage dans cette définition. Néanmoins, d'après les échanges de courriels avec Mme Wahl, le résultat dans le cas général devrait rester vrai et ce sera sans doute l'objet d'un travail ultérieur.

On en déduit directement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3 : *Il existe deux types d'homéomorphismes possibles pour* $\mid W_n(X,A) \mid$ *par rapport à* $S_n(X,A)$ *:*

(i) *Si tous les simplexes de* $S_n(X,A)$ *admettent tous leurs relèvements, alors* $\mid W_n(X,A) \mid \cong S_n^{ord}(X,A)$.

(ii) *Si tous les simplexes de* $S_n(X,A)$ *admettent un unique relèvement, alors* $\mid W_n(X,A) \mid \cong S_n(X,A)$.

Par ailleurs, dans le cas des catégories homogènes construites à partir de groupoïdes monoïdaux symétriques, la proposition déterminante qui suit est vérifiée.

PROPOSITION : *Soit* $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ *un groupoïde monoïdal symétrique. Alors, les simplexes du complexe simplicial* $S_n(X,A)$ *construits à partir de* $U(\mathcal{G})$ *admettent tous leurs relèvements.*

Démonstration : On peut démontrer (voir le point 3 de la démonstration du théorème 7.3 dans la partie 7 de [32]) qu'il suffit de vérifier le résultat pour le $2-$simplexe $< i_1, i_2 >$ dans $S_2(X,0)$. Les deux relèvements possibles sont en fait respectivement donnés par l'identité $id_{X \oplus X}$ et le tressage symétrique $\sigma_{X,X} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$. D'après la proposition 2, le tressage symétrique de $\mathcal{G}$ induit un tressage symétrique de $U(\mathcal{G})$, et donc, par propriété du tressage :

$$\sigma_{X,X} \circ i_1 = \sigma_{X,X} \circ (id_X \oplus \iota_X) = \iota_X \oplus id_X = i_2;$$

$$\sigma_{X,X} \circ i_2 = \sigma_{X,X} \circ (\iota_X \oplus id_X) = id_X \oplus \iota_X = i_1.$$

Donc le rélèvement donné par le tressage n'est pas celui donné par l'identité. $< i_1, i_2 >$ admet donc tous ses relèvements. □

Enfin, ces dernières propriétés nous seront utiles pour comprendre le lien entre les ensembles semi-simpliciaux et les groupes du type G_n pour une catégorie homogène.

PROPRIÉTÉS : Pour tous objets X, A de $\mathcal{C}$, le groupe $Aut(A \oplus X^{\oplus n})$ agit sur les ensembles $S_n(X,A)$ et $W_n(X,A)$. En effet, pour $\varphi \in Aut(A \oplus X^{\oplus n})$:
• Soit $f : X \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n}$ un sommet de $S_n(X,A)$. Alors, $\varphi \circ f$ est de nouveau un sommet de $S_n(X,A)$ et le relèvement associé est $\varphi \circ \tilde{f}$.
• Pour tout $p \geq 0, (W_n(X,A))_p = \hom\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right)$, donc pour tout $g \in (W_n(X,A))_p$, $\varphi \circ g \in$

$(W_n(X,A))$.
D'après l'hypothèse (**H1**), pour tout entier naturel p fixé, l'action de $Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ est transitive sur l'ensemble des $p-$simplexes et des relèvements pour $S_n(X,A)$ et transitive sur l'ensemble des $p-$simplexes pour $W_n(X,A)$. En particulier, l'action transitive de $Aut\left(A \oplus X^{\oplus n-p-1} \oplus X^{\oplus p+1}\right)$ sur

$$\hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n-p-1} \oplus X^{\oplus p+1}\right)$$

entraîne que

$$\begin{aligned}\forall f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n-p-1} \oplus X^{\oplus p+1}\right), \quad & \exists \varphi \in Aut\left(A \oplus X^{\oplus n-p-1} \oplus X^{\oplus p+1}\right), \\ & f = \varphi \circ \left(\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}}\right).\end{aligned}$$

A fortiori

$$Stab_f\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) = \varphi \circ Stab_{\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}}}\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \circ \varphi^{-1}.$$

Les stabilisateurs sont ainsi tous conjugués et donc tous les mêmes à isomorphisme près. De plus, par définition :

$$Stab_{\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}}}\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) = Fix\left(X^{\oplus p+1}\right).$$

D'après l'hypothèse (**H2**), $Fix\left(X^{\oplus p+1}\right) \cong Aut\left(A \oplus X^{\oplus n-p-1}\right)$. On en déduit que le stabilisateur (unique à isomorphisme près) d'un $p-$simplexe $W_n(X,A)$ est isomorphe à $Aut\left(A \oplus X^{\oplus n-p-1}\right)$.

3.2 Hypothèse de connexité des ensembles semi-simpliciaux

Afin d'étudier la stabilité homologique des groupes $G_n = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$, nous aurons besoin de la haute connexité des ensembles semi-simpliciaux $W_n(X,A)$, c'est-à-dire que ces ensembles sont $n-$connexes pour rang $n \geq 0$ suffisamment grand. La propriété qui suit, garantissant la haute connexité de $S_n^{ord}(X,A)$ si $S_n(X,A)$ est hautement connexe, permettra (grâce au corollaire 3) de vérifier la connexité seulement des complexes simpliciaux $S_n(X,A)$ plutôt que celle des ensembles semi-simpliciaux $W_n(X,A)$ (ce qui s'avère souvent plus simple) dans les démonstrations des théorèmes de stabilité homologique.

Théorème : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène et $A, X \in Obj(\mathcal{C})$.*
Dans le cas où les simplexes de $S_n(X,A)$ admettent tous leurs relèvements, si pour $k \geq 1$ et $a \in \mathbb{Z}$ fixés, $S_n(X,A)$ est $\left(\frac{n-a}{k}\right)-$connexe pout tout $n \in \mathbb{N}$, alors then $S_n^{ord}(X,A)$ est également $\left(\frac{n-a}{k}\right)-$connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avant de démontrer le théorème, il nous faut introduire une nouvelle définition et de nouveaux résultats.

Définition : *Un complexe simplicial X est dit de Cohen-Macauly de dimension n s'il satisfait les trois propriétés suivantes :*

- *(i) X est de dimension n ;*
- *(ii) X est $(n-1)-$connexe ;*
- *(iii) pour tout entier $p \geq 0$, le lien de chaque $p-$simplexe dans X est $(n-p-2)-$connexe.*

On dit que X est faiblement de Cohen-Macauly de dimension n s'il vérifie les propriétés (ii) et (iii).

Les deux propositions suivantes et sont démontrés dans [32] à la page 44.

Propositions : *1) Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène et supposons que les simplexes de $S_n(X,A)$ admettent tous leurs relèvements. Alors :*

- *(i) Si $S_n(X,A)$ est $(n-1)$-connexe, alors $S_n(X,A)$ est de Cohen-Macauly de dimension n.*
- *(ii) Si $S_n(X,A)$ est $\left(\frac{n-a}{k}\right)$-connexe pour un entier $k \geq 1$ et $a \in \mathbb{Z}$, alors $S_n(X,A)$ est faiblement de Cohen-Macauly de dimension $\frac{n-a+k}{k}$.*

2) Si X est un complexe simplicial faiblement de Cohen-Macauly de dimension n, alors l'ensemble semi-simplicial associé X^{ord} est $(n-1)$-connexe.

<u>Démonstration</u> : Il nous faut d'abord introduire. D'après la proposition 1, on sait que $S_n(X,A)$ est faiblement de Cohen-Macauly de dimension $\frac{n-a}{k}+1$. Le résultat découle alors directement du résultat énoncé par la proposition 2. $\square$

Définissons maintenant une nouvelle hypothèse sur les catégories homogènes, concernant une propriété de connexité. Celle-ci se révèlera fondamentale dans les hypothèses des énoncés des théorèmes importants des sections 4, 5 et 6.

Définition : *Soient $(\mathcal{C},\oplus,0)$ une catégorie homogène et $A,X\in Obj(\mathcal{C})$. En considérant l'ensemble semi-simplicial $W_n(X,A)$ donné auparavant, on définit la propriété :*
(H3) *pour tout $n\geq 1$, $W_n(X,A)$ est $\left(\frac{n-2}{k}\right)$ $-$connexe (pour un entier $k\geq 2$ où $k\in\mathbb{N}$).*

Remarque : Si chaque $W_n(X,A)$ est $\left(\frac{n-a}{k}\right)$-connexe pour un entier $a>2$, alors $W_n\left(X,A\oplus X^{\oplus a-2}\right)$ est $\left(\frac{n-a}{k}\right)$-connexe, et donc $\left(X,A\oplus X^{\oplus a-2}\right)$ vérifie l'hypothèse (**H3**).

Enfin, voici une dernière proposition, découlant de notre dernier théorème, utile pour vérifier l'hypothèse (**H3**) pour des exemples classiques.

Proposition : Soient $(\mathcal{C},\oplus,0)$ une catégorie homogène et $A,X\in Obj(\mathcal{C})$.
S'il existe $k\geq 2$ entier naturel tel que $S_n(X,A)$ est $\left(\frac{n-2}{k}\right)$-connexe pour tout entier naturel n, alors la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (**H3**) pour X et A avec l'entier k.

Voyons des cas pour lesquels, l'hypothèse (**H3**) est vérifiée.

Exemple : On considère la catégorie FI. On pose $X=\{*\}$ et $A=\emptyset$, et donc le complexe simplicial considéré est $S_n(\{*\},\emptyset)$, dont les sommets sont les inclusions

$$(X=\{*\}\cong\{1\})\hookrightarrow\left(X^{\oplus n}=\{*\}\sqcup\cdots\sqcup\{*\}\cong\{1,\ldots,n\}\right).$$

Les sommets de $S_n(\{*\},\emptyset)$ peuvent donc être identifiés aux nombres $1,\ldots,n$. Soit $1\leq i_1,\ldots,i_p\leq n$ une collection de sommets distincts, alors l'injection $\{1,\ldots,p\}\hookrightarrow\{1,\ldots,n\}$ permet de définir un p-simplexe dans $S_n(\{*\},\emptyset)$. Toute collection de sommets definit ainsi un simplexe dans $S_n(\{*\},\emptyset)$: $S_n(\{*\},\emptyset)$ s'identifie donc au $(n-1)$-simplexe géométrique Δ^{n-1} (voir section 8.1.5 de [34]) qui est contractible. $S_n(\{*\},\emptyset)$ est donc au moins $\left(\frac{n-2}{2}\right)$-connexe et vérifie donc (**H3**).

Exemple : On considère la catégorie $U(f\mathcal{G})_{libre}$. On choisit $X=\mathbb{Z}$ et $A=\{e\}$, et donc le complexe simplicial considéré est $S_n(\mathbb{Z},\{e\})$. Il s'agit en réalité du complexe des factorisations scindées SF_n considéré par Hatcher et Vogtmann (voir section 6 de [18]) : un p-simplexe dans $S_n(\mathbb{Z},\{e\})$ est une classe d'équivalence d'un morphisme $(f,H):\mathbb{Z}^{*p+1}\longrightarrow\mathbb{Z}^n$ de $U(f\mathcal{G})_{libre}$ à la relation d'équivalence définie par la pré-composition par les permutations des $(p+1)$ facteurs du domaine près. Un p-simplexe dans SF_n est une factorisation non-ordonnée $\mathbb{Z}^{*n}=\mathbb{Z}_0*\cdots*\mathbb{Z}_{p+1}*H$ où $\mathbb{Z}_i\cong\mathbb{Z}$. La seule différence est que $S_n(\mathbb{Z},\{e\})$ comporte le choix de l'isomorphisme $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_i$ pour chaque facteur. À partir de là, on peut démontrer (voir section 6 de [18] et proposition 6.2 de [32]) que $S_n(\mathbb{Z},\{e\})$ est $\left(\frac{n-3}{2}\right)$-connexe.
Ainsi, $S_n(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\cong S_{n+1}(\mathbb{Z},\{e\})$ est $\left(\frac{n-2}{2}\right)$-connexe. On en déduit que $\left(U(f\mathcal{G})_{libre},*,\{e\}\right)$ vérifie l'hypothèse (**H3**) en $(X,A)=(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ avec l'entier $k=2$.

Exemple : On considère la catégorie $(U(fAb),\times,\{e\})$. On choisit $X=\mathbb{Z}$ et $A=\{e\}$. D'après les travaux respectifs effectués par Charney dans la section 2 de [6] et par Wahl au lemme 6.7 de [32], on peut démontrer que $S_n(\mathbb{Z},\{e\})$ est $\left(\frac{n-2}{2}\right)$-connexe.

4 Stabilité homologique à coefficients constants

Cette partie est consacrée à l'étude de la stabilité homologique à coefficients constants pour une catégorie homogène : nous verrons que si une catégorie homogène $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ vérifie l'hypothèse (**H3**), alors les groupes $Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ sont stables en homologie à coefficients constants $\mathbb{Z}$. C'est le résultat donné par le théorème A que nous énoncerons dans un premier temps. Nous nous intéresserons dans les sous-parties qui suivront à la démonstration de ce théorème, s'inspirant d'un argument classique de Quillen dans le cas des groupes généraux linéaires. Elle s'effectuera en deux temps : d'une part, en s'appuyant sur un résultat d'un autre article de Wahl et Hatcher (voir [17]), on fera une démonstration pour $k = 2$; d'autre part, nous verrons la démonstration générale de ce résultat.

4.1 Énoncé du théorème

La stabilité homologique à coefficients constants pour $G_n = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ est donnée par :

Théorème A : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène, vérifiant pour une paire $A, X \in Obj\left(\mathcal{C}\right)$ l'hypothèse* (**H3**) *avec un entier $k \geq 2$. On considère l'application en homologie :*

$$H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \xrightarrow{\Psi} H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right)\right).$$

Il s'agit de l'unique application définie en homologie qui est induite par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_n^X : G_n & \longrightarrow & \left(G_{n+1} = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n} \oplus X\right)\right). \\ f & \longmapsto & f \oplus id_X \end{array}$$

Alors, Ψ est un isomorphisme si $i \leq \frac{n-1}{k}$ et une surjection si $i \leq \frac{n}{k}$.

Soit $W_n := W_n\left(X, A\right)$ l'ensemble semi-simplicial défini à la partie 3, c'est-à-dire que

$$\forall p \geq 0, \left(W_n\left(X, A\right)\right)_p := \hom\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right);$$

et soit $G_n = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ le groupe agissant sur W_n par post-composition. D'après le théorème 5.1 de [17], si G_n et W_n satisfont trois conditions particulières et si W_n est au moins $\left(\frac{n-2}{2}\right)$-connexe, alors les propriétés pour les groupes d'homologie sont satisfaites pour les mêmes bornes. On va vérifier que ces trois conditions sont valables dans la sous-partie suivante afin d'ainsi démontrer le théorème A pour $k = 2$, avant de le démontrer dans le cas général dans la dernière sous-partie. Ce résultat permet de retrouver des résultats importants, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : On considère la catégorie homogène pré-tressée $\left(U\left(f\mathcal{G}\right)_{libre}, *, \{e\}\right)$, dont on a montré qu'elle vérifiait l'hypothèse (**H3**) en $(X, A) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ avec l'entier $k = 2$. En appliquant le théorème A, on peut retrouver le théorème 7.1 de [18].

Par ailleurs, le théorème A permet de faire la conjecture suivante :

Conjecture : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène. Si $G_n = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ vérifie la stabilité homologique (pour la limite d'injectivité $i \leq \frac{n-1}{k}$ et la limite de surjectivité $i \leq \frac{n}{k}$), alors $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse* (**H3**).

4.2 Démonstration pour $k = 2$

L'énoncé suivant est un raffinement du théorème 5.1 de [17], où on considère des complexes simpliciaux.

Théorème : *Soit $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ une suite de groupes, chaque groupe G_n agissant sur un ensemble semi-simplicial X_n de dimension au moins $n-1$. On suppose que cette action vérifie les trois conditions suivantes :*

(i) Pour tout n, l'action de G_n sur X_n est transitive sur les $p-$simplexes, pout tout p, et le stabilisateur de chaque simplexe fixe le simplexe point par point.

(ii) Le sous-groupe de G_n fixant un $p-$simplexe point par point est isomorphe à G_{n-k-1} pour $0 \leq k \leq p$.

(iii) Pour chaque arête de X_n de sommets v et w, il existe $g \in G_n$ qui envoie v sur w et qui commute avec tous les éléments de G_n qui laisse l'arête fixe point par point.

Sous ces hypothèses, si chaque X_n est $\left(\frac{n-2}{2}\right)$-connexe, alors l'application $H_i(G_n) \longrightarrow H_i(G_{n+1})$ induite par l'inclusion $G_n \hookrightarrow G_{n+1}$ est un isomorphisme si $n \geq 2i+1$ et une surjection si $n = 2i$.

Démontrons donc chacune des trois conditions pour $G_n = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ agissant sur W_n.

(i) Pour tout n, l'action de G_n sur W_n est transitive sur les $p-$simplexes, pout tout p, et le stabilisateur de chaque simplexe fixe le simplexe point par point.

<u>*Démonstration*</u> : D'une part, d'après l'hypothèse (**H1**), on obtient directement que G_n agit transitivement sur l'espace des $p-$simplexes de W_n, à savoir l'ensemble $\hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right)$.
Soit $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right)$ un $p-$simplexe de W_n, soit $\varphi \in Stab_f(G_n)$. Les sommets de f sont les $f \circ i_j^0 = f \circ \left(\iota_{X^{\oplus j-1}} \oplus id_X \oplus \iota_{X^{\oplus p-j+1}}\right)$ où $j \in \{1, \ldots, p\}$. Alors, puisque $\varphi \in Stab_f(G_n)$:

$$\varphi \circ \left(f \circ i_j^0\right) = (\varphi \circ f) \circ i_j^0 = f \circ i_j^0.$$

D'où, le stabilisateur d'un $p-$simplexe $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right)$ fixe ses sommets $f \circ \iota_j^0$: il fixe donc le $p-$simplexe point par point. $\square$

(ii) Le sous-groupe de G_n fixant un $p-$simplexe point par point est isomorphe à G_{n-k-1} pour $0 \leq k \leq p$ (ici pour $k = p$).

<u>*Démonstration*</u> : Soit $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right)$ un $p-$simplexe de W_n. Le sous-groupe de G_n fixant f point par point est le stabilisateur de f pour l'action de G_n, noté $Stab_f(G_n)$. D'après l'hypothèse (**H1**), l'action de G_n est transitive sur l'ensemble des $p-$simplexes de W_n. En particulier, on obtient que

$$\forall f \in W_n, \exists \varphi \in Aut(G_n), f = \varphi \circ \left(\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}}\right)$$

où $\left(\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}} : 0 \oplus X^{\oplus p+1} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n-p-1} \oplus X^{\oplus p+1}\right) \in W_n$. A fortiori

$$Stab_f(G_n) = \varphi \circ Stab_{\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}}}(G_n) \circ \varphi^{-1},$$

en d'autres termes, $Stab_f(G_n)$ est donc conjugué à $Stab_{\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}}}(G_n)$. De plus, par définition :

$$Stab_{\iota_{A \oplus X^{\oplus n-p-1}} \oplus id_{X^{\oplus p+1}}}(G_n) = Fix\left(X^{\oplus p+1}\right).$$

D'après l'hypothèse (**H2**), $Fix\left(X^{\oplus p+1}\right) \cong Aut\left(A \oplus X^{\oplus n-p-1}\right) \cong G_{n-p-1}$. On en déduit que :

$$Stab_f(G_n) \cong G_{n-p-1}.\square$$

(iii) Pour chaque arête (c'est-à-dire un $2-$simplexe) f de W_n, il existe $g \in G_n$ qui envoie $d_0 f$ sur $d_1 f$ (les deux extrémités de f) et qui commute avec tous les éléments de G_n qui laissent l'arête fixe point par point.

<u>*Démonstration*</u> : On peut démontrer que (voir le point 3 de la démonstration du théorème 7.3 dans la partie 7 de [32]) d'après l'hypothèse (**H1**), il suffit de vérifier cette condition pour le $2-$simplexe

$$\iota_{A \oplus X^{\oplus n-2}} \oplus id_{X^{\oplus 2}} : X^{\oplus 2} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n}.$$

On pose $d_0 f := f \circ (id_X \oplus \iota_X)$ et $d_1 f := f \circ (\iota_X \oplus id_X)$. D'après l'hypothèse (**H1**), puisque $(id_X \oplus \iota_X)$ et $(\iota_X \oplus id_X)$ sont dans $\hom(X, X \oplus X)$, alors il existe $g \in Aut_{\mathcal{C}}(X \oplus X)$ tel que $g \circ (id_X \oplus \iota_X) = \iota_X \oplus id_X$. On pose donc $\hat{g} = (id_{A \oplus X^{\oplus n-2}} \oplus g) \in G_n$, qui vérifie ainsi

$$\hat{g} \circ d_1 f = d_0 f.$$

De plus, d'après le travail de la démonstration de la condition (ii), on sait que

$$Stab_f (G_n) = Stab_{\iota_{A \oplus X^{\oplus n-2}} \oplus id_{X^{\oplus 2}}} (G_n)$$

et d'après l'hypothèse (**H2**), $Stab_{\iota_{A \oplus X^{\oplus n-2}} \oplus id_{X^{\oplus 2}}} (G_n) \cong G_{n-2}$. Or $\hat{g}$ se réduit à l'identité sur $A \oplus X^{\oplus n-2}$. D'où, $\hat{g}$ commute avec tous les éléments de $Stab_f (G_n)$. $\square$

4.3 Démonstration dans le cas général

Démontrons maintenant le théorème A dans le cas général, c'est-à-dire pour tout k. Nous en donnerons essentiellement la stratégie et les grandes étapes. Pour plus de détails, on se référera à la partie 3 de [32] (aux pages 12-14) et la partie 3 de [5] (aux pages 559-561).

1) Construction d'une suite spectrale associée à l'homologie de G_n

La méthode de cette démonstration consiste à définir une suite spectrale dont la première différentielle va correspondre à l'application en homologie $H_i (G_n) \longrightarrow H_i (G_{n+1})$. D'une part, tout $A-$module (où A est un anneau) admet une résolution libre. D'où, il existe $E_* G_{n+1}$ une résolution libre de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}G_{n+1}$. D'autre part, on considère $\widetilde{C}_* (W_{n+1})$ le complexe de chaîne cellulaire augmenté de W_{n+1} ; il se définit par :

$$\widetilde{C}_p (W_n) = \mathbb{Z} (W_n)_p = \begin{cases} \mathbb{Z} \hom \left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right) & si \;\; p \in \mathbb{N} \\ \mathbb{Z} & si \;\; p = -1 \end{cases}$$

et les différentielles sont données par :

$$\partial_p = \begin{cases} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i d_i & si \;\; p \geq 1 \\ id_{\mathbb{Z}} & si \;\; p = 0 \end{cases}$$

où les

$$\begin{array}{rcl} d_i : \hom \left(X^{\oplus p+1}, A \oplus X^{\oplus n}\right) & \longrightarrow & \hom \left(X^{\oplus p}, A \oplus X^{\oplus n}\right) \\ \left[f : X^{\oplus p+1} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n}\right] & \longmapsto & \left[(f \circ id_{X^{\oplus i}} \oplus \iota_X \oplus id_{X^{p-i}}) : X^{\oplus p+1} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n}\right]. \end{array}$$

désignent les applications de faces. On considère alors les suites spectrales associées au complexe de chaîne double $E_* G_{n+1} \otimes_{G_{n+1}} \widetilde{C}_* (W_{n+1})$.

D'après l'hypothèse (**H3**), W_n est $\left(\frac{n-2}{k}\right)$-connexe. Alors, on peut montrer (voir [33]) que la suite spectrale horizontale (c'est-à-dire que le terme E^1 correspond à l'homologie de $E_* G_{n+1} \otimes_{G_{n+1}} \widetilde{C}_* (W_{n+1})$ par rapport à la différentielle horizontale) converge vers 0 si $p \leq \frac{n-1}{k}$, et qu'ainsi la suite spectrale verticale converge vers 0 pour $p + q \leq \frac{n-1}{k}$. De plus, puisque l'action de G_{n+1} sur les $p-$simplexes de W_{n+1} est transitive (d'après l'hypothèse (**H1**)), l'utilisation du lemme de Shapiro (voir parties 5, 7 et 8 du chapitre VII (p. 168-178) de [5]) permet de montrer que les termes de la première page de la suite spectrale sont

$$E^1_{p,q} = H_q (Stab (\sigma_p), \mathbb{Z})$$

où $Stab\left(\sigma_p\right)$ désigne le stabilisateur d'un $p-$simplexe quelconque. Les différentielles sont induites par les sommes alternées des applications :

$$H_q\left(Stab\left(\sigma_p\right),\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{d_i} H_q\left(Stab\left(d_i\sigma_p\right),\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{c_h} H_q\left(Stab\left(\sigma_{p-1}\right),\mathbb{Z}\right)$$

où c_h désigne la conjugaison par un élément $h \in G_{n+1}$ envoyant $d_i\sigma_p$ sur le $(p-1)$-simplexe σ_{p-1}. Ainsi, grâce à l'étude de cette suite spectrale, on va finalement pouvoir démontrer le résultat du théorème, c'est-à-dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$, la différentielle

$$\delta_i^1 : E_{0,i}^1 = H_i\left(G_n\right) \longrightarrow E_{-1,i}^1 = H_i\left(G_{n+1}\right)$$

est surjective si $n \geq ki$ et injective si $n \geq ki+1$. On va raisonner par récurrence sur i. L'initialisation (à savoir le cas $i=0$) est triviale car $H_0\left(G_n\right) \cong H_0\left(G_{n+1}\right) \cong \mathbb{Z}$. C'est l'hérédité de cette récurrence qui va nécessité plus de travail.

2) Surjectivité de δ^1

Pour la surjectivité, on suppose que le résultat a été établi jusqu'au rang $i-1$ et que $n \geq ki$ pour $i \geq 1$. Alors, on obtient les deux propriétés suivantes.

(i) $E_{-1,i}^{\infty} = 0$.

En effet, on sait que $E_{p,q}^{\infty} = 0$ si $p+q \leq \frac{n-1}{k}$, or on suppose que $n \geq 2i$ et $k \geq 1$ et donc $i-1 \leq \frac{n}{k}-1 \leq \frac{n-1}{k}$.

(ii) $E_{p,q}^2 = 0$ pour $p+q=i$ et $q<i$.

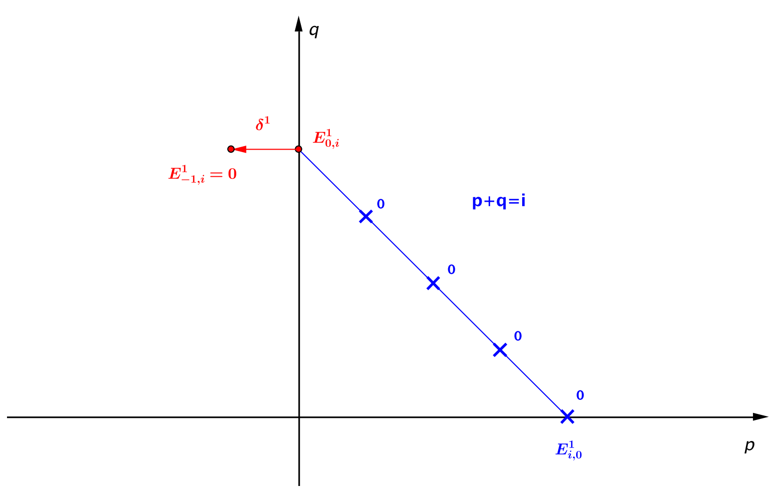
En effet, on peut montrer (voir page 13 dans [32]) que l'inclusion du stabilisateurs $Stab\left(\sigma_p\right)$ dans le groupe G_{n+1} induit le morphisme en homologie

$$E_{p,q}^1 = H_q\left(Stab\left(\sigma_p\right),\mathbb{Z}\right) \longrightarrow H_q\left(G_{n+1},\mathbb{Z}\right)$$

qui est un isomorphisme si $p+q \leq i$ et une surjection si $p+q=i+1$. L'action de $c_h : H_q\left(Stab\left(d_i\sigma_p\right),\mathbb{Z}\right) \longrightarrow H_q\left(Stab\left(\sigma_{p-1}\right),\mathbb{Z}\right)$ sur $H_q(G_{n+1},\mathbb{Z})$ est l'identité, donc le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
H_q\left(Stab\left(\sigma_p\right),\mathbb{Z}\right) \arrow[r, "d_i"] \arrow[d] & H_q\left(Stab\left(d_i\sigma_p\right),\mathbb{Z}\right) \arrow[r, "c_h"] \arrow[dl] & H_q\left(Stab\left(\sigma_{p-1},\mathbb{Z}\right)\right) \arrow[d] \\
H_q\left(G_{n+1},\mathbb{Z}\right) \arrow[rr, "id"] & & H_q\left(G_{n+1},\mathbb{Z}\right)
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme définit alors une application de complexes de chaînes, du complexe de chaînes de la $q-$ième ligne de la page E^1 de la suite spectrale au complexe de chaîne singulière à coefficients constants $H_q\left(G_{n+1},\mathbb{Z}\right)$. Cette application est alors un isomorphisme si $p+q \leq i$ et une surjection si $p+q=i+1$.



L'élément $E^1_{-1,i}$ doit donc être éliminé avant la page E^∞ d'après la propriété (i) et il s'agit du but de l'application δ^1_i. Or, les seules sources de différentielles autres que $E^1_{0,i}$ qui aboutissent en $E^1_{-1,i}$ (et a fortiori susceptibles de l'éliminer) sont situées sur la droite $p+q=i$ (et $q<i$) et nulles d'après la propriété (ii) (voir la figure). Ainsi, la seule différentielle qui peut éliminer $E^1_{-1,i}$ est δ^1_i : δ^1_i est donc surjective.

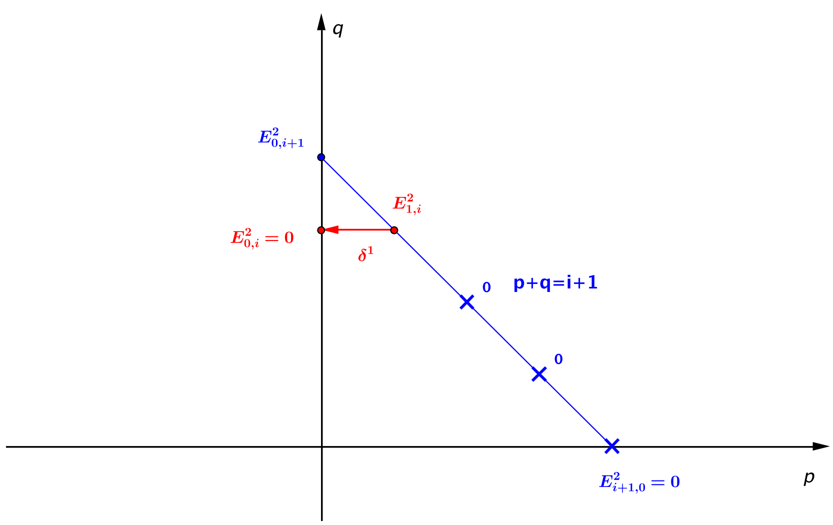
3) Injectivité de δ^1

Pour l'injectivité, on suppose que le résultat a été établi jusqu'au rang $i-1$ et que $n \geq ki+1$ pour $i \geq 1$. Alors, on obtient les trois propriétés suivantes.

(i) $E^\infty_{0,i} = 0$.
Cela se déduit directement à partir de l'inégalité $n \geq ki+1$ et du fait que $E^\infty_{p,q} = 0$ si $p+q \leq \frac{n-1}{k}$.
(ii) $E^2_{p,q} = 0$ pour $p+q = i+1$ et $q < i$.
On peut le montrer d'une manière analogue à celle de la propriété (ii) du paragraphe précédent (voir p. 13 dans [32]).
(iii) $\delta^1 : E^2_{1,i} \longrightarrow E^2_{0,i}$ est une application nulle.
En effet, $\delta^1 = c_{h_1} \circ d_1 - c_{h_0} \circ d_0$ où $h_0, h_1 \in G_{n+1}$. On peut choisir $h_0 = id_{A \oplus X^{n+1}}$ et h_1 l'élément envoyant $d_1\sigma_1$ sur $d_0\sigma_1$ et commutant avec $Stab\,(\sigma_1)$ (et donc c_{h_1} est l'identité sur $Stab\,(\sigma_1)$). Or le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} Stab\,(\sigma_1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "c_{h_1}=id"'] & Stab\,(d_1\sigma_1) \arrow[d, "c_{h_1}"] \\ Stab\,(\sigma_1) \arrow[r, "d_0"] & Stab\,(d_0\sigma_1) \end{tikzcd}$$

D'où $c_{h_0} \circ d_0 = d_0 = c_{h_1} \circ d_1$ et a fortiori $\delta^1 = 0$.



L'élément $E^1_{0,i}$ doit donc être éliminé avant la page E^∞ d'après la propriété (i) et il s'agit du but de l'application δ^1_i. Or, les seules sources de différentielles (pour les pages supérieures ou égales à 2) autres que $E^1_{1,i}$ qui aboutissent en $E^1_{0,i}$ (et a fortiori susceptibles de l'éliminer) sont situées sur la droite $p+q=i$ (et $q<i$) et nulles d'après la propriété (ii). Puisque $\delta^1 : E^2_{1,i} \longrightarrow E^2_{0,i}$ est une application nulle d'après la propriété (iii), la seule différentielle qui peut éliminer $E^1_{0,i}$ est δ^1_i : δ^1_i est donc injective.

5 Stabilité homologique à coefficients tordus, version qualitative

Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène, que l'on considérera tout au long de cette section. On suppose également que $\mathcal{C}$ est pré-tressée. Nous nous intéresserons aux propriétés qualitatives de la stabilité homologique à coefficients tordus pour les groupes d'automorphismes de cette catégorie homogène. Nous devrons d'abord introduire les notions de suspensions supérieures et inférieures, puis de systèmes de coefficients, afin de comprendre et d'ainsi aborder le résultat central de cette partie : le théorème B.

5.1 Suspensions supérieures et inférieures

On s'intéresse dans notre étude aux applications de stabilisation $G_n = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right) \longrightarrow G_{n+1} = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right)$. Deux applications lui sont naturellement associées : la suspension supérieure et la suspension inférieure.

Définition : *On définit :*
- *la suspension supérieure :*

$$\sigma^X := id_{A \oplus X^{\oplus n}} \oplus \iota_X : A \oplus X^{\oplus n} \longrightarrow A \oplus X^{\oplus n+1};$$

- *la suspension inférieure :*

$$\sigma_X := \iota_X \oplus id_{A \oplus X^{\oplus n}} : A \oplus X^{\oplus n} \longrightarrow X \oplus A \oplus X^{\oplus n}.$$

Remarque : Puisque $\mathcal{C}$ est supposée pré-tressée, il existe un isomorphisme $b_{X,A} : X \oplus A \longrightarrow A \oplus X$ de pré-tressage. Alors, on obtient par définition du pré-tressage :

$$b_{X,A} \circ \sigma^X = \sigma_X : A \oplus X^{\oplus n} \longrightarrow X \oplus A \oplus X^{\oplus n}.$$

Les suspensions supérieures et inférieures définissent des transformations naturelles de l'identité à un endofoncteur de $\mathcal{C}$.

Définition : *On définit le foncteur dit de suspension supérieure :*

$$\Sigma^X := - \oplus X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

par :
- *pour $B \in Obj\left(\mathcal{C}\right)$, $\Sigma^X\left(B\right) = B \oplus X$;*
- *pour $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(A, B\right)$, $\Sigma^X\left(f\right) = f \oplus id_X \in \hom_{\mathcal{C}}\left(A \oplus X, B \oplus X\right)$.*

On définit une transformation naturelle $\sigma^X := Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow \Sigma^X$ par :

$$\forall B \in Obj\left(\mathcal{C}\right), \left(\sigma^X\right)_B := B \longrightarrow B \oplus X.$$

Définition : *On définit le foncteur dit de suspension inférieure :*

$$\Sigma_X := X \oplus - : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

par :
- *pour $B \in Obj\left(\mathcal{C}\right)$, $\Sigma^X\left(B\right) = X \oplus B$;*
- *pour $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(A, B\right)$, $\Sigma^X\left(f\right) = id_X \oplus f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X \oplus A, X \oplus B\right)$.*

On définit une transformation naturelle $\sigma_X := Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow \Sigma_X$ par :

$$\forall B \in Obj\left(\mathcal{C}\right), \left(\sigma_X\right)_B := B \longrightarrow X \oplus B.$$

Remarque : Les deux foncteurs Σ_X et Σ^X commutent. En effet :
- pour $B \in Obj\left(\mathcal{C}\right)$, $\Sigma^X \circ \Sigma_X\left(B\right) = B \oplus X = \Sigma_X \circ \Sigma^X\left(B\right)$;
- pour $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(A, B\right)$, $\Sigma^X \circ \Sigma_X\left(f\right) = id_X \oplus f \oplus id_X = \Sigma_X \circ \Sigma^X\left(f\right)$.

5.2 Les systèmes de coefficients

Afin d'étudier une propriété qualitative de la stabilité homologique à coefficients tordus, il nous est nécessaire d'introduire au préalable les systèmes de coefficients. Pour $X, A \in Obj(\mathcal{C})$, on notera $\mathcal{C}_{X,A}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont $X^{\oplus m} \oplus A \oplus X^{\oplus n}$ pour tous entiers $m, n \geq 0$.

Définition : *Pour $X, A \in Obj(\mathcal{C})$, un système de coefficients pour $\mathcal{C}$ en (X, A) est un foncteur $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne.*

Remarque : Soit $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients. Alors, F associe à la suite de groupes $G_n = Aut_{\mathcal{C}_{X,A}}(A \oplus X^{\oplus n})$ une suite de G_n-modules $F_n := F(A \oplus X^{\oplus n})$, munie d'applications équivariantes $F_n \overset{F \circ \Sigma^X}{\longrightarrow} F_{n+1}$. On obtient donc par composition une application $F_n \longrightarrow F_{n+m}$. Le groupe $Aut(X^{\oplus m})$ agit alors trivialement sur l'image de F_n dans F_m. La réciproque de ce fait est donnée par le proposition suivante.

Proposition : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène pré-tressée, $A \in Obj(\mathcal{C})$ et $X \in Obj(\mathcal{C})$, $X \neq 0$. Si $\{M_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de G_n-modules munie d'applications G_n-équivariantes $\sigma_n : M_n \longrightarrow M_{n+1}$ telles que $Aut(X^{\oplus m})$ agit trivialement sur l'image de M_n dans M_{n+1}, alors il existe un foncteur*

$$F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

tel que $F(A \oplus X^{\oplus n}) = M_n$ en tant que G_n-module et $\sigma_n = F(id_{A\oplus X^{\oplus n}} \oplus \iota_X)$.

<u>*Démonstration*</u> : On va construire le foncteur F dont on énonce l'existence. On pose :

- pour $X^{\oplus m} \oplus A \oplus X^{\oplus n} \in Obj(\mathcal{C}_{X,A})$, $F(X^{\oplus m} \oplus A \oplus X^{\oplus n}) = M_{n+m}$;
- pour $f \in \hom_{\mathcal{C}}\left(X^{\oplus k} \oplus A \oplus X^{\oplus m}, X^{\oplus l} \oplus A \oplus X^{\oplus n}\right)$, où $k + m \leq l + n$, d'après l'hypothèse (**H1**), on peut décomposer f sous la forme

$$f = b_{A\oplus X^{\oplus n}, X^{\oplus l}} \circ \phi \circ (id_{A\oplus X^{\oplus m+k}} \oplus \iota_{X^{\oplus n+l-m-k}}) \circ b^{-1}_{A\oplus X^{\oplus m}, X^{\oplus k}},$$

où $\phi \in Aut\left(A \oplus X^{\oplus n+l}\right) = G_{n+l}$. On pose alors :

$$F(id_{A\oplus X^{\oplus n}} \oplus \iota_{X^{\oplus m}}) = (\sigma_{n+m-1} \circ \cdots \circ \sigma_n) : F\left(A \oplus X^{\oplus n}\right) \longrightarrow F\left(A \oplus X^{\oplus n+m}\right)$$

$$F\left(b_{A\oplus X^{\oplus n}, X^{\oplus m}}\right) = id_{M_{n+m}} : F\left(A \oplus X^{\oplus n+m}\right) \longrightarrow F\left(X^m \oplus A \oplus X^{\oplus n}\right).$$

De plus, $\phi \in Aut\left(A \oplus X^{\oplus n+l}\right)$ est déterminé à automorphisme de $X^{\oplus n+l-m-k}$ près. Or les automorphismes de $X^{\oplus n+l-m-k}$ agissent trivialement sur l'image de M_{m+k} dans M_{n+l} et donc $F(f)$ est indépendant du choix de ϕ. On en déduit alors $F(f)$ via sa décomposition à partir des valeurs attribuées aux applications du type $id_{A\oplus X^{\oplus n}} \oplus \iota_{X^{\oplus m}}$ et $b_{A\oplus X^{\oplus n}, X^{\oplus m}}$. Notre définition respecte la composition des applications : il suffit d'appliquer F au diagramme suivant qui est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
A \oplus X^{\oplus m} \arrow[r, "\left(id\oplus\iota_{X^{\oplus k}}\right)"] \arrow[dr, "\left(id\oplus\iota_{X^{\oplus k+l}}\right)"'] & A \oplus X^{\oplus m+k} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\left(id\oplus\iota_{X^{\oplus l}}\right)"] & A \oplus X^{\oplus m+k} \arrow[d, "\left(id\oplus\iota_{X^{\oplus l}}\right)"] \\
 & A \oplus X^{\oplus m+k+l} \arrow[r, "\Sigma^X_\phi"] \arrow[dr, "\psi\circ\Sigma^X_\phi"'] & A \oplus X^{\oplus m+k+l} \arrow[d, "\psi"] \\
 & & A \oplus X^{\oplus m+k+l}
\end{tikzcd}$$

Le carré suivant du diagramme est commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \oplus X^{\oplus m+k} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(id \oplus \iota_{X^{\oplus l}})"] & A \oplus X^{\oplus m+k} \arrow[d, "(id \oplus \iota_{X^{\oplus l}})"] \\
A \oplus X^{\oplus m+k+l} \arrow[r, "\Sigma^X_\phi"] & A \oplus X^{\oplus m+k+l}
\end{tikzcd}$$

car $\sigma_X(\phi)$ est défini comme une transformation naturelle de $Id(\phi)$ à Σ^X_ϕ. $\square$

Enfin, la pré-composition par un endofoncteur de $\mathcal{C}_{X,A}$ sur un système de coefficients permet d'en définir un nouveau. En particulier, Σ_X et Σ^X restreints à $\mathcal{C}_{X,A}$ deviennent des endofoncteurs de $\mathcal{C}_{X,A}$.

Définition : *Soit $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients. La suspension de F par rapport à X est le foncteur $\Sigma F := F \circ \Sigma_X$.*

On peut alors définir des nouveaux systèmes de coefficients. Remarquons avant cela que la transformation naturelle σ_X induit une transformation naturelle $F(\sigma_X) : F \to \Sigma F$.

Définitions : *Soit $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients. On considère la transformation naturelle $F(\sigma_X) : F \to \Sigma F$. On définit : :*

- $\ker(F) := \ker(F(\sigma_X))$ *c'est-à-dire le foncteur K tel que pour tout $Y = X^{\oplus m} \oplus A \oplus X^{\oplus n} \in Obj(\mathcal{C}_{X,A})$:*

$$K(Y) = \ker(F(\sigma_X)(Y));$$

- *$coker(F) := coker(F(\sigma_X))$ c'est-à-dire le foncteur C tel que pour tout $Y = X^{\oplus m} \oplus A \oplus X^{\oplus n} \in Obj(\mathcal{C}_{X,A})$:*

$$C(Y) = coker(F(\sigma_X)(Y)).$$

Ainsi $\ker(F)$ *et $coker(F)$ définissent deux nouveaux systèmes de coefficients.*

5.3 Stabilité homologique à coefficients tordus

Il nous faut d'abord donner la définition de stabilité forte afin d'énoncer le théorème majeur de cette partie. La suspension supérieure σ^X induit une application $F(\sigma^X) : F(A \oplus X^{\oplus n}) \to F(A \oplus X^{\oplus n+1})$, qui est équivariante par rapport à l'inclusion :

$$\begin{array}{rcl} Aut(\Sigma^X) : Aut(A \oplus X^{\oplus n}) & \longrightarrow & Aut(A \oplus X^{\oplus n+1}). \\ \phi & \longmapsto & \phi \oplus id_X \end{array}$$

On peut alors définir des applications particulières en homologie et définir la stabilité forte de ces applications.

Définition : *Soit $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients. Pour tout $i \geq 0$ et tout $n \geq 1$, on pose :*

$$H_i(Aut(\Sigma^X), F(\sigma^X)) : H_i(Aut(A \oplus X^{\oplus n}), F(A \oplus X^{\oplus n})) \longrightarrow H_i(Aut(A \oplus X^{\oplus n+1}), F(A \oplus X^{\oplus n+1})).$$

Définition : *On dit qu'un foncteur F est stable par rapport à X en A si pour tout $i \geq 0$, l'application*

$$H_i(Aut(\Sigma^X), F(\sigma^X)) : H_i(Aut(A \oplus X^{\oplus n}), F(A \oplus X^{\oplus n})) \longrightarrow H_i(Aut(A \oplus X^{\oplus n+1}), F(A \oplus X^{\oplus n+1}))$$

est un isomorphisme lorsque n est suffisamment grand, c'est-à-dire pour $n \geq b(i)$ où $b(i)$ est une borne fini, déterminée par i.
On dit qu'un foncteur F est fortement stable par rapport à X en A si la suspension itérée $\Sigma^r F$ est stable

pour tout $r \geq 1$.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette partie. Celui-ci permet d'induire la stabilité forte d'un système de coefficients si son noyau et son conoyau sont fortement stables.

Théorème B : *Soient* $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ *une catégorie homogène pré-tressée,* $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *un système de coefficients,* $X, A \in Obj(\mathcal{C})$. *Supposons que la catégorie* $\mathcal{C}$ *vérifie l'hypothèse* (**H3**) *pour un entier* k. *Si les systèmes de coefficients* $\ker(F)$ *et* $\operatorname{coker}(F)$ *sont fortement stables par rapport à* X *en* A, *alors* F *est fortement stable par rapport à* X *en* A.

Ce théorème permet par exemple de montrer que les systèmes de coefficients dont les noyaux et conoyaux itérés sont triviaux sont fortement stables, ce sera l'objet d'étude de la partie 6.

5.4 Idée de la démonstration du Théorème B

Nous donnons ici les principales étapes et l'idée de la démonstration du théorème B. Le détail de cette démonstration est situé dans [32] des pages 17 à 23. Avant d'aborder la démonstration en soi, mettons au clair certaines notations et notions. Comme précédemment, on pose $G_n = Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$ et $F_n = F\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)$. Nous aurons également besoin d'une nouvelle notion : celle de groupe d'homologie relatif. Brièvement, pour $R_n \to \mathbb{Z}$ et $R_{n+1} \to \mathbb{Z}$ des résolutions projectives de $\mathbb{Z}$ en tant que respectivement G_n et $G_{n+1}-$modules, on considère l'application :

$$\varphi : R_n \otimes_{G_n} F_n \longrightarrow R_{n+1} \otimes_{G_{n+1}} F_{n+1}$$

obtenue à partir de l'application (unique à homotopie près) de G_n-complexes de chaînes $R_n \longrightarrow R_{n+1}$ issue du théorème de comparaison en algèbre homologique (voir théorème 2.2.6 de [34]). On définit le cône d'application de φ :

$$M(\varphi) := \begin{cases} \left(M_k(\varphi) = \left(R_n \otimes_{G_n} F_n\right)_k \oplus \left(R_{n+1} \otimes_{G_{n+1}} F_{n+1}\right)_k\right)_{k \in \mathbb{N}} \\ \delta\left(\lambda_n, \lambda_{n+1}\right) = \left(-\delta_1\left(\lambda_1\right), \delta_2\left(\lambda_2\right) + \varphi\left(\lambda_1\right)\right) \end{cases}$$

Les groupes d'homologie relatifs

$$Rel_*^F(A, n) = H_*\left(G_{n+1}, G_n; F_{n+1}, F_n\right)$$

associés à l'application induite par la suspension $Aut\left(\Sigma^X\right) : G_n \longrightarrow G_{n+1}$ sont ceux associés au cône d'application $M(\varphi)$. On se référera à [12] et au chapitre 2, sous-partie 4 (p.44-48) de [**?**] pour des définitions, propositions et explications précises et rigoureuses à propos des groupes d'homologie relatifs. D'après le lemme 2.3 de [12], on a la suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow H_k\left(G_n, F_n\right) \longrightarrow H_k\left(G_{n+1}, F_{n+1}\right) \longrightarrow Rel_k^F(A, n) \longrightarrow H_{k-1}\left(G_n, F_n\right) \longrightarrow \cdots \qquad (*)$$

Ainsi, la stabilité du système de coefficients F est équivalente au fait que les groupes $Rel_k^F(A, n)$ soient nuls pour tout k, pour n grand. Le théorème B est donc équivalent au fait que les groupes $Rel_k^{\Sigma^j F}(A, n)$ sont nuls si n est plus grand qu'une certaine borne $b_{\Sigma^j F}(k)$, dépendante de k et de j. On va raisonner par récurrence sur k, l'hypothèse de récurrence pour $k \geq 1$ étant :

(**HR**) $Rel_i^{\Sigma^j F}(A, n)$ *est nul pour tout* j *et pour tout* $0 \leq i < k+1$ *si* $n \geq b_{\Sigma^j F}(i)$.

Pour $k = 0$, $Rel_0^F(A, n) = 0$ (cela provient de la suite exacte $(*)$, puisque $H_0\left(G_n, F_n\right) \cong H_0\left(G_{n+1}, F_{n+1}\right)$) et d'après le lemme $B.3$ (donné ci-dessous) : pour tout j, $Rel_0^{\Sigma^j F}(A, n) \cong Rel_0^F(A, n)$ pour n suffisamment grand. Donc le résultat est vérifié pour $k = 0$ et on travaille ensuite par récurrence. À cette fin, nous ferons appel à différents résultats intermédiaires importants et fondamentaux. Leurs démonstrations se situent toutes dans [32].

1) Factorisation de l'application induite par la suspension inférieure

Les démonstrations des deux résultats qui suivent se situent pages 18 et 19 de [32].

Lemme B.1 : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène pré-tressée, $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients, $X, A \in Obj(\mathcal{C})$. Alors, il y a un isomorphisme :*

$$Rel_i^F(A, q+1) \cong Rel_i^F(X \oplus A, q).$$

Proposition B.2 : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène, $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients, $X, A \in Obj(\mathcal{C})$. Alors, la suspension inférieure induit une application :*

$$Rel_i^F(\Sigma_X, F(\sigma_X)) : Rel_i^F(A, q) \longrightarrow Rel_i^F(X \oplus A, q).$$

Cette application se factorise en une composition :

$$Rel_k^F(A, q) \overset{(id, F(\sigma_X))}{\longrightarrow} Rel_k^{\Sigma F}(A, q) \overset{(\Sigma_X, id)}{\longrightarrow} Rel_k^F(X \oplus A, q).$$

D'après la proposition $B.2$ et le lemme $B.1$, la suspension inférieure se factorise alors sous la forme :

$$Rel_i^F(A, q) \overset{(id, F(\sigma_X))}{\longrightarrow} Rel_i^{\Sigma F}(A, q) \overset{(\Sigma_X, id)}{\longrightarrow} Rel_i^F(X \oplus A, q) \cong Rel_i^F(A, q+1).$$

2) Caractère isomorphe du premier homomorphisme entre les groupes d'homologies relatifs

La proposition de ce paragraphe se situe aux pages 19 et 20 de [32].

Proposition B.3 : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène, $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients, $X, A \in Obj(\mathcal{C})$. On suppose que les systèmes de coefficients $\ker(F)$ et $coker(F)$ sont fortement stables par rapport à X en A. Alors, la suspension itérée induit un isomorphisme :*

$$Rel_i^F(A, n) \cong Rel_i^{\Sigma^j F}(A, n)$$

pour n suffisament grand (plus grand qu'une borne dépendant de i et j).

En supposant n suffisamment grand, d'après la proposition $B.3$, alors on obtient que $Rel_k^F(A, n) \cong Rel_k^{\Sigma F}(A, n)$ et $Rel_k^F(A, n+1) \cong Rel_k^{\Sigma F}(A, n+1)$.

3) Surjectivité du second homomorphisme entre les groupes d'homologies relatifs

La démonstration de la proposition de ce paragraphe se situe aux pages 20 et 21 de [32].

Proposition B.4 : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène pré-tressée, $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients, $X, A \in Obj(\mathcal{C})$. On suppose que $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse* (**H3**) *en (X, A) et que l'hypothèse* (**HR**) *est vérifiée. Alors, la suspension inférieure induit un homomorphisme surjectif :*

$$Rel_k^{\Sigma F}(A, q) \twoheadrightarrow Rel_k^F(X \oplus A, q)$$

pour q suffisamment grand.

En supposant de nouveau n suffisamment grand, d'après la proposition $B.4$, alors on obtient la surjectivité des applications $Rel_k^{\Sigma F}(A, n) \twoheadrightarrow Rel_k^F(X \oplus A, n)$ et $Rel_k^{\Sigma F}(A, n+1) \twoheadrightarrow Rel_k^F(X \oplus A \oplus X, n+1)$. Ainsi pour n suffisamment grand, on a les surjections $Rel_k^F(A, n) \twoheadrightarrow Rel_k^F(X \oplus A, n)$ et $Rel_k^F(A, n+1) \twoheadrightarrow Rel_k^F(X \oplus A \oplus X, n+1)$.

4) Annulation du groupe d'homologie relatif

La démonstration de la proposition de ce paragraphe se situe aux pages 22 et 23 de [32].

Proposition B.5 : *Si les applications*

$$Rel_k^F(A,n) \overset{Rel_i^F(\Sigma_X, F(\sigma_X))}{\longrightarrow} Rel_k^F(X \oplus A, n) \overset{b_n}{\longrightarrow} Rel_k^F(A, n+1)$$

$$Rel_k^F(A,n+1) \overset{Rel_i^F(\Sigma_X, F(\sigma_X))}{\longrightarrow} Rel_k^F(X \oplus A, n+1) \overset{b_{n+1}}{\longrightarrow} Rel_k^F(A, n+2)$$

sont surjectives, alors $Rel_k^F(A, n+2) = 0$.

Ainsi, en supposant n suffisamment grand :
- d'après le lemme $B.1$, b_n et b_{n+1} sont des isomorphismes ;
- d'après la proposition $B.4$, alors on obtient la surjectivité des applications $Rel_k^{\Sigma F}(A,n) \twoheadrightarrow Rel_k^F(X \oplus A, n)$ et $Rel_k^{\Sigma F}(A, n+1) \twoheadrightarrow Rel_k^F(X \oplus A \oplus X, n+1)$.

La proposition $B.5$ s'applique et donc $Rel_k^F(A, n+2)$ s'annule pour n suffisamment grand. De plus, d'après la proposition $B.3$, l'annulation de $Rel_k^F(A, n+2)$ entraîne celle de tous les groupes d'homologie relatifs pour les suspensions itérées $Rel_k^{\Sigma^j F}(A, n+2)$.

6 Stabilité homologique à coefficients tordus, version quantitative

Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène, que l'on considérera tout au long de cette section. Nous nous intéresserons aux propriétés quantitatives de la stabilité homologique à coefficients tordus pour les groupes d'automorphismes de cette catégorie homogène, c'est-à-dire que des bornes explicites à partir desquelles la suite de groupes d'homologie se stabilise seront donnés. Ces bornes dépendront du degré du système de coefficients $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow A$ et nous devons donc d'abord introduire la notion de système de coefficients de degré fini, pour ensuite nous concentrer sur le théorème C, résultat majeur de cette partie, donnant explicitement un rang de stabilisation.

6.1 Systèmes de coefficients de degré fini

Nous reprenons le même cadre que dans la partie 5 : on considère $X, A \in Obj(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}_{X,A}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont $X^{\oplus m} \oplus A \oplus X^{\oplus n}$ pour tous entiers $m, n \geq 0$, $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients, $\Sigma F := F \circ \Sigma_X$ le foncteur suspension de F, $\ker(F)$ et $coker(F)$ le noyau et le conoyau de la transformation naturelle $F(\sigma_X) : F \to \Sigma F$. Nous allons introduire des systèmes de coefficients particuliers, vérifiant des conditions sur les noyaux et le conoyaux itérés aux transformations naturelles définies par leur application de suspension.

Définition : *Un foncteur $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un système de coefficients de degré $r < 0$ par rapport à X si $F = 0$ est le foncteur trivial.*
Un foncteur $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un système de coefficients de degré $r \geq 0$ par rapport à X si $\ker(F)$ et *$coker(F)$ sont des systèmes de coefficients de degré $r-1$.*

Exemple : Un foncteur constant $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un système de coefficients de degré 0.

Remarque : Cette définition correspond à une notion de polynomialité forte du foncteur F. Cette notion semble trop restrictive car elle exclut des exemples de foncteurs qui devraient être de degré fini. Par exemple, si on considère le cas des foncteurs atomiques

$$\begin{array}{rcl} F_n : FI & \to & \mathcal{A} \\ n & \mapsto & F_n \\ m \neq n & \mapsto & 0 \end{array}$$

(on considère la catégorie FI et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne). Alors, la suspension de F_n donne :

$$\Sigma F_n = F_{n-1}.$$

Ainsi, pour l'application $\iota_1 : n \to n-1$, on obtient la suite exacte :

$$0 \to (\ker F(\iota_1) = F_n) \to F_n \overset{F(\iota_1)}{\to} F_{n-1} = \Sigma F_n \to (co\ker F(\iota_1) = F_{n-1}) \to 0.$$

D'où $\ker F(\iota_1) = F_n$ est un foncteur de degré n. Les foncteurs atomiques ne sont donc pas de degré n avec la définition donnée ci-dessus. Pourtant, ces foncteurs devraient être considérés comme des systèmes de coefficients de degré fini. Néanmoins, on peut éviter ce problème en introduisant un décalage N : on considère qu'un foncteur est de degré r si son noyau est nul a partir du rang N et le conoyau de degré $r-1$ à partir de N. D'après une communication privée avec Mme Wahl, cette notion plus faible de polynomialité des foncteurs sera donnée dans une mise à jour de [32]. Les résultats qui suivent restent vrais avec la notion de polynomialité donnée ci-dessus. Toutefois, leurs démonstrations dans [32] concernent actuellement les foncteurs polynomiaux au sens fort de la définition.

6.2 Stabilité homologique à coefficients tordus quantitative

La stabilité homologique quantitative est donnée par le théorème :

Théorème C : *Soit $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène pré-tressée vérifiant la propriété* (**H3**) *en (X, A) (paire d'objets de $\mathcal{C}$) pour un entier k. Si $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un système de coefficients de degré r, alors $Rel_i^F(A, n)$ s'annule pour $i \leq \frac{n-r}{k}$.*
En particulier, l'application

$$H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n}\right), F\left(A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(Aut\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right), F\left(A \oplus X^{\oplus n+1}\right)\right)$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-r}{k}$ et un isomorphisme pour $i \leq \frac{n-r}{k} - 1$.

Remarque : Pour $k = 0$, le théorème C correspond le cas de stabilité à coefficients, déjà énoncé dans le théorème A.

Idée et étapes de la démonstration :

Nous donnons ici les principales étapes et l'idée de la démonstration du théorème. Le détail de cette démonstration est situé dans [32] des pages 25 à 27.

On va démontrer le théorème en raisonnant par récurrence sur le degré r. Le résultat est trivial pour $r < 0$ et déjà démontré par le théorème A dans le cas $r = 0$. On suppose donc que $r \geq 1$ et on fait l'hypothèse de récurrence :

(**HR**) *Le théorème C est vérifié pour les systèmes de coefficients de degré strictement inférieur à r.*

1) Mise en place de la suite de groupes d'homologie relatifs

Par le même principe que dans la démonstration du théorème B, on cherche à montrer que pour tout $i \leq \frac{n-r}{k}$, $Rel_i^F(A, n) = 0$. On va raisonner par récurrence sur i. Si $i = 0$, alors le résultat est immédiatement vérifié (l'initialisation de la récurrence est donc faite). Soit $i \geq 0$ fixé tel que pour tout $j < i$, $Rel_j^F(A, n) = 0$.

Par ailleurs, d'après le lemme $B.1$ et la proposition $B.2$, on obtient la factorisation :

$$Rel_i^F(A, n) \longrightarrow Rel_i^{\Sigma F}(A, n) \longrightarrow Rel_i^F(X \oplus A, n) \cong Rel_i^F(A, n+1).$$

Cela nous fournit une suite d'applications :

$$Rel_i^F(A, n) \longrightarrow Rel_i^F(A, n+1) \longrightarrow Rel_i^F(A, n+2) \longrightarrow \cdots (*).$$

Avant de poursuivre notre raisonnement, on a besoin du résultat suivant :

Lemme C.2 : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène et $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients. Si F est de degré r, alors $\Sigma^j F$ est de degré r, pour tout $j \geq 1$.*

La démonstration de ce théorème se situe dans [32] à la page 26. D'après le lemme $C.2$ et (**HR**), $\ker(F)$ et $coker(F)$ sont fortement stables. On peut donc appliquer le théorème B à F : $Rel_i^F(A, m) = 0$ pour m suffisamment grand. On en déduit que si on montre que si chaque application de la suite $(*)$ est injective, alors on aura démontré que pour tout $i \leq \frac{n-r}{k}$, $Rel_i^F(A, n) = 0$. Or, on rappelle la factorisation suivante :

$$Rel_i^F(A, n) \longrightarrow Rel_i^{\Sigma F}(A, n) \longrightarrow Rel_i^F(X \oplus A, n) \cong Rel_i^F(A, n+1).$$

De plus, on a supposé que $i \leq \frac{n-r}{k}$. Un nouveau résultat va nous être utile ici. Sa démonstration se situe dans [32] à la page 25.

Proposition C.2 : *Soient $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ une catégorie homogène vérifiant l'hypothèse* (**H3**) *pour un entier*

k et $F : \mathcal{C}_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients de degré $r \geq 1$. Si l'hypothèse (**HR**) *est vérifiée, alors l'application $Rel_i^F(A,n) \longrightarrow Rel_i^{\Sigma F}(A,n)$ est un isomorphisme pour $i \leq \frac{n-r}{k}$.*

D'après la proposition $C.2$, le terme $Rel_i^F(A,n) \longrightarrow Rel_i^{\Sigma F}(A,n)$ dans la factorisation est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que l'application $Rel_i^F(A,n) \longrightarrow Rel_i^{\Sigma F}(A,n)$ est injective.

2) Construction et étude de la suite spectrale associée

L'idée consiste maintenant à identifier l'application $Rel_i^F(A,n) \longrightarrow Rel_i^{\Sigma F}(A,n)$ à la différentielle d'une certaine suite spectrale

$$\delta_i^1 := E_{0,i}^1 \longrightarrow E_{-1,i}^1$$

associée à l'action de $G_n = Aut(X \oplus A \oplus X^{\oplus n})$ sur $W_n = W_n(X \oplus A, X) \cong W_{n+1}(X, A)$ (W_n est supposé $\left(\frac{n-1}{k}\right)$-connexe). On sait également que la suite spectrale doit converger vers 0 pour le rang $p+q \leq \frac{n-1}{k}$. Cette suite spectrale est précisément décrite et ses propriétés sont démontrées dans [32] aux pages 20 et 21. Afin de démontrer l'injectivité de δ_i^1, on s'appuye sur les propriétés :
(i) $E_{p,q}^2 = 0$ pour $p+q = i+1$ et $q < i$.
On peut le montrer d'une manière analogue à celle de la propriété (ii) du paragraphe sur l'injectivité de δ^1 de la partie 4 (voir p. 26 dans [32]).
(iii) $\delta^1 : E_{1,i}^2 \longrightarrow E_{0,i}^2$ est une application nulle. Pour une démonstration, voir page 27 dans [32].

L'élément $E_{0,i}^1$ doit donc être éliminé avant la page E^∞ (puisque $i = 0+i \leq \frac{n-r}{k} \leq \frac{n-1}{k}$) et il s'agit du but de l'application δ_i^1. Or, les seules sources de différentielles (pour les pages supérieures ou égales à 2) autres que $E_{1,i}^1$ qui aboutissent en $E_{0,i}^1$ (et a fortiori susceptibles de l'éliminer) sont situées sur la droite $p+q=i$ (et $q < i$) et nulles d'après la propriété (i). Puisque $\delta^1 : E_{1,i}^2 \longrightarrow E_{0,i}^2$ est une application nulle d'après la propriété (ii), la seule différentielle qui peut éliminer $E_{0,i}^1$ est δ_i^1 : δ_i^1 est donc injective.

6.3 Applications pratiques

On liste ici différents cas pour lesquels le théorème C s'applique et donne alors des résultats pratiques concrets.

1) Catégorie FI

On a montré que cette catégorie est homogène, symétrique (et a fortiori pré-tressée) et vérifie l'hypothèse (**H3**) pour l'entier $r = 2$ pour $X = \{*\}$ et $A = \emptyset$. D'après le théorème C, on en déduit le théorème suivant.

Théorème : *Soit $F : FI \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients de degré k. Alors, l'application*

$$H_i(\mathfrak{S}_n, F(\{1,\ldots,n\})) \longrightarrow H_i(\mathfrak{S}_{n+1}, F(\{1,\ldots,n+1\}))$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-k}{2}$ et est isomorphisme pour $i \leq \frac{n-k-2}{2}$.

Dans le cas de l'homologie à coefficients constants (c'est-à-dire en prenant F le foncteur constant égal à $\mathbb{Z}$), le résultat a été à la base découvert par Nakaoka (voir [24]).

2) Catégorie $(U(f\mathcal{G})_{libre}, *, \{e\})$.

On a montré que cette catégorie est homogène, symétrique (et a fortiori pré-tressée) et vérifie l'hypothèse (**H3**) pour l'entier $r = 2$ pour $X = \mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Z}$. En appliquant le théorème C, on obtient le théorème suivant.

Théorème : *Soit $F : U(f\mathcal{G})_{libre} \longrightarrow \mathcal{A}$ un système de coefficients de degré k. Alors, l'application*

$$H_i(Aut(F_n), F(F_n)) \longrightarrow H_i(Aut(F_{n+1}), F(F_{n+1}))$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-k-1}{2}$ *et est isomorphisme pour* $i \leq \frac{n-k-3}{2}$.

Ce résultat correspond à la conjecture A de [27].

3) Catégorie $(U(fAb), \times, \{e\})$**.**

On a montré que cette catégorie est homogène, symétrique (et a fortiori pré-tressée) et on a également vu qu'elle vérifie l'hypothèse (**H3**) pour l'entier $r = 2$ pour $X = \mathbb{Z}$ et $A = \{e\}$. En appliquant le théorème C, on obtient le théorème suivant.

Théorème : *Soit* $F : U(fAb) \longrightarrow \mathcal{A}$ *un système de coefficients de degré* k*. Alors, l'application*

$$H_i(GL_n(\mathbb{Z}), F(\mathbb{Z}^n)) \longrightarrow H_i\left(GL_{n+1}(\mathbb{Z}), F\left(\mathbb{Z}^{n+1}\right)\right)$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-k}{2}$ *et est isomorphisme pour* $i \leq \frac{n-k-2}{2}$.

Ce résultat fût d'abord démontré par Van der Kallen dans [30].

4) Catégorie $\left(\mathcal{C}_2, \natural, D^2\right)$**.**

Tout d'abord, voyons un résultat de connexité dû à Hatcher et Vogtmann (proposition 7.2 de [18]).

Lemme : *Soient* $X = \left(S^1 \times [0,1], I\right)$ *le cylindre et* A *un objet de* $\mathcal{C}_2$*, alors l'ensemble* $S_{(n)}$ *des classes d'isotopie des plongements*

$$S^1 \times [0,1] \hookrightarrow S\natural_n \left(S^1 \times [0,1]\right)$$

est $(n-2)$*-connexe.*

En appliquant le théorème C à la catégorie $\left(\mathcal{C}_2, \natural, D^2\right)$ des surfaces décorées pour X le cylindre et $A = D^2$ le disque, on obtient le théorème suivant.

Théorème : *On note* $D^2_{(n)}$ *le disque privé de* n *points et* $\beta_n = Aut\left(D^2_{(n)}\right)$ *le groupe de tresse sur* n *générateurs. Soit* $F : (\mathcal{C}_2)_{X,A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *un système de coefficients de degré* k*. Alors, l'application*

$$H_i\left(\beta_n, F\left(D^2_{(n)}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(\beta_{n+1}, F\left(D^2_{(n+1)}\right)\right)$$

est surjective pour $i \leq \frac{n-k}{2}$ *et est isomorphisme pour* $i \leq \frac{n-k-2}{2}$.

Perspectives

Deux ouvertures s'offrent maintenant à nous. On peut, d'une part, s'intéresser à la compréhension des systèmes de coefficients de degré fini pour la famille des groupes de tresses et celle des groupes de difféotopie. Wahl donne dans [32] l'exemple des représentations de Burau pour les groupes de tresses, qui induit un foncteur polynomial de degré 1. Il serait intéressant de trouver d'autres exemples explicites de systèmes de coefficients de degré fini pour les groupes de tresses et pour les groupes de difféotopie, ainsi que d'avoir une classification de ces foncteurs. D'autre part, on pourrait calculer l'homologie stable pour les différentes familles de groupes. On liste ci-dessous des cas de familles pour lesquelles ce calcul a été effectué. Indiquons toutefois, au préalable, qu'on peut considérer une situation plus générale pour l'étude de la stabilité homologique que des groupes d'homologie calculés à partir d'un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{K} - Mod$. En effet, on peut plutôt utiliser un bifoncteur $B : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$ et on obtient alors une suite de groupes d'homologie du type :

$$\cdots \longrightarrow H_i\left(G_n, B\left(A \oplus X^{\oplus n}, A \oplus X^{\oplus n}\right)\right) \longrightarrow H_i\left(G_{n+1}, B\left(A \oplus X^{\oplus n+1}, A \oplus X^{\oplus n+1}\right)\right) \longrightarrow \cdots$$

• **Pour $\mathfrak{S}_n$:** le cas des coefficients constants $\mathbb{F}_p$ est effectué par Nakaoka dans [25] ; le cas des coefficients tordus pour un foncteur polynomial covariant F est fait par Betley dans [3].

• **Pour $GL_n(k)$:** le cas des coefficients constants $\mathbb{Q}$ est traité par Borel dans [4] et celui des coefficients constants $\mathbb{F}_p$ par Quillen dans [26] ; le cas des coefficients tordus pour un foncteur polynomial covariant F est étudié par Betley dans [1] et celui des coefficients tordus pour un bifoncteur polynomial biréduit B par Betley dans [2] et par Suslin dans [13] pour un corps et par Scorichenko dans [28] pour un anneau.

• **Pour $Aut(\mathbb{Z}^{*n})$:** le cas des coefficients constants $\mathbb{Z}$ est effectué par Galatius dans [14] ; le cas des coefficients tordus pour un foncteur polynomial covariant F est résolu par Djament et Vespa dans [10].

L'homologie stable rationnelle du groupe de difféotopie est traitée par Madsen et Weiss dans [22]. Le sujet de thèse sur lequel j'aimerais travailler (sous la direction de Christine Vespa) porte sur le cas de l'homologie des groupes de difféotopie à coefficients tordus.

Remerciements

Je tiens à remercier Mme Vespa pour sa remarquable disponibilité, la patience dont elle a fait preuve à mon égard et les nombreuses explications qu'elle m'a fournies tout au long de la réalisation de ce mémoire. Son aide m'a été plus que précieuse et m'a conforté dans l'idée d'étudier l'algèbre homologique et la théorie des catégories.

Je tiens également à remercier Nathalie Wahl, qui a eu la gentillesse de répondre aux questions que j'ai pu lui poser par courriel, à propos de son article.

Références

[1] Stanislaw Betley. Homology of Gl(R) with coefficients in a functor of finite degree. J. Algebra, 150(1) : 73–86, 1992.

[2] Stanislaw Betley. Stable K-theory of finite fields. K -Theory, 17(2) : 103–111, 1999.

[3] Stanislaw Betley. Twisted homology of symmetric groups. Proc. Amer. Math. Soc., 130(12) : 3439–3445 (electronic), 2002.

[4] Armand Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. Ann. Sci.´ Ecole Norm. Sup. (4), 7 : 235–272 (1975), 1974.

[5] Kenneth S. Brown. Cohomology of groups, volume 87 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[6] Ruth Charney. On the problem of homology stability for congruence subgroups. Comm. Algebra, 12(17-18) :2081–2123, 1984.

[7] Thomas Church, Jordan Ellenberg, and Benson Farb. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. preprint arXiv : 1204.4533.

[8] Thomas Church, Jordan Ellenberg, Benson Farb and Rohit Nagpal. FI-modules over Noetherian rings. preprint arXiv :1210.1854.

[9] Paul Cohn, Algebra, t.1, Wiley, 1974 (ISBN 0-471-16430-5), p. 284-285.

[10] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. Accepted for publication in Commentarii Mathematici Helvetici (23 pages).

[11] Aurélien Djament et Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 43(3) : 395–459, 2010.

[12] W. G. Dwyer. Twisted homological stability for general linear groups. Ann. of Math. (2), 111(2) :239–251, 1980.

[13] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. Ann. of Math. (2), 150 (2) : 663–728, 1999.

[14] Søren Galatius. Stable homology of automorphism groups of free groups. Ann. of Math. (2), 173(2) : 705–768, 2011.

[15] Daniel Grayson. Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen). In Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), pages 217–240. Lecture Notes in Math., Vol. 551. Springer, Berlin, 1976.

[16] I. A. Grushko, On the bases of a free product of groups, Matematicheskii Sbornik, vol 8 (1940), pp. 169–182.

[17] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Stabilization for mapping class groups of 3-manifolds. Duke Math. J., 155(2) : 205–269, 2010.

[18] Allen Hatcher and Karen Vogtmann. Cerf theory for graphs. J. London Math. Soc. (2), 58(3) :633– 655, 1998.

[19] Christian Kassel. Quantum groups. Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, New York, 1995.

[20] Saunders Mac Lane. Homology. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 1995.

[21] Saunders Mac Lane. Categories for the Working Mathematician, second edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[22] Madsen, Ib ; Weiss, Michael. The Stable moduli space of Riemann surfaces : Mumford's conjecture. Annals of Mathematics (2) 165 (2007), no.3, 843-941.

[23] Gwénaël Massuyeau. A short introduction to mapping class groups, "Master Class on Geometry", Strasbourg (2009).

[24] Minoru Nakaoka. Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups. Ann. of Math. (2), 71 : 16–42, 1960.

[25] Minoru Nakaoka. Homology of the infinite symmetric group. Ann. of Math. (2), 73 : 229–257, 1961.

[26] Daniel Quillen. On the cohomology and K -theory of the general linear groups over afinitefield. Ann. of Math. (2), 96 : 552–586, 1972.

[27] Oscar Randal-Williams. The stable cohomology of automorphisms of free groups with coefficients in the homology representation. arXiv :1012.1433.

[28] Alexander Scorichenko. Stable k-theory and functor homology over a ring. PhD- thesis, Evanston, 2000.

[29] J. M. Tyrer Jones. Direct products and the Hopf property. J. Austral. Math. Soc., 17 :174–196, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, VI.

[30] Wilberd van der Kallen. Homology stability for linear groups. Invent. Math., 60(3) :269–295, 1980.

[31] Christine Vespa. Stable homology via functor homology. notes from a course in Copenhagen, available at http ://www-irma.u-strasbg.fr/ vespa/Cours-Copenhague.pdf.

[32] Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. 2014. eprint arXiv : 1409.3541.

[33] Nathalie Wahl. Homological stability for mapping class groups of surfaces. Handbook of Moduli, Vol. III, 547-583. Advanced Lectures in Mathematics 26 (2012) : 547-583, 2010.

[34] Charles A. Weibel. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.