Rapport de Recherche

Arthur Soulié

24 juin 2019

Mes sujets de recherche se situent à la jonction de la topologie algébrique, de théorie des représentations et de la théorie des catégories. Plus précisément, la motivation initiale de mes recherches est le calcul de l'homologie stable à coefficients tordus pour des familles de groupes, telles que les groupes de tresses, les groupes de difféotopie des surfaces et des 3-variétés.

Une première étape de ce travail consiste à étudier les coefficients tordus considérés. C'est l'objet de mon premier article [16] pour les groupes de tresses : j'y étudie et introduit des variantes d'une construction due à Long et Moody [13] avec un point de vue fonctoriel. Je démontre également que les foncteurs de Long-Moody ainsi introduits ont un comportement remarquables sur des foncteurs vérifiant certaines conditions de polynomialité (voir Théorème 1.1). Ensuite, dans [18], en adoptant une approche plus conceptuelle, je généralise la notion de foncteurs de Long-Moody pour d'autres familles de groupes, tels que les groupes d'automorphismes des groupes libres, les groupes de difféotopie des surfaces et des 3-variétés. A nouveau, ces foncteurs de Long-Moody généralisés vérifient des propriétés remarquables sur les foncteurs polynomiaux, analogues à celles dans le cas des groupes de tresses (voir Théorème 1.2). A fortiori, les foncteurs de Long-Moody fournissent une large variété d'exemples de foncteurs polynomiaux, donnant des exemples intéressants de coefficients tordus vérifiant des résultats de stabilité homologique.

Enfin, dans [19], j'effectue dans un premier temps des calculs d'homologie stable pour des groupes de difféotopie pour des coefficients tordus particuliers, en utilisant des structures de produit semi-direct apparaissant naturellement pour ces familles de groupes. Ensuite, j'étends au cadre des catégories monoïdales pré-tressées un résultat de décomposition pour l'homologie stable à coefficient tordus dû à Djament et Vespa dans [4] (voir Théorème 1.6). Cela permet entre autre de calculer l'homologie stable des groupes de tresses et de groupes de difféotopie des surfaces à coefficients tordus donnés par des FI-modules (voir Théorème 1.5). Les papiers [16], [18] et [19] constituent les trois chapitres de ma thèse [17], soutenue en Juin 2018.

1 Etat de recherche

Le point de départ de mon travail fait suite à des résultats de stabilité homologique à coefficients tordus pour différentes familles de groupes (telles que les groupes de difféotopie des surfaces) de Randal-Williams et Wall [15, Section 5]. A proprement parler, pour une famille de groupes $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liés par des morphismes $G_n \to G_{n+1}$, ces résultats s'énoncent de la manière suivante : si $F : \mathfrak{U}\mathcal{G} \to \mathbb{Z}\text{-}\mathfrak{Mod}$ est un foncteur très fortement polynomial de degré r (on renvoie à [16, Section 3] pour l'introduction de cette notion), alors les applications induites $H_*(G_n, F(n)) \to H_*(G_{n+1}, F(n+1))$ sont des isomorphismes pour n suffisamment grand par rapport à $*$ et à r. Ici, $\mathfrak{U}\mathcal{G}$ désigne une catégorie introduite par Randal-Williams et Wall dans [15] associée à la famille de groupes $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La colimite $\underset{n\in\mathfrak{U}\mathcal{G}}{Colim}(H_*(G_n, F(n)))$ est appelée homologie stable de cette famille de groupes $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficient dans F et est notée $H_*(G_\infty, F_\infty)$.

Les théories des représentations d'une grande partie des familles de groupes considérées par Randal-Williams et Wall (en particulier les groupes de tresses, les groupes de difféotopie des surfaces et des 3-variétés) sont encore mal comprises et demeurent des sujets de recherche importants et actifs (on pourra se référer à [1, Section 4], [12] or [14]). Par conséquent, il y a très peu d'exemples de foncteurs très fortement polynomiaux pour ces familles de groupes et a fortiori pour lesquels il y a stabilité homologique. Mon travail consiste donc à mieux comprendre les coefficients tordus considérés pour la stabilité homologique afin d'effectuer ensuite des calculs d'homologie stable.

1.1 Un point de vue fonctoriel sur la construction de Long-Moody [16]

Dans [16], je me suis intéressé à l'étude avec un point de vue fonctoriel et à l'introduction de variantes d'une construction de Long [13], suite à un travail en collaboration avec Moody. On note $\boldsymbol{\beta}$ le groupoïde des tresses et $R\text{-}\mathfrak{Mod}$ la catégorie des R-modules, pour R un anneau commutatif.

L'évaluation d'un foncteur$F : \mathfrak{U}\boldsymbol{\beta} \to R\text{-}\mathfrak{Mod}$ donne une famille de représentations des groupes de tresses

$$\{F_n : \mathbf{B}_n \to GL(F(n))\}_{n\in\mathbb{N}},$$

ayant des propriétés de compatibilité. Par exemple, Randal-Williams et Wall [15, Example 4.3] définissent un foncteur $\mathfrak{Bur} : \mathfrak{U}\boldsymbol{\beta} \to R$-Mod tel que la représentation associée $\mathfrak{Bur}_n : \mathbf{B}_n \to GL(\mathfrak{Bur}(n))$ est la représentation de Burau non-réduite. La catégorie $\mathfrak{U}\boldsymbol{\beta}$ est une construction due à Quillen (voir [7]) appliquée au groupoïde $\boldsymbol{\beta}$. De la même manière, j'ai par exemple défini un foncteur $\mathfrak{TYM} : \mathfrak{U}\boldsymbol{\beta} \to R\text{-}\mathfrak{Mod}$ tel que la représentation $\mathfrak{TYM}_n : \mathbf{B}_n \to GL(\mathfrak{TYM}(n))$ est celle introduite par Tong, Yang et Ma dans [20]. Soit $\mathbf{F}_n$ le groupe libre sur n générateurs pour tout entier naturel n. En fixant deux familles de groupes $a_n : \mathbf{B}_n \to Aut(\mathbf{F}_n)$ et $\varsigma_n : \mathbf{F}_n \to \mathbf{B}_n$, vérifiant des propriétés de cohérence (voir [16, Section 1.3]), j'ai démontré que la construction de Long-Moody ainsi que ses variantes (définies par des choix divers de a_n et ς_n) sont fonctorielles. Plus précisément, j'ai démontré que pour un foncteur $F : \mathfrak{U}\boldsymbol{\beta} \to R\text{-}\mathfrak{Mod}$, considérer $\mathbf{LM}(F)(n) = \mathcal{I}_{R[\mathbf{F}_n]} \underset{R[\mathbf{F}_n]}{\otimes} F(n+1)$ et $\mathbf{LM}(F)(\sigma)\left(i \underset{\mathbf{F}_n}{\otimes} v\right) = a_n(\sigma)(i) \underset{\mathbf{F}_n}{\otimes} F(\sigma)(v)$ pour tout entier naturel n, pour tout $\sigma \in \mathbf{B}_n$, pour tout $i \in \mathcal{I}_{R[\mathbf{F}_n]}$ et pour tout $v \in F(n)$ permet de définir un foncteur $\mathbf{LM}(F) : \mathfrak{U}\boldsymbol{\beta} \to R\text{-}\mathfrak{Mod}$. De plus, une définition simple pour les transformations naturelles mène à la définition un foncteur $\mathbf{LM} : \mathbf{Fct}(\mathfrak{U}\beta, R\text{-}\mathfrak{Mod}) \to \mathbf{Fct}(\mathfrak{U}\beta, R\text{-}\mathfrak{Mod})$, appelé foncteur de Long-Moody.

Par ailleurs, Djament et Vespa [5] introduisent la notion de foncteurs fortement polynomiaux pour des catégories monoïdales symétriques dont l'unité de la structure monoïdale est objet initial. La catégorie $\mathfrak{U}\boldsymbol{\beta}$ n'est pas monoïdale symétrique, ni monoïdale tressée, mais monoïdale pré-tressée dans le sens de [15, Section 1]. Cependant, la notion de foncteurs fortement polynomiaux peut être étendue au contexte plus large des catégories monoïdales pré-tressées (voir [16, Section 2.1]). Par exemple, un type particulier de foncteurs fortement polynomiaux, ceux dits très fortement polynomiaux (voir [16, Section 2.2]), forment des systèmes de coefficients entrant dans le cadre des résultats de stabilité homologique de Randal-Williams et Wall [15]. Le principal résultat de [18] est ainsi :

Théorème 1.1. *[16, Theorem B] Pour $F : \mathfrak{U}\boldsymbol{\beta} \to R\text{-}\mathfrak{Mod}$ un foncteurs très fortement polynomial de degré d, considérant n'importe que foncteur de Long-Moody $\mathbf{LM}$, $\mathbf{LM}(F)$ est un foncteur très fortement polynomial de degré $d+1$.*

Itérant un foncteur de Long-Moody sur un objet très fortement polynomial de $\mathbf{Fct}(\mathfrak{U}\beta, \mathbb{K}\text{-}\mathfrak{Mod})$ de degré n, on génère ainsi des objets très fortement polynomiaux de $\mathbf{Fct}(\mathfrak{U}\beta, \mathbb{K}\text{-}\mathfrak{Mod})$ de n'importe quel degré plus grand que n. Ainsi, les foncteurs de Long-Moody fournissent de nouveaux exemples de coefficients tordus correspondant au cadre de Randal-Williams et Wall.

1.2 Les foncteurs Long-Moody généralisés [18]

En plus des groupes de tresses, les résultats de stabilité homologique pour des coefficients tordus donnés par des foncteurs très fortement polynomiaux dus à Randal-Williams et Wahl [15] sont également vrais pour d'autres familles de groupes tels que les groupes d'automorphismes des groupes des libres, les groupes de difféotopie des surfaces orientables et non-orientables ou des les groupes de difféotopie des 3-variétés. Les théories des repésentations de ces groupes sont sauvages et difficiles à classifier. A fortiori, les foncteurs très fortement polynomiaux associés à ces groupes demeurent peu comprises. Dans [18], j'ai étendu la construction de Long-Moody et les résultats sur les foncteurs polynomiaux à un contexte plus large, incluant ces familles de groupes. A cette fin, j'ai établi le cadre le plus général possible afin de définir des endofoncteurs inspirés par les foncteurs de Long-Moody pour les groupes de tresses : à proprement, j'ai introduit une description plus conceptuelle de la construction de Long-Moody, afin que son principe sous-jacent s'étende à des familles groupes autres que les groupes de tresses.

Ainsi, on considère une famille de groupe $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où H_n est le groupe libre $H^{*n} * H_0$, où H et H_0 sont des groupes, et le groupoïde $\mathcal{G}$ associé à une famille de groupes $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Plus précisément, on suppose que le groupoïde $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde d'un groupoïde monoïdal tressé $(\mathcal{G}', \natural, 0_{\mathcal{G}'})$ tel que l'ensemble de objets de $\mathcal{G}$ est isomorphe aux entiers naturels, ses objets sont des notés $\underline{n}$ (pour n un entier naturel) et le group d'automorphisme $Aut_{\mathcal{G}'}(\underline{n})$ est le groupe G_n. Par exemple, on peut considérer la famille $\{\boldsymbol{\Gamma}_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ des groupes de difféotopie des surfaces compactes connexes de genre n et une composante de bord ; les groupes fondamentaux $\{\pi_1(\Sigma_{n,1}, p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ des surfaces $\{\Sigma_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (où p est un point sur la composante de bord) joue alors le rôle des groupes $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit n un entier naturel. Pour R un anneau commutatif, on note $\mathcal{I}_{R[H_n]}$ l'idéal d'augmentation du groupe H_n. Afin d'avoir un point de vue fonctoriel et plus conceptuel sur la construction de Long-Moody, il est nécessaire de considérer une catégorie ayant $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ comme groupes d'automorphismes et ayant des morphismes entre des objets distincts (contrairement à $\mathcal{G}$). Une construction de Quillen (voir [7, p.219]) sur le groupoïde monoïdal tressé $(\mathcal{G}', \natural, 0_{\mathcal{G}'})$ notée $\mathfrak{U}\mathcal{G}'$ permet de résoudre ce problème : elle fournit la catégorie $\mathfrak{U}\mathcal{G}$ pleine des objets de $\mathcal{G}$ qui satisfait toutes les propriétés nécessaires à notre travail. Soit $\mathbf{Fct}(\mathfrak{U}\mathcal{G}, R\text{-}\mathfrak{Mod})$ la catégorie des foncteurs de $\mathfrak{U}\mathcal{G}$ vers $R\text{-}\mathfrak{Mod}$. La clef de voûte de la construction de Long-Moody consiste à considérer des morphismes $\{a_n : G_n \to Aut\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\varsigma_n : H_n \to G_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui définissent respectivement

- un foncteur $\mathcal{A} : \mathfrak{U}\mathcal{G} \to \mathfrak{Gr}$ où $\mathfrak{Gr}$ désigne la catégorie des groupes ;
- un foncteur $\varsigma : \int^{\mathfrak{U}\mathcal{G}} \mathcal{A} \to \mathfrak{U}\mathcal{G}$, où $\int^{\mathfrak{U}\mathcal{G}} \mathcal{A}$ est la construction de Grothendieck sur $\mathcal{A}$, tel que diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}\mathcal{G} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "1\natural-"'] & \int^{\mathfrak{U}\mathcal{G}} \mathcal{A} \arrow[d, "\varsigma"] \\
& \mathfrak{U}\mathcal{G},
\end{tikzcd}$$

où $1\natural-$ est le morphisme induit par la structure monoïdale et 1 est un objet générateur de $\mathfrak{U}\mathcal{G}$.

Sous ces hypothèses, j'ai démontré :

Théorème 1.2. *[18, Theorem A] Il existe un foncteur exact à droite*

$$\mathbf{LM}_{\{\mathcal{A},\mathcal{G},\mathcal{G}',\varsigma\}} : \mathbf{Fct}\left(\mathfrak{U}\mathcal{G}, R\text{-}\mathfrak{Mod}\right) \to \mathbf{Fct}\left(\mathfrak{U}\mathcal{G}, R\text{-}\mathfrak{Mod}\right),$$

appelé un foncteur de Long-Moody, tel que :

$$\mathbf{LM}_{\{\mathcal{A},\mathcal{G},\mathcal{G}',\varsigma\}}\left(F\right)\left(\underline{n}\right) = \mathcal{I}_{R[H_n]} \underset{R[H_n]}{\otimes} F\left(\underline{n+1}\right)$$

pour tout objet F de $\mathbf{Fct}\left(\mathfrak{U}\mathcal{G}, R\text{-}\mathfrak{Mod}\right)$ et $\underline{n}$ des objets de $\mathcal{G}$.

Pour la famille des groupes de tresses $\{\mathbf{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, le Théorème 1.2 recouvre [16]. De plus, les familles des groupes symétriques, des groupes de difféotopie des surfaces ou des 3-variétés, et des groupes d'automorphismes de produits libres de groupes s'insèrent également dans le cadre précédent.

De premiers exemples de foncteurs de Long-Moody sont donnés par les morphismes triviaux $\{\varsigma_{n,t} : H_n \to G_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, qui satisfont toujours les conditions de cohérence requises pour définir un foncteur de Long-Moody. On note $\mathbf{LM}_{\{G,H,\varsigma_t\}}$ le foncteur de Long-Moody associé et $R : \mathfrak{U}\mathcal{G} \to R\text{-}\mathfrak{Mod}$ le foncteur constant égal à R. Par exemple, j'ai considéré $\mathbf{LM}_{\{\mathbf{\Gamma},\pi_1,\varsigma_t\}}$ le foncteur Long-Moody associé aux groupes $\{\mathbf{\Gamma}_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en tant que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, les groupes$\{\pi_1\left(\Sigma_{n,1}, p\right)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en tant que $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et les morphismes triviaux $\{\varsigma_{n,t}\}_{n\in\mathbb{N}}$. J'ai alors démontré que $\mathbf{LM}_{\{\mathbf{\Gamma},\pi_1,\varsigma_t\}}\left(R\right)$ définit la famille des représentations symplectiques des groupes de difféotopie $\{\mathbf{\Gamma}_{n,1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Par ailleurs, j'ai démontré que pour tous les objets F de $\mathbf{Fct}\left(\mathfrak{U}\mathcal{G}, R\text{-}\mathfrak{Mod}\right)$, il y a une équivalence naturelle pour le foncteur de Long-Moody associé :

$$\mathbf{LM}_{\{G,H,\varsigma_t\}}\left(F\right) \cong \mathbf{LM}_{\{G,H,\varsigma_t\}}\left(R\right) \underset{R}{\otimes} F\left(1\natural-\right). \tag{1}$$

Ainsi, le foncteur de Long-Moody $\mathbf{LM}_{\{G,H,\varsigma_t\}}$ est équivalent à produit tensoriel avec $\mathbf{LM}_{\{G,H,\varsigma_t\}}\left(R\right)$. La relation (1) n'est en revanche plus vérifiée si on considère un foncteur de Long-Moody $\mathbf{LM}_{\{\mathcal{A},\mathcal{G},\mathcal{G}',\varsigma\}}$ associés à des morphismes non-triviaux $\{\varsigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Les conditions de cohérence nécessaires sur $\{\varsigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont restrictives. Cependant, de tels $\{\varsigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non-triviaux apparaissent naturellement dans certaines situations. Par exemple, pour un entier naturel $g \geq 2$, considérons les groupes de difféotopie $\left\{\mathbf{\Gamma}^n_{g,1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la surface $\Sigma_{g,1}$ où $n \in \mathbb{N}$ points ont été retirés (les éléments de $\mathbf{\Gamma}^n_{g,1}$ fixent la composante de bord et permute les crevaisons) et les groupes fondamentaux associés. Alors, en utilisant un scindement de la suite exacte courte de Birman, les morphismes

$$\left\{\varsigma_n : \pi_1\left(\Sigma^n_{g,1}, p\right) \to \mathbf{\Gamma}^{n+1}_{g,1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donnent naissance à un foncteur de Long-Moody. Les itérations de ce foncteur de Long-Moody n'est pas déterminé par son image sur le foncteur constant R. Il fournit donc des représentations linéaires de la famille de groupes $\left\{\Gamma^n_{g,1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui, à ma connaissance, sont inconnues dans la littérature.

Parmi les objets de la catégorie $\mathbf{Fct}\left(\mathfrak{U}\mathcal{G}, R\text{-}\mathfrak{Mod}\right)$, je me suis particulièrement intéressé aux foncteurs fortement et très fortement polynomiaux, à nouveau pour leur utilisation cruciale dans des résultats de stabilité homologique à coefficients tordus [15]). Les théories des repésentations des groupes d'automorphismes des groupes des libres, des groupes de difféotopie des surfaces orientables et non-orientables ou des les groupes de difféotopie des 3-variétés étant compliquées et des sujets de recherches actuels (voir par exemple [1, Section 4.6], [6], [12] ou [14]). Par conséquent, les foncteurs fortement polynomiaux associés à ces groupes n'étant pas bien compris, de nouveaux résultats permettant de mieux appréhender ces objets sont souhaitables.

De plus, je me suis intéressé aux foncteurs faiblement polynomiaux, notion introduite par Djament et Vespa [5, Section 3.1] pour des catégories monoïdales symétriques dont l'unité de la structure monoïdale est objet initial, et que j'ai étendu au cadre plus large considéré ici. Cette notion est plus adaptée pour la compréhension du comportement asymptotique d'un foncteur.

Je me suis alors intéressé aux effets des foncteurs de Long-Moody généralisés sur les foncteurs très fortement polynomiaux et les foncteurs faiblement polynomiaux, et j'ai démontré :

Théorème 1.3. *[18, Theorem B] Supposons que les hypothèses du Théorème 1.2 sont satisfaites et que les groupes $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres. Alors, avec de légères hypothèses supplémentaires (voir [18, Section 5]), le foncteur de Long-Moody $\mathbf{LM}_{\{\mathcal{A},\mathcal{G},\mathcal{G}',\varsigma\}}$ augmente de un le degré de très forte polymialité et celui de faible polynomialité.*

1.3 Calculs d'homologies stables à coefficients tordus [19]

Le calcul de l'homologie d'un groupe est une question fondamentale et peut s'avérer une travail très épineux. Une compréhension complète de tous les groupes d'homologie des groupes de difféotopie des surfaces et des 3-variétés demeure actuellement hors de portée. A ce titre, dans [19], je me suis intéressé à des calculs explicites de l'homologie stable à coefficients tordus pour ces familles de groupes. D'une part, en utilisant des structures de produits semi-directs émergeant naturellement des groupes de difféotopie, j'ai démontré :

Théorème 1.4. *[19, Theorem A] On a :*

1. *Pour n un entier naturel, on note $\mathfrak{Cox}(n)$ la représentation de Coxeter complexe et $\mathfrak{Bur}_t(n)$ représentation de Burau non-réduite de $\mathbf{B}_n$. Pour tout $n \geq q+2$:*
$$H_q(\mathbf{B}_n, \mathfrak{Cox}(n)) \cong \begin{cases} \mathbb{C}^{\oplus 2} & \text{si } q \geq 2, \\ \mathbb{C} & \text{si } q = 0, 1, \end{cases}$$
et pour tout $n \geq 3$ et $q \geq 3$:
$$H_q(\mathbf{B}_n, \mathfrak{Bur}_t(n)) \cong \begin{cases} \mathbb{C}\left[t^{\pm 1}\right]/(1-t) & \text{si } 3 \leq q < n-2, \\ \mathbb{C}\left[t^{\pm 1}\right]/(1-t) & \text{si } q = n-2 \text{ et } n \text{ est impair}, \\ \mathbb{C}\left[t^{\pm 1}\right]/\left(1-t^2\right) & \text{si } q = n-2 \text{ et } n \text{ est pair}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On retrouve ainsi des résultats de [2].

2. *Soit $\Gamma_{g,1}$ le groupe des classes d'isotopies des difféomorphismes fixant le bord d'une surface compacte connexe orientable avec une composante de bord de genre orientable $g \geq 0$. Alors, pour m, n et q des entiers naturels tels que $2n \geq 3q + m$:*
$$H_q\left(\Gamma_{n,1}, H_1(\Sigma_{n,1}, \mathbb{Z})^{\otimes m}\right) \cong \bigoplus_{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor \geq k \geq 0} H_{q-(2k+1)}\left(\Gamma_{n,1}, H_1(\Sigma_{n,1}, \mathbb{Z})^{\otimes m-1}\right).$$
On retrouve ainsi les résultats de [8] et [11].

3. *Soit $A^s_{n,k}$ le groupe des composantes des chemins des équivalences d'homotopie du graphe $G^s_{n,k}$ de $n \in \mathbb{N}$ cercles, $k \in \mathbb{N}$ cercles distingués et $s \in \mathbb{N}$ points bases. Soient $s \geq 2$ et $q \geq 1$ des entiers naturels et $F : \mathfrak{gr} \to \mathbf{Ab}$ un foncteur polynomial (où $\mathfrak{gr}$ désigne la catégorie des groupes libres de type fini). Alors, suivant les résultats de stabilité [9], pour tous les entiers naturels $n \geq 2q+1$:*
$$H_q\left(A^s_{n,0}, F(n)\right) = 0.$$
De plus, $H_q\left(A^s_{n,k}, \mathbb{Q}\right) = 0$ pour tous les entiers naturels $n \geq 3q+3$ et $k \geq 0$. On recouvre ainsi [10] pour les holomorphes des groupes libres.

D'autre part, je me suis intéressé au calcul de l'homologie stable pour les groupes de difféotopie à coefficients tordus factorisant par des groupes finis. Soient $(\Sigma, \sqcup, 0)$ (respectivement $(W\Sigma, \sqcup, 0)$) le groupoïde monoidal symétrique ayant pour objets les entiers naturels et pour groupes d'automorphismes les groupes symétriques (respectivement les groupes hyperoctahédraux). Remarquons que la construction de Quillen $\mathfrak{U}\Sigma$ est équivalente à la catégorie FI des ensembles finis et injections, notamment considérée dans [3]. J'ai alors démontré le résultat suivant :

Théorème 1.5. *[19, Theorem B] Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et d un entier naturel. Pour des foncteurs $F : FI \to \mathbb{K}\text{-}\mathfrak{Mod}$ et $G : \mathfrak{U}(W\Sigma) \to \mathbb{K}\text{-}\mathfrak{Mod}$, alors :*

1. *Pour tout entier naturel n, soit $\mathbf{B}_n$ (respectivement $\mathbf{PB}_n$) le groupe de tresse (respectivement le groupe de tresse pur) sur n brins. Alors, $H_d(\mathbf{B}_\infty, F_\infty) \cong \underset{n \in FI}{Colim}\left(H_d(\mathbf{PB}_n, \mathbb{K}) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} F(n)\right)$.*
2. *$H_q(\mathscr{S}_\infty, G_\infty) \cong \underset{n \in \mathfrak{U}(W\Sigma)}{Colim}\left(H_q(\mathscr{PS}_n, \mathbb{K}) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} G(n)\right)$, où $\mathscr{S}_n$ (respectivement $\mathscr{PS}_n$) est le groupe d'automorphismes symétriques (respectivement symétriques pures) sur n générateurs.*
3. *$H_d\left(\Gamma^\infty_{\infty,1}, F_\infty\right) \cong \underset{n \in FI}{Colim}\left[\bigoplus_{k+l=q}\left(H_k(\Gamma_{n,1}, \mathbb{K}) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} H_l\left((\mathbb{C}P^\infty)^{\times n}, \mathbb{K}\right)\right) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} F(n)\right]$, où $\Gamma^s_{g,1}$ est le groupe des classes d'isotopies des difféomorphismes permutant les points marqués fixant le bord, d'une surface compacte connexe orientable avec une composante de bord, de genre orientable $g \geq 0$ et $s \geq 0$ points marqués. En particulier, $H_{2k+1}\left(\Gamma^\infty_{\infty,1}, F_\infty\right) = 0$ pour tout entier naturel k.*
4. *$H_d\left(Aut\left(\left(\mathbb{Z}^{*k}\right)^{\times\infty}\right), F_\infty\right) = 0$ pour un entier naturel fixé $k \geq 2d+1$.*

La démonstration du Théorème 1.5 nécessite un résultat de décomposition pour l'homologie stable à coefficients tordus : il s'agit de la somme directe graduée des produits tensoriels de l'homologie d'une catégorie homogène avec l'homologie stable à coefficients tordus. A proprement parlé, on considère une catégorie monoïdale pré-tressée localement homogène $(\mathfrak{UG}, \natural, 0)$ telle que l'unité 0 est objet initial. Soit $\mathfrak{UG}_{(A,X)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{UG}$ des objets $\left\{A \natural X^{\natural n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ (pour des objets A et X de $\mathfrak{UG}$) et $H_*\left(\mathfrak{UG}_{(A,X)}, F\right)$ l'homologie de la catégorie $\mathfrak{UG}_{(A,X)}$. J'ai alors démontré :

Théorème 1.6. *[19, Section 1] Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour tout foncteur $F : \mathfrak{U}\mathcal{G}_{(A,X)} \to \mathbb{K}\text{-}\mathfrak{Mod}$, il y a un isomorphisme naturel de $\mathbb{K}$-modules :*
$$H_*\left(G_\infty, F_\infty\right) \cong \bigoplus_{k+l=*} \left(H_k\left(G_\infty, \mathbb{K}\right) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} H_l\left(\mathfrak{U}\mathcal{G}_{(A,X)}, F\right) \right).$$

Si on suppose que le groupoïde $\mathcal{G}$ est monoïdale symétrique, alors ce dernier théorème recouvre les résultats analogues précédents [4, Propositions 2.22, 2.26].

Références

[1] Joan S. Birman and Tara E. Brendle. Braids : a survey. *Handbook of knot theory*, pages 19–103, 2005.

[2] Weiyan Chen. Homology of braid groups, the Burau representation, and points on superelliptic curves over finite fields. *Israel J. Math.*, 220(2) :739–762, 2017.

[3] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, and Benson Farb. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. *Duke Math. J.*, 164(9) :1833–1910, 2015.

[4] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.

[5] Aurélien Djament and Christine Vespa. Foncteurs faiblement polynomiaux. *To be published in International Mathematics Research Notices, arXiv : 1308.4106v5*, 2017.

[6] Louis Funar. On the TQFT representations of the mapping class groups. *Pacific journal of mathematics*, 188(2) :251–274, 1999.

[7] Daniel Grayson. Higher algebraic K-theory : II (after Daniel Quillen). In *Algebraic K-theory*, pages 217–240. Lectures Notes in Math., Vol.551, Springer, Berlin, 1976.

[8] John Harer. The third homology group of the moduli space of curves. *Duke Math. J.*, 63(1) :25–55, 1991.

[9] Allen Hatcher and Nathalie Wahl. Stabilization for the automorphisms of free groups with boundaries. *Geom. Topol.*, 9 :1295–1336, 2005.

[10] Craig A. Jensen. Homology of holomorphs of free groups. *J. Algebra*, 271(1) :281–294, 2004.

[11] Nariya Kawazumi. On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces. In *Groups of diffeomorphisms*, volume 52 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 383–400. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.

[12] Mustafa Korkmaz. Low-dimensional homology groups of mapping class groups : a survey. *Turkish J. Math.*, 26(1) :101–114, 2002.

[13] D. D. Long. Constructing representations of braid groups. *Comm. Anal. Geom.*, 2(2) :217–238, 1994.

[14] Gregor Masbaum. On representations of mapping class groups in integral TQFT. *Oberwolfach Reports*, 5(2) :1202–1205, 2008.

[15] Oscar Randal-Williams and Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. *Adv. Math.*, 318 :534–626, 2017.

[16] Arthur Soulié. The Long-Moody construction and polynomial functors. *Accepted for publication in Annales de l'Institut Fourier, arXiv :1702.08279.*, 2017.

[17] Arthur Soulié. Foncteurs de long-moody et homologie stable des groupes de difféotopie. *PhD thesis, https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01819086*, 2018.

[18] Arthur Soulié. The generalized Long-Moody functors. *arXiv :1709.04278, submitted*, 2018.

[19] Arthur Soulié. Some computations of stable twisted homology for mapping class groups. *arXiv :1811.02801, submitted*, 2018.

[20] Dian-Min Tong, Shan-De Yang, and Zhong-Qi Ma. A new class of representations of braid groups. *Communications in Theoretical Physics*, 26(4) :483–486, December 1996.

IRMA, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
E-mail address : soulie@math.unistra.fr