[1]

Université de Strasbourg Année 2012/2013
UFR de Mathématique et d'Informatique
Préparation à l'agrégation interne de mathématiques.

Fonctions intégrables . Fonctions définies par une intégrale

Les notions d'intégrale simple d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné sont supposées connues, ainsi que celles d'intégrales généralisées

1. Fonctions continues par morceaux intégrable sur un intervalle quelconque

Définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle :

– Soit $[a, b]$, $a < b$, un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$, s'il existe une suite finie strictement croissante d'éléments de I, $(a_0 = a, a_1, ..., a_n = b)$ telle que la restriction de f à tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$, admette un prolongement par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$.

– Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur I, si f est continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné inclus dans I.

exemples

- la fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Dans ce qui suit "continue par morceaux" sera noté cpm.

Proposition : toute fonction cpm sur un intervalle fermé borné est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle

Définition de l'intégrabilité d'une fonction positive continue par morceaux sur un intervalle :

Soit I un intervalle et f une fonction **positive** cpm sur I ;

– f est dite intégrable sur I si l'ensemble $\mathcal{I} = \{\int_a^b f \,/ (a, b) \in I^2, a < b\}$ est borné.

– Si $\mathcal{I}$ est borné, on note alors sa borne supérieure est appelée **intégrale de f sur** I et est notée $\int_I f$

Extension aux fonctions à valeurs réelles :

Soit f une fonction cpm sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$; on note $f_+ = \sup(f, 0)$ et $f_- = \sup(-f, 0)$. Ces deux fonctions sont positives et cpm sur I.

Définition : f est dite intégrable sur I si les fonctions f_+ et f_- sont intégrables sur I et on pose :

$$\int_I f = \int_I f_+ - \int_I f_-$$

Extension aux fonctions à valeurs complexes :

Soit f une fonction cpm sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition : f est dite intégrable sur I si les fonctions $\Re f$ et $\Im f$ sont intégrables sur

1. Ph.Michel, 2012

I et on pose : $\displaystyle\int_I f = \int_I \Re f + i \int_I \Im f$.
Théorème : soit f une fonction de I dans $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) , cpm sur I. f est intégrable sur I si et seulement si la fonction $|f|$ est intégrable sur I.
On note $\mathcal{L}(I, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions cpm intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Théorème : $\mathcal{L}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application de $\mathcal{L}(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ définie par $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire.
Lien avec les intégrales généralisées :
Théorème : soit f une fonction de I dans $\mathbb{K}$, cpm sur I. f est intégrable sur I si et seulement l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Remarque : les fonctions dont l'intégrale sur I est semi-convergente ne sont pas intégrables sur I.

2. Convergence des suites de fonctions intégrables

Théorème de convergence monotone
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$ telle que :
– la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$
– la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, cpm sur I
– la suite numérique $(\int_I f_n)_{n\geq 0}$ est majorée alors f est intégrable sur I et on a : $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.
exemple : soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$ .En posant $f_n(t) = \sin^n t$, on a que $\forall t \in I, \sin^n t \geq \sin^{n+1} t$, donc la suite $(-f_n)$ est croissante la suite $(-f_n)$ converge simplement vers f sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ avec $f(t) = 0$ si $t \neq \frac{\pi}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = -1$.
f est continue par morceau sur I et $\int_I f = 0$
par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to=+\infty} I_n = 0$.

Théorème d'interversion série-intégrale
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ telle que :
– la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S cpm sur I
– la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ est convergente alors S est intégrable sur I et on a : $\displaystyle\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Théorème de convergence dominée
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ telle que :
– la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f cpm sur I
– Il existe une fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^+$, intégrable sur I telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ alors f est intégrable sur I et on a : $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

exemple : soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + e^x}$, $n > 0$.
En posant $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n + e^x}$, on a que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La limite simple est bien une fonction intégrable car cpm et nulle pour $x > 1$.
De plus : $\forall x > 0$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-1}.$$

3. Fonctions définies par une intégrale

Théorème de continuité
Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{K}$ telle que :
– pour tout $t \in I$, la fonction partielle $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur$X$
– pour tout $x \in X$, la fonction partielle $t \mapsto f(x,t)$ est cpm sur I
– Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in X \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$
alors la fonction F de X dans $\mathbb{K}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur X

Théorème de dérivation
Soient X un intervalle ouvert et I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{K}$ telle que :
– pour tout $x \in X$, la fonction partielle $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I
– f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en tout point de $X \times I$
– pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur X
– Il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable sur I telle que :
$\forall (x,t) \in X \times I$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi(t)$
alors la fonction F de X dans $\mathbb{K}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur X et on a $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$

exemple : soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^3+1}\mathrm{d}t$.
En posant $f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{t^3+1}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
De la majoration, pour tout réel x, $\left|\dfrac{\cos(xt)}{t^3+1}\right| \leq \dfrac{1}{t^3+1}$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3+1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Concernant la dérivabilité de F, la majoration $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{-t\cos(xt)}{t^3+1}\right| \leq \dfrac{t}{t^3+1}$ pour $t \geq 0$, permet de conclure à la dérivabilté de F sur $\mathbb{R}$ (et même que F est $\mathcal{C}^1$).