CALCUL INFINITÉSIMAL

JEAN-PIERRE WINTENBERGER

1. Bibliographie.

Jean Dieudonné. Calcul infinitésimal.
Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations différentielles.
Laurent Schwartz. Analyse hilbertienne.
Vilmos Komornik. Précis d'analyse relle. Topologie - Calcul différentiel - Méthodes d'approximation.

2. Comparaison ; développement asymptotique.

2.1. **O, o, équivalence.** Soit $I = []a, b[]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, a pouvant être $-\infty$ et b ∞. Soit x_0 qui est soit un élément de I, soit une extrémité de I pouvant être infinie.

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que

- f est $O(g)$ au voisinage de x_0 s'il existe une constante $M \geq 0$ et un voisinage V de x_0 dans I tel que pour $x \in V \cap I$ on ait $\mid f(x) \mid \leq M \mid g(x) \mid$.

- f est $o(g)$ (négligeable devant g au voisinage de x_0) si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage V_ϵ de x_0 dans I tel que pour $x \in V_\epsilon \cap I$ on ait $\mid f(x) \mid \leq \epsilon \mid g(x) \mid$.

- f est équivalente à g si $f - g$ est négligeable devant g.

Remarques.

- $o(1)$ est tendre vers 0, $O(1)$ est être borné au voisinage de x_0.

- x^α pour $x > 0$ $x_0 = 0$; (pour α négatif il faut exclure 0, pour $\alpha \geq 0$ on peut le mettre : c'est une difficulté pour rédiger le cours.., pas dans les exemples).

- o et O sont transitifs.

- L'équivalence est bien une relation d'équivalence. Pour la transitivité, f_1 et f_2 négligeables devant g alors idem $f_1 \pm f_2$. Pour la symétrie, $f - g$ négligeable devant g, alors il existe un voisinage V_0 de x_0 et $\epsilon(x)$ telle que $(f - g)(x) = \epsilon(x)g(x)$ pour $x \in V_0 \cap I$, $\epsilon(x)$ tendant vers 0 (prendre $\epsilon(x) = 0$ si $g(x) = 0$). On voit que $f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x))$ autrement dit $f(x) = g(x)\gamma(x)$ avec $\gamma(x)$ tendant vers 1. *C'est une autre définition de l'équivalence.* ; $\gamma(x)^{-1}$ existe et tend vers 1.

- on peut étendre la définition pour X espace topologique, f définie sur un ouvert U et $x_0 \in \overline{U}$.

2.2. **Echelle de comparaison ; développement asymptotique.** On se donne un voisinage de x_0 et des fonctions f_i définies dans ce voisinage (sauf éventuellement en x_0). On suppose que aucune de f_i est nulle au voisinage de 0 et que si i et i' sont distincts, on ait f_i négligeable devant $f_{i'}$ ou bien $f_{i'}$ négligeable devant f_i. Notation $f_i \preceq f_{i'}$ pour f_i négligeable devant $f_{i'}$ ou égale. Une fonction f définie au voisinage de x_0 a un développement asymptotique à la précision f_j s'il existe $f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}$, $f_j \preceq f_{i_k}$, et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $f - \sum \lambda_k f_{i_k}$ soit négligeable devant f_j.

Unicité. $(0 = \sum \lambda_k f_{i_k} + o(f_j)$ implique pour la plus grande f_{i_k} que $\lambda_k f_{i_k} = o(f_{i_k})$ ce qui entraîne $\lambda_k = 0)$

On ordonne les termes de la somme par ordre décroissants, le premier terme non nul (s'il existe) étant la partie principale. f est équivalente à sa partie principale (si elle existe).

Exemples.

- $x_0 \in I$. On prend pour échelle $(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Si f est C^{n+1} le développement de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + o((x - x_0)^n).$$

Il suffit qu'il existe une dérivée d'ordre $n + 1$ sur $I - \{x_0\}$ qui soit bornée.

- fractions rationnelles : on peut les développer avec $(x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- $x^\alpha \ln(x)^\beta$ a un sens pour $x > 1$. L'ordre pour x tendant vers l'infini est l'ordre lexicographique.

Exercices. Qu'en est il au voisinage de 0 pour $x^\alpha \mid \ln(x) \mid^\beta$? Au voisinage de l'infini pour $x^\alpha \exp(P(x))$, P sans terme constant.

Exemple. $(1 + x)^{1/x^2}$ à la précision $1/x^3$ pour x tendant vers $+\infty$: $1 + \ln(x)/x^2 + 1/x^3$. Exercice : le faire à la précision $1/x^4$.

Pour le développement asymptotique d'une fonction composée il vaut écrire les choses. Exemple. $f = f_1 + o(f_2)$, x tend vers 0, f_1 tend vers 0 et f_2 négligeable devant f_1. $g = 1 + u + u^2 + o(u^2)$ et on veut un développement asymptotique de $h = g \circ f$ au voisinage de 0 à la précision f_2. On obtient $h = 1 + f + f^2 + o(f_1^2)$ et donc il faut savoir que f_1^2 est négligeable devant f_2.

Pour les primitives, on a les propriétés.

f et g définies sur $[a, +\infty[$, $g > 0$ sur cet intervalle.

Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est infinie, $f = O(g)$ (resp. $o(g)$, resp. $\sim g$) alors idem pour les $\int_a^x *dt$ (pour O il n'y a pas besoin de $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ infinie)

Supposons $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ infinie et f négligeable devant g. Soit $\epsilon > 0$. Il existe b tel que $\mid f(t) \mid \leq \epsilon g(t)$ pour $x \geq b$. Par ailleurs, il existe $x_0 \geq b$ tel que $\mid \int_a^b f(t)dt \mid \leq \epsilon \int_a^x g(t)dt$ pour $x \geq x_0$, on a : $\mid \int_a^x f(t)dt \mid \leq 2\epsilon \int_a^x g(t)dt$.

Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est convergente, on a l'énoncé analogue pour $\int_x^{+\infty} *dt$.

Exemple (intégration par parties).

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \dots \frac{(k-1)!x}{\ln(x)^k} + o\left(\frac{x}{\ln(x)^k}\right).$$

Comparaison entre intégrales et séries.

Soit g une fonction continûment dérivable et > 0 définie sur $[0, +\infty[$. On suppose que $g'(x)/g(x)$ tend vers μ lorsque x tend vers $+\infty$. On considère s_n la série $s_n = g(0) + g(1) + \dots g(n)$ et quand elle est convergente $r_n = g(n+1) + g(n+2) + \dots$ le reste.

Alors, s_n et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ sont toutes deux soit convergentes soit tendent toutes deux vers $+\infty$.

Si $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est infinie , s_n est équivalent à $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_0^n g(t)dt$ (si $\mu = 0$ remplacer $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}}$ par 1). Si $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente, r_n est équivalent à $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_n^{+\infty} g(t)dt$ avec la même convention si $\mu = 0$.

Preuve. Il s'agit de prouver que $\int_{n-1}^n g(t)dt$ est équivalent à $\frac{1-e^{-\mu}}{\mu} g(n)$ (comparaison de séries à partir des termes généraux). On pose $g(t) = e^{\mu t} h(t)$. On a (en écrivant $h(t) = h(t) - h(n) + h(n)$) :

$$\int_{n-1}^n g(t)dt = \frac{1-e^{-\mu}}{\mu} g(n) + \int_{n-1}^n e^{\mu t}(h(t) - h(n))dt$$

et pour n grand, $-\epsilon \leq \ln(h(t)/h(n)) \leq \epsilon$ pour $n-1 \leq t \leq n$. D'où :

$$(e^{-\epsilon} - 1)h(n) \leq h(t) - h(n) \leq (e^{\epsilon} - 1)h(n).$$

Remarques

1) Si $\mu > 0$, on a $g(t) \geq C \exp(\alpha t)$ pour $\alpha > 0$ et on est dans le cas divergent. Si $\mu < 0$, on est dans le cas convergent.

2) Il faut une hypothèse pour pouvoir comparer la convergence de s_n et de $\int_0^{+\infty} g(t)dt$. Exemple : on impose $g(n) = n$, mais $\int_n^{n+1} g(t)dt = \exp(-n)$. L'intégrale et la série sont simultanément convergentes si g est monotone.

*Exemple.*Constante d'Euler :

$$1 + 1/2 + \dots 1/n = \ln(n) + \gamma + 1/2n + o(1/n).$$

On applique la proposition avec $g(t) = 1/t$ (cas divergent :$\mu = 0$), puis avec $1/t - (\ln(t) - \ln(t-1))$ (cas convergent :$\mu = 0$, g est équivalent à $-1/2t^2$).

3. Approximation des fonctions.

Le théorème principal de ce paragraphe est le théorème de Weierstrass :

Théorème 1. *Soient $a < b$ deux réels. Toute fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes.*

Exercice. C'est faux sur un intervalle non borné.

Soit à approximer f. En approximant sur un intervalle un peu plus grand on se ramène au cas où $f(a) = f(b) = 0$. On peut supposer que $a = -1/2$ et $b = 1/2$.

Pour le prouver, on utilise la convolution. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux de la variable réelle. La convolée de f et g est la fonction $f * g$ définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

On doit supposer que l'intégrale converge. C'est le cas si f ou g est nulle en dehors d'un intervalle borné.

Proposition 1. *On a $f * g = g * f$. Si g est un plynôme et f est nulle en dehors d'un intervalle borné, $f * g$ est un polynôme.*

Preuve. On fait le changement de variable $u = x - t$. Si g est de degré d, on a : $g(x-t) = \sum_{i=0}^{d} x^i g_i(t)$.

On suppose que l'on a une suite de polynômes g_n vérifiant :

- $g_n(t) \geq 0$ pour $t \in [-1, 1]$,
- $\int_{-1}^{1} g_n(t)dt = 1$,
- Pour tout $0 < \delta < 1$, g_n tend uniformément vers 0 dans les intervalles $[-1, -\delta]$ et $[\delta, 1]$.

Posons $h_n(t) = g_n(t)$ pour $t \in [-1, 1]$ et 0 ailleurs. Prolongeons f par 0 en dehors de $[-1/2, 1/2]$; on obtient une fonction continue et même uniformément.

Prouvons que, pour $t \in [-1/2, 1/2]$, $(f * h_n)(t) = (f * g_n)(t)$ sont des polynômes et tendent uniformément vers f.

On a bien $f * h_n = f * g_n$, car $f(t)g_n(x-t) = f(t)h_n(x-t)$ pour t et x dans $[-1/2, 1/2]$. Donc $f * h_n$ est un polynôme.

Soit ϵ donné. f est uniformément continue donc il existe δ tel que $\mid f(x) - f(x-t) \mid \leq \epsilon$ si $\mid t \mid \leq \delta$.

$$(f - f * h_n)(x) = \int_{-1}^{-\delta} (f(x) - f(x-t))h_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1} .$$

On majore l'intégrale $\int_{-\delta}^{\delta}$ avec l'uniforme continuité de f et $\int h_n = 1$ et $h_n \geq 0$. On majore les deux autres inégrales, en majorant $\mid f \mid$ et h_n.

3.1. **Fonctions périodiques ; polynômes trigonométriques.** Soit T un réel > 0. On s'intéresse aux fonctions f admettant T comme période : $f(x+T) = f(x)$.

Exemples. $e_{T,k}(t) = \exp(2\pi ikt/T)$, $\cos(2\pi kt/T)$ et $\sin(2\pi kt/T)$, k entier relatif ; $\cos(2\pi t/T)^n$, n entier ≥ 0.

Proposition 2. *Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ admettant T comme période. Alors :*

$$\int_x^{x+T} f(t)\ \mathrm{d}t$$

ne dépend pas de x.

Preuve : $\int_0^x = \int_T^{x+T}$.

Définition. Un polynôme trigonométrique (de période T) est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui s'écrit $\sum_{k=-n}^{n} c_k e_{T,k}$, $c_k \in \mathbb{C}$. L'écriture est alors unique. Pour le voir :un polynôme n'a qu'un nombre fini de 0, ou bien les relations d'orthogonalité :

$$1/T \int_0^T e_{T,k}(t)\overline{e_{T,k'}(t)}\ \mathrm{d}t = 0, \mathrm{si}\ k \neq k',\ = 1\ \mathrm{si}\ k = k'.$$

C'est aussi une fonction qui s écrit :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(2\pi kt/T) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2\pi kt/T),$$

les a_k et b_k étant complexes ($a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k + c_{-k})$. Pour que f soit à valeurs réelles il faut et il suffit que $\overline{c_k} = c_{-k}$, ou encore que les a_k et b_k soient réels.

Théorème 2. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ admettant T comme période. Alors, f est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

La démonstration est identique à celle du précédent théorème.

On définit la convolution par la formule :

$$(f * g)(x) = 1/T \int_0^T f(t)g(x-t)dt.$$

La normalisation $1/T$ permet d'avoir les formules : $e_k * e_{k'} = 0$ si $k \neq k'$ et e_k si $k = k'$.

L'analogue des fonctions g_n (lorsque $T = 2\pi$) est $a_n^{-1}(\frac{1+\cos(t)}{2})^n$ avec $a_n = \int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1+\cos(t)}{2})^n$ dt.

3.2. **Interpolation.** . Soient $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ réels. Pour $0 \leq i \leq n$, les polynômes :

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

sont de degré n et vérifient :

$$l_i(x_i) = 1, l_i(x_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Il en résulte que si f_i sont des réels, le polynôme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

est de degré $\leq n$ et est tel que $P(x_i) = f_i$. C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et supposons que les $x_i \in [a, b]$. On peut prendre $f_i = f(x_i)$; on obtient le polynôme p_n.

Théorème 3. *On suppose que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que :*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

où $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Preuve. Si $x = x_i$, OK. Soit p_{n+1} le polynôme d'interpolation de f en $x, x_0, \ldots, x_n$. Comme $p_{n+1} - p_n$ s'annule en les $n+1$ points $x_0, \ldots, x_n$, il est un multiple de π_{n+1} : $p_{n+1} = p_n + c\pi_{n+1}$. $g(t) := f(t) - p_{n+1}(t)$ s'annule en $x, x_0, \ldots, x_n$. Il existe ξ_x comme dans l'énoncé tel que $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. D'où $f^{(n+1)}(\xi_x) = c(n+1)!$. On a :

$$f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x) = c\pi_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x).$$

Majoration de $\|\pi_{n+1}\|$.

Points equidistants.

On pose $h = (b-a)/n$ et $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, $x = a + sh$, $s \in [0, n]$.

On a $\|\pi_{n+1}\| \leq h^{n+1} \mid s(s-1)\dots(s-n) \mid$. Si $\phi(s) = \mid s(s-1)\dots(s-n) \mid$, on a $\phi(n-s) = \phi(s)$ et $\phi(s-1)/\phi(s) = (n+1-s)/s$. On en déduit que le max de ϕ sur $[0, n]$ est dans $[0, 1]$, et on peut majorer ϕ par $n!$. On trouve donc $\|\pi_{n+1}\| \leq \frac{n!}{n^{n+1}}(b-a)^{n+1}$. Comme $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, on obtient une majoration du type $\|\pi_{n+1}\|$ est $O((b-a)/e)^{n+1}$.

Remarque. Sous des hypothèses d'analycité, on a des majorations du type $\mid f^{(n+1)}(\xi_x)(b-a)^{n+1}/(n+1)! \mid \leq C$, on obtient comme majoration $C\frac{n!}{n^{n+1}}$.

Points de Tchebychev.

Le polynôme t_n est défini par :

$$t_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, +1].$$

On a la formule de $t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2xt_n(x)$, $t_0(x) = 1$ et $t_1(x) = x$. Le coefficient directeur de t_n et 2^{n-1} pour $n \geq 1$. Ses racines sont les $\cos((2i+1)/2n\ \pi)$, pour $i = 0, \dots, n-1$. On prend comme points d'interpolation les transformés des racines de t_{n+1} par la fonction affine l : $l(t) = a+(t+1)(b-a)/2$ qui envoie $[-1, 1]$ sur $[a, b]$. On a : $\pi_{n+1}(t) = 1/2^{n+1}t_{n+1}(l^{-1}(t))(b-a)/2^n$ On a $\|\pi_{n+1}\| = 2((b-a)/4)^{n+1}$. On gagne un facteur $(4/e)^{n+1}$ sur l'interpolation en des points équidistants.

Phénomène de Runge. Pour $\alpha > 0$ petit, $f(x) = 1/(x^2 + \alpha^2)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange P_m aux points $\pm(2k+1)/2m$, $0 \leq k \leq m-1$, on a : $f(1) - P_m(1)$ tend vers l'infini avec m.

4. Espaces de Hilbert.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Forme sesquilinéaire : $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$,

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_1' v_1', v_2) = \lambda_1(v_1, v_2) + \lambda_1'(v_1', v_2),$$

$$(v_1, \lambda_2 v_2 + \lambda_2' v_2') = \overline{\lambda_2}(v_1, v_2) + \overline{\lambda_2'}(v_1, v_2').$$

Forme hermitienne : de plus $(v_2, v_1) = \overline{(v_1, v_2)}$.

Exemples : I ensemble fini, $(z_i), (z_i') \to \sum \lambda_i z_i \overline{z_i'}$, λ_i réels. $f, g \mapsto \int_a^b \omega(t)f(t)\overline{g(t)}dt$, f et g continues, ω tel que l'intégrale ait un sens. On prendra ω continue sur $]a, b[$. $X, Y \mapsto {}^tZM\overline{Z'}$ avec ${}^t\overline{M} = M$.

Propriétés. (v, v) est réel. $(v+v', v+v') = (v, v)+(v', v')+2\mathrm{re}((v, v'))$, $(v + v', v + v') + (v - v', v - v') = 2((v, v) + (v', v'))$.

Forme hermitienne positive : de plus $(v, v) \geq 0$.

Forme hermitienne définie positive : de plus $(v, v) = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Exemples. $\lambda_i > 0$. Positive : $\omega \geq 0$. Exemple : si $\omega = 1$, et f g continues, $\int$ est définie positive. Pas définies si l'on considère les fonctions continues par morceaux. Continue par morceaux : continue sauf en un nombre fini de points, a une limite à droite et à gauche en tous points de $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b.

Inégalité de Schwarz :

Proposition 3. *Supposons* $(\; , \;)$ *positive. On a :*

$$| (v_1, v_2) | \leq (v_1, v_1)^{1/2} (v_2, v_2)^{1/2}.$$

Si $(\; , \;)$ *est définie positive, l'égalité entraîne* v_1 *et* v_2 *liés.*

Preuve.

$$(v_1 + \lambda v_2, v_1 + \lambda v_2) = (v_1, v_1) + 2\mathrm{re}(\overline{\lambda}(v_1, v_2)) + | \lambda |^2 (v_2, v_2) \geq 0$$

Si $(v_1, v_2) = re^{i\theta}$, on prend $\lambda = te^{i\theta}$, t réel. On a :

$$f(t) = (v_1, v_1) + 2t \mid (v_1, v_2) \mid + t^2 (v_2, v_2) \geq 0$$

donc le discriminant est ≤ 0.

Dans le cas défini, soit $v_2 = 0$, soit on a un trinôme et si le discrimant est nul, f a une racine réelle t_0 et l'on a $v_1 + t_0 e^{i\theta} v_2 = 0$.

Inégalité de Minkowski.

Proposition 4.

$$(v_1 + v_2, v_1 + v_2)^{1/2} \leq (v_1, v_1)^{1/2} + (v_2, v_2)^{1/2}$$

Dans le cas défini, on a égalité si et seulement si $v_2 = 0$ *ou* $v_1 = \lambda v_2$ *avec* λ *réel positif.*

Preuve : Schwarz. Dans le cas défini, égalité entraîne v_1 et v_2 liés et $\mathrm{re}(v_1, v_2) = | (v_1, v_2) |$.

Si $(\; , \;)$ est hermitienne positive, les vecteurs v tels que $(v, v) = 0$ forment un sous-espace vectoriel V_0, (v, v') ne dépend que de l'image de v et v' dans V/V_0, ce qui permet de définir $(\; , \;)$ sur V/V_0 ; on obtient une forme hermitienne définie positive. Exemple : fonctions continues par morceaux nulle sauf en un nombre fini de points : négligeables.

Dans le cas défini positif : $\|v\| = (v, v)^{1/2}$. Norme. Boules ouvertes : système fondamental de voisinages. On a une topologie. v_n tend vers v veut dire $\|v - v_n\|$ tend vers 0.

Suite de Cauchy. Complet : toute suite de Cauchy converge. Espace de Hilbert : forme hermitienne définie positive et complet. C'est le cas si V est de dimension finie. Existence d'une base orthonormé : orthonormalisation. Si V est de dimension d, V est isomorphe à $l^2(\{1,\dots d\})$. Existence de la complétion d'un espace préhilbertien : on considère l'espace vectoriel des suites de Cauchy, et on quotiente par les suites qui convergent vers 0.

Exemple. $\mathbb{C}^n$. $l^2(\mathbb{N})$: $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $\sum \|z_i\|^2 < +\infty$. $(v^{(n)})$ est de Cauchy. Chacune des $(z_i^{(n)})$ de Cauchy. Converge vers z_i. $v = (z_i)$. $(v^{(n)})$ tend vers v (majorer $\sum \|z_i - z_i^{(n)}\|^2$ d'abord pour les sommes finies).

Fonctions continues pour la norme $\| \|_2$ pas complet. Suite de fonctions convergeant au sens $\| \|_2$ vers une fonction en escalier. Remarque : ne converge pas pour la norme infinie (limite uniforme de fonctions continues est continue).

La théorie de l'intégration de Lebesgue permet de d'avoir le cadre suivant. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Il existe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de fonctions $\mathcal{L}^2(I)$ de I dans $\mathbb{C}$ avec une forme hermitienne positive, qui contient les fonctions continues telles que $\int_I \mid f(t) \mid^2 dt < +\infty$. Si I est borné il contient les fonctions Riemann intégrables. Si $f \in \mathcal{L}^2(I)$, $\mid f \mid \in \mathcal{L}^2(I)$. Le produit hermiten est $\int_I f(t)\overline{g(t)}dt$ qui converge absolument grâce à Schwarz. Les fonctions de norme nulle forment un sous-espace vectoriel (fonctions négligeables), et le quotient est l'espace de Hilbert $L^2(I)$. De plus, les fonctions continues à support compact sont denses. Donc si l'intervalle est compact, les polynômes sont denses. Ceci résulte de ce que $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

Variante avec les fonctions de période T : $(f,g) = 1/T \int_0^T f(t)\bar{g}(t)$ pour que les $e^{2\pi ikt/T}$ forment un système orthonormé. Polynômes trigonométriques denses.

Variante avec poids. On suppose que le poids ω est continu et > 0 sur $]a,b[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b \mid t \mid^n \omega(t)$ est convergente. $\mathcal{L}^2([a,b],\omega)$ est les fonctions tels que l'intégrale existe. Cette dernière hypothèse fait que les polynômes sont dans $\mathcal{L}^2([a,b],\omega)$. De plus, si a et b sont finis, la condition $\int_a^b \omega(t)$ suffit et les polynômes sont denses. Pour la densité des polynômes, on prouve d'abord que les fonctions continues à support compact sont denses (cela fait presque partie de la définition de l'espace $\mathcal{L}^2$, puis ensuite qu'une telle fonction peut être approchée uniformément par un polynôme sur $[a,b]$.

Projections orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Proposition 5. *Soit $F \subset V$ un sous-espace de dimension finie. Alors, pour tout $v \in V$, il existe un unique $p(v)$ caractérisé par : $p(v) \in F$ et $v - p(v)$ orthogonal à F (i.e. à tout vecteur de F). L'application*

$v \mapsto p(v)$ est linéaire. Pour tout $w \in F$, $w \neq p(v)$, on a $\|v-w\| > \|v-p(v)\|$. Si $e_1,\ldots,e_n$ est une base orthonormée de F, on a :

$$p(v) = \sum_{i=1}^{n}(v,e_i)e_i.$$

On a : $\|v\|^2 = \|p(v)\|^2 + \|v-p(v)\|^2$.

Preuve. On définit $p(v)$ par la formule. $v-p(v)$ est bien orthogonal à F. Pour la réciproque : $p(v) = \sum(p(v),e_i)e_i = \sum(v,e_i)e_i$. Si $w \in F$, on a :

$$\|v-w\|^2 = \|v-p(v)\|^2 + \|p(v)-w\|^2.$$

Base hilbertienne.

V Hilbert. (e_i), $i \in \mathbb{N}$ ou $i \in \mathbb{Z}$ (pour simplifier), orthonormée. Pour tout n, on note p_n la projection orthogonale sur l'espace $\mathcal{P}_n$ engendré par $e_1,\ldots,e_n$ (ou dans le cas d'indices $\in \mathbb{Z}$, engendré par $e_{-n},\ldots,e_n$). Notons $\mathcal{P}_\infty$ l'espace vectoriel réunion des $\mathcal{P}_n$.

Définition. (e_n) est une base hilbertienne si pour tout $v \in V$, la suite $p_n(v)$ a pour limite v.

Proposition 6. *Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\mathcal{P}_\infty$ soit dense : pour tout v, et tout $\epsilon > 0$, il existe n et $v_n \in \mathcal{P}_n$ avec $\|v-v_n\| \leq \epsilon$.*

Preuve. $\|v-p_n(v)\| \leq \|v-v_n\|$.

Proposition 7. *Si (e_n) est une base hilbertienne,*

$$\|v\|^2 = \sum \|(v,e_n)\|^2,\ (v,w) = \sum(v,e_n)(e_n,w).$$

Preuve : la norme est continue : $|\ \|v_1\| - \|v_2\|\ | \leq \|v_1 - v_2\|$. De même le produit scalaire :

$$|\ (v_1,v_2) - (v_1',v_2')\ | \leq \|v_1\|\ \|v_2 - v_2'\| + \|v_2'\|\ \|v_1 - v_1'\|.$$

Exemple. Polynômes trigonométriques. Avec la normalisation $(\ ,\ ) = 1/T\int$, $\|\ \|_2 \leq \|\ \|_\infty$ (Parseval).

Corollaire 1. *Soit f périodique et de carré intégrable ($\mathcal{L}^2_T$) Alors, $a_n(f)$ tend vers 0 lorsque $\mid n \mid$ tend vers l'infini.*

C'est un cas particulier d'un lemme de Riemann-Lebesgue (qui est vrai pour $f \in \mathcal{L}^1$) : $\int_a^b e^{i\lambda x}f(x)dx$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On commence par le prouver pour les fonctions en escalier, puis on approxime dans $\mathcal{L}^1$ f par des fonctions en escalier (c'est possible de le faire de par la définition de l'intégrale de Riemann).

Corollaire 2. *f et g dans $\mathcal{L}_T^2$. Si les coefficients de Fourier de f et g sont égaux, alors $f - g$ est négligeable (si f et g sont continues, elles sont égales).*

Corollaire 3. *Soit f continue périodique. On suppose que la série $\sum_{n\in Z} \mid a_n(f) \mid$ est convergente. Alors $f(x) = \sum a_n(f)e_n(x)$ et la convergence est absolue (donc uniforme)*

Preuve. La série de Fourier converge normalement vers g. f et g ont même série de Fourier.

Il existe des fonctions continues périodique dont la série de Fourier diverge (on peut le prouver avec Banach-Steinhaus).

Corollaire 4. *Si f périodique est continûment dérivable, la série de Fourier de f converge absolument vers f.*

Preuve. On calcule :

$$a_n(f') = (2\pi i/T)na_n(f).$$

L'inégalité de Schwarz pour les suites de réels entraîne :

$$\sum_{n\neq 0} \mid a_n(f) \mid \leq T/2\pi(\sum_{n\neq 0} 1/n^2)^{1/2}(\sum_{n\neq 0} \mid a_n(f') \mid^2)^{1/2}.$$

Remarque. Si f est C^k, $k \geq 1$, $\mid a_n \mid$ est $o(1/n^k)$. Enoncer une réciproque.

4.1. **Polynômes orthogonaux.** On se place dans le cadre euclidien (les fonctions sont à valeurs réelles.

$\omega \geq 0$ et continu ; $\int_a^b \|t\|^n \omega$ converge pour tout n entier ≥ 0. C'est le cas si a et b sont finis et $\int_a^b \omega$ existe.

Les polynômes sont dans $\mathcal{L}^2(\omega)$. Le procédé d'othogonalisation permet de définir la suite p_n, avec p_n de degré n et unitaire (ils ne sont donc pas en général de norme 1). On a la relation de récurrence :

Proposition 8. *On a $p_n = (x-\lambda_n)p_{n-1}-\mu_n p_{n-2}$. avec $\lambda_n = (xp_{n-1}, p_{n-1})/\|p_{n-1}\|^2$ et $\mu_n = \|p_{n-1}\|^2/\|p_{n-2}\|^2$.*

Preuve. On écrit $xp_{n-1} = p_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k$. On a $(xp_{n-1}, p_k) = (p_{n-1}, xp_k)$. On en déduit $\alpha_k = 0$ pour $k \leq n-3$, $\alpha_{n-1} = -\lambda_n$ et $(xp_{n-1}, p_{n-2}) = \alpha_{n-2}\|p_{n-2}\|^2$. On conclut avec $(p_{n-1}, xp_{n-2}) = \|p_{n-1}\|^2$.

Proposition 9. *p_n a n zéros distincts dans $]a, b[$.*

Preuve. Soient $z_1, \ldots, z_k$ les zéros de p_n dans $]a, b[$ avec z_i de multilicité exactement m_i. On les numérote telles que $z_1, \ldots, z_l$ soient les racines de multiplicité m_i impaire. Soit $q = \prod_{i=1}^l (x - z_i)$. $p_n q$ garde un signe constant sur $]a, b[$. On a donc $(p_n, q) \neq 0$. Il en résulte que q est de degré n, ce qui prouve la proposition.

Soit f dans $L^2(]a, b[, \omega)$, a et b finis. Soit f_n la projection sur l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. La suite des f_n converge vers f au sens L^2.

Exemples.

- Laguerre : $]0, \infty[$, e^{-x} ;
- Hermite : $]-\infty, \infty[$, e^{-x^2} ;
- Legendre : $]-1, 1[$, $\omega = 1$;
- Tchebychev : $]-1, 1[$, $1/\sqrt{1-x^2}$.

5. Théorème de Dirichlet ; convergence des séries de Fourier.

Pour la convergence ponctuelle. Dirichlet :

Théorème 4. *Soit f périodique continue par morceaux. Soit x un réel. On note $f(x_+)$ et $f(x_-)$ les limites en x à droite et gauche respectivement. On suppose de plus qu'il existe K et h_0 tels que, pour $0 < h < h_0$:*

$$| f(x+h) - f(x_+) | \leq Kh, | f(x-h) - f(x_-) | \leq Kh.$$

Alors $\sum_{n=-N}^{N} a_n(f)e_n(x)$ converge vers $1/2(f(x_+) + f(x_-))$.

Prouvons le pour f dérivable à gauche et à droite en x. Supposons $T = 2\pi$. Soit $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n(f)e_n(x)$. On a :

$$S_N(x) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(y) \sum_{n=-N}^{N} e_n(x-y)dy.$$

On pose $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(x)$. C'est le noyau de Dirichlet. On a :

$$S_N(x) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(y)D_N(x-y)dy.$$

De plus :

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)\ x)}{\sin(x/2)}.$$

En utilisant la convolution et la parité du noyau de Dirichlet :

$$S_N(x) = 1/2\pi \int_0^{\pi} D_N(y)(f(x-y) + f(x+y))dy.$$

Appliquons le pour la fonction constante $(f(x_+) + f(x_-))/2$:

$$(f(x_+)+f(x_-))/2 = 1/2\pi \int_0^\pi D_N(y)(f(x_+)+f(x_-))dy.$$

Retranchons :

$$S_N(x) - (f(x_+)+f(x_-))/2 = 1/2\pi \int_0^\pi D_N(y)(f(x-y)-f(x_-)+f(x+y)-f(x_+))dy,$$

ou encore :

$$S_N(x) - f(x) = 1/2\pi \int_0^\pi \sin((N+1/2)\,y)(f(x-y)-f(x_-)+f(x+y)-f(x_+))/\sin(y/2))dy.$$

Les hypothèses de régularité de f entraînent que la fonction $y \mapsto (f(x-y)-f(x_-)+f(x+y)-f(x_+))/\sin(y/2))$ est continue par morceaux. Le lemme de Riemann-Lebesgue permet de conclure.

6. Etude affine des arcs géométriques.

6.1. **Chemins. Arcs géométriques.** Dans ce chapitre, I, J désignent des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$, $E=\mathbb{R}^n, F=\mathbb{R}^m$. Un chemin est une application continue de $I \to E$. Le chemin est de classe $\mathcal{C}^k$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$. Le chemin est dit compact (ouvert, semi-ouvert si I est un intervalle compact, ouvert ou semi-ouvert).

Deux chemins f: $I \to E$ et g: $J \to E$ sont dits $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe une bijection θ: $I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque, telle que $f = g \circ \theta$.

Remarques: pour que θ soit de classe $\mathcal{C}^k$, il faut et il suffit que $\forall x \in I$, $\theta'(x) \neq 0$. Deux chemins $\mathcal{C}^k$-équivalents ont même image.

Exemples: les chemins f : $]0,\pi[\to \mathbb{R}^2$ définis par $f(t) = (cos(t), sin(t))$ et g: $]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ par $g(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ sont $\mathcal{C}^k$-équivalents ($\mathcal{C}^0$-équivalents si on inclut les extrêmités) par $\theta(t) = cos(t)$.

Les chemins $t \to e^{it}$ et $t \to e^{2it}$ ne sont pas $\mathcal{C}^0$-équivalents car les points de g sont tous des points doubles, tandis que f a un seul point double.

Définition: un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ est une classe γ de chemins $\mathcal{C}^k$-équivalents, tous de classe $\mathcal{C}^k$. Les chemins de la clase γ sont appelés paramétrisations de γ. Leur image commune est appelée le support de γ et sera noté $supp(\gamma)$. Les changements de paramètres faisant passer d'une paramétrisation à une autre sont dits admissibles.

Deux chemins $\mathcal{C}^k$-équivalents admettent les mêmes points comme extêmités: ce sont les extrêmités de l'arc.

Un point M d'un arc paramétré par un chemin $f : I \to E$ est dit simple s'il existe un unique $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = M$. Cela ne dépend pas du choix de la paramétrisation. Un arc est dit simple s'il existe une paramétrisation injective f de cet arc (et dans ce cas toutes les paramétrisations sont injectives).

Soit f: $[a, b] \to E$ un chemin paramétrant un arc γ. Si $f(a) = f(b)$, on dit que f est un lacet et que l'arc γ est fermé.

Exemple: la chaînette est un arc ouvert $(t \mapsto (at, ach(t)))$.

6.2. **Arcs orientés.** Deux chemins f: $I \to E$ et g: $J \to E$ sont dits positivement (resp. négativement) $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe une bijection croissante (resp. décroissante) $\theta : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque, telle que $f = g \circ \theta$.

Soit f un chemin de classe $\mathcal{C}^k$. On note γ l'ensemble des chemins $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^k$-équivalents à f, γ_+ (resp. γ_-) l'ensemble des chemins $\mathcal{C}^k$, positivement (resp. négativement) $\mathcal{C}^k$-équivalents à f. Lorsque $\gamma_+ \neq \gamma_-$, on choisit l'un de ces sous-ensembles et on dit que l'on a orienté γ. Tout arc géométrique est la réunion d'au plus 2 classes d'orientation. On a le critère suivant pour savoir quand $\gamma_+ \neq \gamma_-$

proposition. Avec les notations ci-dessus, $\gamma_+ = \gamma_-$ si et seulement s'il existe une bijection décroissante: θ: $I \to I$ telle que $f \circ \theta = f$.

Par exemple, l'arc défini par la paramétrisation f: $t \mapsto (sin(t), cos^2(t))$ pour $t \in [0, \pi]$ n'admet qu'une seule orientation car $f(\pi - t) = t$ pour $t \in [0, \pi]$.

On a aussi:

proposition. Pour qu'un arc géométrique admette 2 orientations, il suffit qu'il possède (au moins) 2 points simples.

Par exemple, un arc simple, ou un arc fermé simple possède 2 orientations.

6.3. **Arcs réguliers.** Soient f:$I \to E$ et g: $J \to E$ 2 paramétrisations de classe $\mathcal{C}^k$ d'un même arc γ telles que $f = g \circ \theta$ où θ est un changement de paramètre admissible. Alors $\forall t \in I$, $\theta'(t) \neq 0$ et $f'(t) = \theta'(t)g'(\theta(t))$ de sorte que $f'(t_0) \neq 0$ si et seulement si $g'(t_0) \neq 0$. Le fait que ce vecteur dérivé soit non nul ne dépend donc pas du choix de la paramétrisation. On définit donc:

(1) Un point simple $M_0 = f(t_0)$ du support de γ est dit ordinaire ou régulier si $f'(t_0) \neq 0$. Il est stationnaire si $f'(t_0) = 0$.
(2) L'arc γ est régulier si $f'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

On a :

Théorème. Tout arc régulier admet 2 orientations distinctes.

On dit qu'un arc admet une paramétrisation cartésienne si, dans un repère affine convenable, l'arc admet une paramétrisation du type: $t \mapsto (t, x_2(t), \dots, x_n(t))$.

On a la proposition:

proposition. Tout arc de classe $\mathcal{C}^k$ admettant une paramétrisation cartésienne est simple est régulier.

6.4. **Contact des arcs.** Soient γ_1, γ_2 2 arcs de classe $\mathcal{C}^k$ simples et réguliers, passant par un même point M_0. On dit que γ_1 et γ_2 ont un contact d'ordre $\geq p$ en M_0 (où $0 \leq p \leq k$) s'il existe des paramétrisations f_1, f_2 de γ_1, γ_2, définies au voisinage de 0 et vérifiant:

$$f_1(0) = f_2(0) = M_0,\ \forall 1 \leq r \leq p,\ f_1^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0).$$

Remarque: avec les hypothèses faites sur f_1 et f_2, cela revient au même de demander que $f_1(t) - f_2(t) = o(t^p)$ au voisinage de 0.

On prendra garde que ce critère dépend des paramétrisations. Par exemple, on peut décrire l'arc des nombres réels par 2 paramétrisations $f_1(t) = t$ et $f_2(t) = 2t$ pour $t \in \mathbb{R}$. L'ordre du point de contact entre cet arc et lui-même est infini mais $f_1(t) - f_2(t) = t$.

On dit que l'ordre du point de contact entre γ_1 et γ_2 est exactement égal à p s'il est $\geq p$ mais s'il n'est pas $\geq p+1$.

On a alors le critère suivant:

proposition. Soient γ et δ deux arcs de classe $\mathcal{C}^k$, simples et réguliers ayant en M_0 un point de contact d'ordre exactement égal à p ($p \leq k-1$), respectivement définis par les paramétrisations f et g vérifiant $f(0) = g(0) = M_0$. On suppose qu'il existe un repère dans lequel les coordonnées (f_i) et (g_i) de f et g vérifient au voisinage de 0: $f_1(t) = g_1(t) = t$. Alors, on a: $f'(0) = g'(0), \dots, f^{(p)}(0) = g^{(p)}(0)$ et $f^{(p+1)}(0) \neq g^{(p+1)}(0)$.

Autrement dit, si l'on dispose de paramétrages cartésiens de γ et δ au voisinage de 0, on peut utiliser ces paramétrages pour tester l'ordre du point de contact en M_0 de γ et δ.

La courbe $t \mapsto \vec{f(t)}$ est non singulière en t_0 si $d\vec{f(t)}/dt(t_0)$ n'est pas le vecteur nul. Cela peut dépendre du paramétrage. Le vecteur $d\vec{f(t)}/dt(t_0)$ est le vecteur tangent.

Courbe plane. Si f est $\mathcal{C}^2$, on a

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)\vec{f'(t_0)} + (t-t_0)^2/2\vec{f''(t_0)} + \vec{o}((t-t_0)^2).$$

Si $\vec{f'(t_0)}$ et $\vec{f''(t_0)}$ sont indépendants, la courbe ne traverse pas sa tangente. Sinon, en général, la courbe traverse sa tangente, on a en général une inflexion (si $\vec{f'''(t_0)}$ est indépendant de $\vec{f'(t_0)}$ et $\vec{f''(t_0)}$). Si

$\vec{f'(t_0)} = \vec{0}$, et $\vec{f''(t_0)}$ et $\vec{f'''(t_0)}$ sont indépendants, on a un rebroussement.

Courbes dans l'espace. Si $\vec{f'(t_0)}$ et $\vec{f''(t_0)}$ sont indépendants, le plan contenant M_0 et de direction engendrée par $\vec{f'(t_0)}$ et $\vec{f''(t_0)}$ est le plan osculateur. Si $\vec{f'''(t_0)}$ est indépendant de $\vec{f'(t_0)}$ et $\vec{f''(t_0)}$, la courbe traverse son plan osculateur.

Si la courbe est donée par $f(x, y) = 0$, f $\mathcal{C}^1$, le point (x_0, y_0) est point simple si l'une des dérivée $df/dx(x_0, y_0)$ $df/dy(x_0, y_0)$ est non nulle (théorème des fonctions implicites) (si df/dx est non nulle, on peut paramétrer par y au voisinage de (x_0, y_0).

Si les dérivées partielles sont nulles, on peut essayer de poser $y = tx$ et de paramétrer par t. Exemple : $y^2 = x^3 + x^2$.

On suppose que $t \mapsto \vec{f(t)}$ est $\mathcal{C}^1$. La longueur de l'arc $\phi(t)$ est :

$$\int_{t_0}^{t} \parallel \vec{f'(t)} \parallel dt.$$

Si l'arc est régulier, $t \mapsto \phi(t)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ strictement croissante à fonction réciproque ψ qui est $\mathcal{C}^1$. On peut paramétrer par $f \circ \psi$; on obtient un paramétrage par s qui est tel que $d\vec{f}/ds$ est unitaire ; on le note $t\vec{(s)}$. Exemple : cercle. $t\vec{(s)}$ et $n\vec{(s)}$ base orthonorée directe.

On suppose maintenant que la courbe est plane. On appelle courbure le réel tel que $dt\vec{(s)}/ds = K(s)n\vec{(s)}$ (aussi appelée courbure algébrique car elle a un signe). On a : $dn\vec{(s)}/ds = -K(s)t\vec{(s)}$. Le centre de courbure est $C(s) = f\vec{(s)} + n\vec{(s)}/K(s)$. On a $dC(s)/ds = n\vec{(s)}/K'(s)$. Autrement dit l'enveloppe des normales rencontre les normales aux centres de courbure.