Habilitation à diriger des recherches

Résumé des travaux

Vincent Blanlœil

À V. et V.

孔子说:
"温习过去所学的知识,能有新体会,新发展,这样就可以当老师了."

. Avant-propos

Dans les années 60, R. Fox et J. Milnor ont été les premiers à étudier la concordance des plongements de S^1 dans S^3. Puis M. Kervaire et J. Levine se sont intéressés aux plongements de sphères de grande dimension en codimension deux. Peu de temps après, à la suite des travaux de J. Milnor sur les singularités, la notion de nœud fibré donne alors le cadre topologique convenable qui correspond à celui des nœuds algébriques associés aux singularités isolées d'hypersurfaces complexes. Ainsi l'étude de la topologie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes devint une motivation pour étudier des plongements de variétés plus générales que des sphères.

Au début des années 70, D.T. Lê a démontré que les notions d'isotopie et de concordance coïncident pour les nœuds algébriques de dimension un. Il faut ensuite attendre plus de vingt ans pour que P. Du Bois et F. Michel donnent les premiers exemples de nœuds algébriques concordants et non isotopes.

Dans ce résumé des travaux, nous présentons les résultats de la thèse et ceux qui ont suivi. Nous avons cherché à y développer une théorie de la concordance pour les nœuds fibrés en toute généralité. Le thème principal est donc l'étude de la topologie du plongement des variétés. L'outil fondamental est la modification des variétés par chirurgie, mais nous utilisons aussi bien des techniques de la topologie des variétés de dimension supérieure ou égale à 5, que d'autres spécifiques aux dimensions 4 et 3.

Nous commençons dans le §1 par des définitions et résultats fondamentaux. Ensuite dans les paragraphes suivants nous donnons les principaux résultats liés à l'étude de la concordance des nœuds.

En annexe, et de manière totalement indépendante au reste du texte, nous aborderons un aspect de la topologie au quotidien.

Dans tout le texte on se place dans la catégorie des variétés différentiables, sauf mention contraire.

1. Concordance des nœuds sphériques

Nous nous intéressons aux plongements de variétés de codimension 2 dans des sphères, plus précisement

DÉFINITION 1.1. *On appelle nœud, ou $(2n-1)$-nœud, l'image orientée du plongement d'une variété de dimension $2n-1$, qui est compacte, sans bord et $(n-2)$-connexe (pour $n = 1$ il n'y a pas de propriété de connexité), dans une sphère de dimension $2n+1$.*

On appelle nœud sphérique tout nœud homéomorphe à une sphère.

Les premiers exemples de nœuds ont été donnés par des plongements d'un cercle dans S^3. Mais bien avant ce formalisme mathématique, le concept existait déjà. Citons par exemple les enluminures celtes et scandinaves, et surtout Alexandre "dénouant" le nœud Gordien.

Dans le cas, dit classique, des nœuds de dimension 1 il est très naturel de se demander s'il est possible de dénouer un nœud donné. Il en est de même pour les nœuds de grande dimension. La notion d'isotopie des nœuds est alors très naturelle.

DÉFINITION 1.2. *Deux nœuds K_0 et K_1, images du plongement d'une variété $\mathcal{K}$ et de dimension $2n-1$, sont isotopes s'il existe un plongement $\Phi : \mathcal{K} \times [0;1] \to S^{2n+1} \times [0;1]$ tel que $\Phi(\mathcal{K} \times \{0\}) = K_0$, $\Phi(\mathcal{K} \times \{1\}) = -K_1$, où $-K_1$ désigne le nœud K_1 avec l'orientation inverse, et les paires $(S^{2n+1} \times \{t\}, \Phi(\mathcal{K} \times \{t\}))$ sont toutes homéomorphes pour tout $t \in [0;1]$.*

Intuitivement cela revient à pouvoir déformer un nœud en un autre, sans jamais autoriser le croisement de deux brins.

Le choix de la codimension 2 n'est pas arbitraire. Rappelons que dans la catégorie P.L., E. Zeeman a montré que les nœuds sphériques de codimension supérieure ou égale à trois sont tous non noués (c.f. [**Ze**]). J. Stalling a prouvé qu'il en est de même dans la catégorie topologique dès que la dimension des nœuds sphériques est au moins égale à 2 (c.f. [**Sta**]). Dans le cas de la catégorie différentiable A. Haefliger a montré que la concordance des nœuds sphériques en codimension au moins égale à 3 implique l'isotopie de ces nœuds (c.f. [**Ha1**] et aussi J. Levine [**L1**]).

La caractérisation des classes d'isotopie des nœuds sphériques est fondamentale pour bien des raisons. Par exemple le fait que les présentations par chirurgie des variétés de dimension 3 ne dépendent pas de la classe d'isotopie du nœud sur lequel on effectue la chirurgie, implique que les invariants des nœuds à isotopie près donnent des invariants pour les 3-variétés.

Les classes d'isotopies sont donc d'un intérêt très important et ont beaucoup été étudiées. Nous allons nous intéresser ici à des classes d'équivalence de nœuds beaucoup plus larges.

DÉFINITION 1.3. *Deux nœuds K_0 et K_1, images du plongement d'une variété $\mathcal{K}$ et de dimension n, sont concordants s'il existe un plongement $\Phi : \mathcal{K} \times [0;1] \to S^{2n+1} \times [0;1]$ tel que $\Phi(\mathcal{K} \times \{0\}) = K_0$, $\Phi(\mathcal{K} \times \{1\}) = -K_1$, où $-K_1$ désigne le nœud K_1 avec l'orientation inverse.*

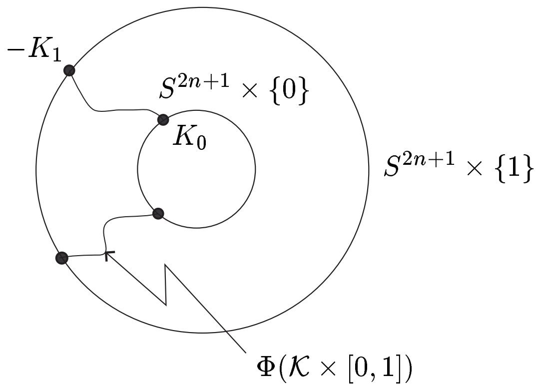

FIG. 1. Concordance entre K_0 et K_1

La différence entre concordance et isotopie réside dans le fait que l'on permet à $\Phi(\mathcal{K} \times [0,1])$, le "tube de concordance", d'être noué dans $S^{n+2} \times [0;1]$.

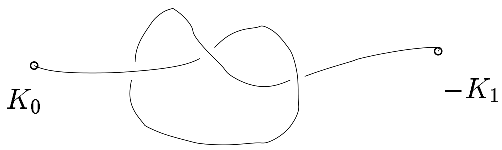

FIG. 2. Une concordance qui n'est pas une isotopie

On peut de plus munir l'ensemble des classes de concordance de nœuds sphériques d'une structure de groupe en prenant la somme connexe comme opération. Il est clair qu'un plongement trivial d'une sphère est un élément neutre pour cette opération, de plus les sphères étant connexes par arcs l'opération est clairement associative. Pour l'existence de l'inverse il suffit de remarquer que la somme connexe d'un $(2n-1)$-nœud sphérique avec son image miroir donne un $(2n-1)$-nœud qui est le bord d'un disque D^{2n} dans D^{2n+2}.

Lorsqu'un nœud sphérique, plongé dans une sphère $S = \partial D$, est le bord d'un disque plongé dans D, il est dit *slice*.

Un nœud slice est concordant au plongement trivial d'une sphère. De plus, avec la structure de groupe mise en évidence, la concordance des nœuds sphériques peut s'exprimer dans les termes suivants

PROPOSITION 1.4. *Deux $(2n-1)$-nœuds sphériques K_0 et K_1 sont concordants si la somme connexe $K_0\# - K_1$ est slice.*

Deux nœuds isotopes sont clairement concordants. Par contre la réciproque est fausse. En effet, les classes de concordances peuvent déjà être distinctes des classes d'isotopies dans le cas des nœuds sphériques. Pour s'en convaincre, les nœuds de dimension 1 suffisent. Prenons la somme connexe du nœud de trèfle droit et de son image miroir (le nœud de trèfle gauche). Cette somme connexe est slice, par contre elle n'est pas isotope au nœud trivial[1].

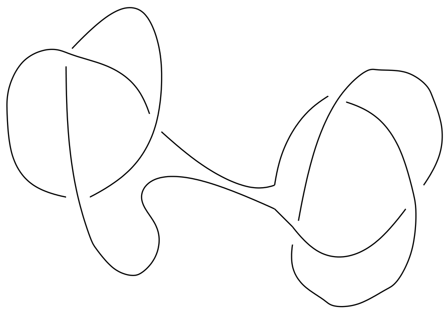

FIG. 3. Un nœud slice non isotope au plongement trivial du cercle.

1.1. Formes de Seifert.

Rappelons que tout $(2n-1)$-nœud est le bord d'une variété orientée de codimension 1 dans S^{2n+1}.

DÉFINITION 1.5. *On appelle surface de Seifert d'un $(2n-1)$-nœud toute sous-variété compacte orientée de codimension 1 de S^{2n+1} qui admet le nœud comme bord orienté.*

De manière très générale on peut associer une forme bilinéaire entière à toute surface compacte orientée de codimension 1 dans une sphère.

[1]Le calcul du polynôme d'Alexander c.f. 3 le prouve.

DÉFINITION 1.6. *Soit F une sous-variété compacte orientée de dimension $2n$ de S^{2n+1}, et soit G le quotient*[2] *de $\mathrm{H}_n(F)$ par sa $\mathbf{Z}$-torsion. La forme de Seifert associée à F est la forme bilinéaire entière $A : G \times G \to \mathbf{Z}$ définie comme suit. Pour tout couple (x, y) de G^2 on définit $A(x, y)$ comme étant le nombre d'enlacement dans S^{2n+1} de ξ et η_+, où ξ est un n-cycle de F représentant x et η_+ est un n-cycle de F, représentant y, poussé hors de F dans la direction positive de son fibré normal dans S^{2n+1}.*

Étant donné un nœud, on peut lui associer différentes surfaces de Seifert. À chacune de ces variétés sont associées des formes de Seifert a priori distinctes. Remarquons déjà que lorsque la sous-variété F, considérée dans la définition ci-dessus, est $(n-1)$-connexe, le groupe $\mathrm{H}_n(F)$ est sans torsion, on définit alors

DÉFINITION 1.7. *Un $(2n-1)$-nœud est dit simple lorsqu'il possède une surface de Seifert qui est $(n-1)$-connexe.*

J. Levine a décrit les modifications de la forme de Seifert lorsque l'on passe d'une surface de Seifert à une autre pour un nœud simple donné. Soit K un nœud simple dont on connait deux surfaces de Seifert $(n-1)$-connexes, notées F et F'. En étudiant l'isotopie du nœud K, muni de F comme surface de Seifert, avec le même nœud K, muni de F' comme surface de Seifert ; J. Levine [**L2**] a montré que le passage d'une surface à l'autre se traduit par une succession d'opérations élémentaires sur la forme de Seifert.

Plus précisément, on définit l'élargissement d'une matrice carré A en une matrice A' de la manière suivante

$$A' = \begin{pmatrix} A & \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \mathcal{O}_3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou bien } \begin{pmatrix} A & \beta & \mathcal{O}_1 \\ \mathcal{O}_2 & 0 & 1 \\ \mathcal{O}_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{O}_i$ des lignes ou des colonnes de 0 pour $i = 1, 2, 3$, et α, β des vecteurs ligne et colonne quelconques.

La réduction sera alors le passage de A' à A.

DÉFINITION 1.8. *On dit que deux matrices carrées sont S-équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par des élargissements, des réductions ou bien des changements de base. Les classes d'équivalence ainsi définies sont appelées classes de S-équivalence.*

On a alors le théorème suivant

[2]L'homologie singulière des variétés est à coefficients dans $\mathbf{Z}$ sauf mention contraire.

THÉORÈME 1.9 (Levine [**L3**]). *Les formes de Seifert de deux nœuds sphériques simples isotopes sont S-équivalentes.*

L'utilisation des formes de Seifert s'est révélée être très utile pour l'étude de la concordance des nœuds sphériques. En effet M. Kervaire [**K2**] et J. Levine [**L3**] ont donné une classification des nœuds sphériques à concordance près à l'aide des formes de Seifert.

THÉORÈME 1.10 (Kervaire [**K2**], Levine [**L3**]). *Deux nœuds sphériques, de dimension $2n-1$ avec $n \geq 3$, sont concordants si et seulement si leurs formes de Seifert sont Witt-équivalentes.*

où la Witt-équivalence des formes bilinéaires est définie comme suit.

DÉFINITION 1.11. *Deux formes bilinéaires entières A_0 et A_1, définies sur des $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini G_0 et G_1, sont Witt-équivalentes s'il existe un sous-module M de $G_0 \oplus G_1$ de rang moitié tel que la restriction de la forme $A_0 \oplus -A_1$ à M soit identiquement nulle. Le sous-module M est alors appelé* métaboliseur.

Le théorème 1.10 est vraiment le résultat qui est à l'origine de l'étude de la concordance des nœuds. D'une part il donne une classification à concordance près des nœuds sphériques, ensuite il rend calculable l'appartenance d'un nœud à une classe de concordance donnée.

Dans la suite, nous allons étendre les résultats précédents à des variétés plus générales que des sphères.

2. Singularités, nœuds fibrés simples

Une des motivations pour généraliser la notion de nœud sphérique vient de l'étude des singularités isolées d'hypersurfaces complexes.

2.1. Singularités isolées d'hypersurfaces complexes.

Soit $f\,:(\mathbf{C}^{n+1},0)\to(\mathbf{C},0)$ un germe de fonctions holomorphes avec une singularité isolée en 0. Notons D_ε^{2n} la boule compacte de rayon $\varepsilon>0$ centrée en 0 dans $\mathbf{C}^n$, et S_ε^{2n-1} son bord. La classe d'homéomorphie orientée de la paire $(D_\varepsilon^{2n+2}, f^{-1}(0)\cap D_\varepsilon^{2n+2})$ ne dépend pas du choix de ε dès qu'il est suffisamment petit, nous appelerons cette classe *type topologique* de f.

DÉFINITION 2.1. *Si $K_f=(f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^{2n+1})$, la classe d'homéomorphie orientée de la paire $(S_\varepsilon^{2n-1}, K_f)$ est appelée* nœud algébrique *associé à f.*

EXEMPLE 2.2. *Comme exemple de nœud algébrique citons l'entrelacs de Hopf qui est associé au polynôme XY de $\mathbf{C}[X,Y]$.*

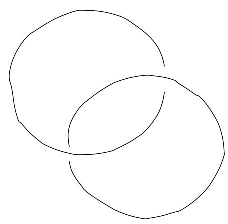

FIG. 4. L'entrelacs de Hopf

(L'hypersurface définie par l'équation $XY=0$ est constituée de deux plans, et possède une singularité isolée en 0. L'intersection d'une 3-sphère centrée en 0 avec chacun des plans donne un cercle. Comme les deux cercles ainsi définis bordent des disques qui n'ont qu'un seul point d'intersection, ils s'enlacent une fois.)

Le nœud de trèfle est aussi un nœud algébrique, il est associé au polynôme X^2-Y^3 de $\mathbf{C}[X,Y]$. Plus généralement les nœuds toriques de type (p,q) sont des nœuds algébriques associés aux polynômes X^p-Y^q.

Le théorème de la structure conique démontré par J. Milnor [**M3**] établi que le cône $C(K_f)$ de K_f est homéomorphe à $f^{-1}(0)\cap D_\varepsilon^{2n+2}$, et donc que le nœud algébrique associé à f détermine le type topologique de f. De plus en étudiant le type topologique de f à l'aide de la théorie de Morse, J. Milnor a montré

(1) un nœud algébrique est une variété compacte, orientée, sans bord, de dimension réelle $2n-1$ et $(n-2)$-connexe (dans le cas $n=1$ il n'y a pas de propriété de connexité) ;

(2) l'application $\dfrac{f}{|f|} : S_\varepsilon^{2n+1} \setminus K_f \to S^1$ est une fibration localement triviale dans tout voisinage tubulaire de K_f, dès que ce voisinage est suffisamment petit ;

(3) les fibres ont le type d'homotopie d'un bouquet de S^n, et leur adhérence est une sous-variété de S^{2n+1} qui est compacte, orientée, de dimension réelle $2n$, $(n-1)$-connexe et qui admet K_f comme bord.

C'est D.T. Lê qui a montré que dans le cas des nœuds algébriques de dimension 1 les notions de concordance et d'isotopie coïncident.

THÉORÈME 2.3 (Lê [**Le1**]). *Deux nœuds algébriques, de dimension* 1*, concordants sont isotopes.*

En utilisant les résultats de O. Zariski [**Za**] et W. Burau [**Bu**] le calcul du groupe fondamental du complémentaire d'un nœud algébrique de dimension 1 peut s'exprimer en fonction des paires caractéristiques de Puiseux, et D.T. Lê [**Le2**] montre que la détermination du polynôme d'Alexander donne les paires caractéristiques de Puiseux.

Ensuite D.T. Lê démontre que deux nœuds algébriques concordants ont le même polynôme d'Alexander. Ceci étant dû au fait que les racines des polynômes d'Alexander de tels nœuds sont des racines primitives de l'unité. Il reste ensuite à utiliser que la donnée du groupe fondamental du complémentaire d'un nœud algébrique détermine la classe d'isotopie de ce nœud. Bien que faux dans le cas général (c.f. [**F-C**]), c'est vrai dans le cas des nœuds algébriques de dimension 1 (c.f. [**Bu**] [**Le2**]).

Bien que pour démontrer le théorème 2.3 on fait appel à des propriétés des nœuds algébriques qui ne sont valables que dans le cas des nœuds algébriques de dimension 1, le résultat de D.T. Lê pouvait laisser supposer que dans le cas des nœuds algébriques de dimension supérieure la situation était analogue. Il n'en est rien, et c'est P. Du Bois et F. Michel [**DB-M**] qui ont donné les premiers exemples de nœuds algébriques sphériques concordants et non isotopes.

2.2. Classification des nœuds fibrés simples à concordances près.

De manière à se placer dans un cadre topologique général qui englobe celui des nœuds algébriques, on définit les nœuds fibrés simples.

DÉFINITION 2.4. *Un* $(2n-1)$*-nœud* K *est fibré simple s'il existe une fibration localement triviale* $\varphi : S^{2n+1} \setminus K \to S^1$*, qui est triviale sur tout voisinage tubulaire ouvert suffisamment petit de* K*, et qui admet des fibres* $(n-1)$*-connexes.*

La propriété de trivialité sur le voisinage de K permet d'avoir une surface de Seifert en prenant l'adhérence d'une fibre. Ainsi, dans le cas des nœuds fibrés simples, on associe toujours au nœud une forme de Seifert définie sur l'adhérence d'une fibre.

En autorisant les nœuds fibrés à avoir de l'homologie dans les dimensions n et $n-1$ nous nous plaçons dans un cadre topologique beaucoup plus général que dans le cas des nœuds sphériques. Par contre cela nous fait perdre la structure de groupe sur l'ensemble des classes de concordance.

Pour un nœud K de dimension $2n-1$ l'homologie est non triviale uniquement dans les dimensions n et $n-1$. Dès que F, la surface de Seifert considérée de K, est $(n-1)$-connexe l'homologie de F est non triviale uniquement en dimension n, et $\mathrm{H}_n(F)$ est libre. La monodromie h définie par la fibration du complémentaire du nœud, est le difféomorphisme de la fibre défini par le premier retour lorsque l'on parcourt S^1. Dans le cas des nœuds fibrés simples l'homomorphisme $h_n : \mathrm{H}_n(F) \to \mathrm{H}_n(F)$ induit par h est lié à la forme de Seifert. En effet si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{h}$ désignent les matrices de A et h_n respectivement, on a $\mathbf{h} = (-1)^{n+1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^T$. Par dualité d'Alexander la forme de Seifert d'un nœud fibré simple est alors unimodulaire.

Rappelons que la S-équivalence consiste à modifier une forme bilinéaire entière en ajoutant, ou bien en ôtant, des blocs aux matrices ; mais dans tous les cas on ajoute, ou bien on ôte, une ligne ou une colonne de 0 à la matrice considérée 1.8. Les formes de Seifert des nœuds fibrés simples sont unimodulaires, donc les classes de S-équivalence de leurs formes de Seifert sont réduites aux classes d'isomorphies. Cette constatation a conduit A. Durfee [**D1**] à énoncer le théorème suivant

THÉORÈME 2.5 (Durfee [**D1**]). *Deux nœuds fibrés simples sont isotopes si et seulement si les formes de Seifert associées aux fibrations sont isomorphes.*

La forme de Seifert d'un nœud fibré simple K est reliée à la forme d'intersection d'une fibre F par la relation $\mathbf{S} = \mathbf{A} + (-1)^n\mathbf{A}^T$, où $\mathbf{S}$ et $\mathbf{A}$ sont les matrices de S et A.

De plus, la suite exacte longue du couple (F, K) est

$$0 \to \mathrm{H}_n(K) \xrightarrow{i} \mathrm{H}_n(F) \xrightarrow{S^*} \mathrm{H}_n(F, K) \to \mathrm{H}_{n-1}(K) \to 0$$

Par la dualité de Poincaré nous avons $\mathrm{H}_n(F, K) \cong \mathrm{H}^n(F)$, et par la suite des coefficients universels nous avons $\mathrm{H}^n(F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{H}_n(F); \mathbf{Z})$. Donc la matrice de S^* est égale à celle de la forme d'intersection de F, et de la suite exacte précédente on déduit que le noyau de la forme d'intersection S peut être identifié à l'image de $\mathrm{H}_n(K)$ dans $\mathrm{H}_n(F)$, et son conoyau est isomorphe à $\mathrm{H}_{n-1}(K)$.

Le fait de pouvoir identifier le noyau et le conoyau de la forme d'intersection avec l'homologie du nœud dans la suite exacte longue du couple (F, K) est fondamental pour avoir toute l'information sur la topologie du nœud contenue dans la donnée de la forme de Seifert. Aussi, lorsque les nœuds ne sont pas fibrés ou bien lorsque les surfaces de Seifert ne proviennent pas nécessairement d'une fibration, nous ne considérerons que des surfaces de Seifert qui vérifient ces conditions. Ceci est toujours possible quitte à modifier le $\mathrm{H}_{n-1}(F)$ par chirurgie si nécessaire.

Nous avons défini dans [**2**] une nouvelle relation d'équivalence pour les formes bilinéaires entières appelée *concordance algébrique*. Cette définition est motivée par le résultat suivant.

THÉORÈME 1 ([**2**]). *Pour $n \geq 3$, deux nœuds fibrés simples de dimension $2n-1$ sont concordants si et seulement si leurs formes de Seifert associées aux fibrations sont algébriquement concordantes.*

La concordance algébrique des formes de Seifert des nœuds sphériques implique leur Witt-équivalence (c.f. 2.7). Donc la classification des nœuds sphériques donnée par M. Kervaire et J. Levine est une conséquence du théorème 1. Par contre la démonstration du théorème 1 ne peut pas se faire en généralisant la démonstration de M. Kervaire et J. Levine.

2.3. Concordance algébrique.

Avant de donner la définition de la concordance algébrique, fixons quelques notations.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des formes bilinéaires entières définies sur des $\mathbf{Z}$-modules libres de type finis. Si A est élément de $\mathcal{A}$, notons A^T la transposée de A, et S la forme ε-symétrique $A+\varepsilon A^T$ associée à A, par $S^* : G \to G^*$ l'adjoint de S (G^* étant le dual $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(G;\mathbf{Z})$ de G), par $\overline{S} : \overline{G} \times \overline{G} \to \mathbf{Z}$ la forme non dégénérée ε-symétrique induite par S sur $\overline{G} = G_{/\mathrm{Ker}\, S^*}$. Le sous-module M de G est pur si $G_{/M}$ est sans torsion. Si M un sous-module quelconque de G notons $M^\wedge$ le plus petit sous-module pur de G qui contient M. En fait $M^\wedge$ est égal à $(M \otimes \mathbf{Q}) \cap G$. Pour un sous-module M de G on note $\overline{M}$ l'image de M dans $\overline{G}$.

DÉFINITION 2.6. *Soit $A_i : G_i \times G_i \to \mathbf{Z}$, i=0,1, deux formes bilinéaires de $\mathcal{A}$. Soit $G = G_0 \oplus G_1$ et $A = (A_0 \oplus -A_1)$. La forme bilinéaire A_0 est algébriquement concordante à la forme bilinéaire A_1 s'il existe un métaboliseur M pour A tel que $\overline{M}$ est pur dans $\overline{G}$, un isomorphisme φ entre $\mathrm{Ker}\, S_0^*$ et $\mathrm{Ker}\, S_1^*$ et un isomorphisme θ entre $\mathrm{Tors}\,(\mathrm{Coker}\, S_0^*)$ et $\mathrm{Tors}\,(\mathrm{Coker}\, S_1^*)$ qui satisfont les conditions :*
- c.1 : $M \cap \mathrm{Ker}\, S^* = \{(x,\varphi(x)); x \in \mathrm{Ker}\, S_0^*\}$,
- c.2 : $d(S^*(M)^\wedge) = \{(x,\theta(x)); x \in \mathrm{Tors}\,(\mathrm{Coker}\, S_0^*)\}$, *où d est l'application quotient de G^* dans* $\mathrm{Coker}\, S^*$.

Un tel métaboliseur lorsqu'il existe est appelé métaboliseur de concordance.

REMARQUE 2.7. *Comme* $\operatorname{Ker} S_i^*$ *s'identifie avec l'image de* $H_n(K_i)$ *dans* $H_n(F)$ *et* $CokerS_i^*$ *avec* $H_{n-1}(K_i)$*, les conditions c.1 et c.2 sont automatiquement vérifiées lorsque les nœuds sont sphériques. Dans ce cas la forme d'intersection est alors un isomorphisme et la concordance algébrique des formes de Seifert est équivalente à leur Witt-équivalence.*

Les classes de concordance algébrique des formes bilinéaires entières existent sans être nécessairement associées à des formes de Seifert de nœuds concordants. Mais du fait que la relation de concordance est une relation d'équivalence pour les nœuds, le théorème 1 impose qu'il en est de même pour les classes de concordance algébrique. Dans [**2**] nous démontrons le théorème suivant

THÉORÈME 2 ([**2**]). *Être algébriquement concordant est une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes bilinéaires entières définies sur des* $\mathbf{Z}$*-modules libres de type fini.*

La seule difficulté consiste à démontrer la transitivité. Pour cela on montre que l'on peut remplacer la condition c.1 de la définition de la concordance algébrique par

c.11 : $\{(x, \varphi(x)); x \in \operatorname{Ker} S_0^*\} \subset M$;
c.12 : l'image $\overline{M}$ de M dans $\overline{G} = G_{/\operatorname{Ker} S^*}$ est un métaboliseur pour $\overline{S} = \overline{S_0} \oplus -\overline{S_1}$.

Étant données trois formes de Seifert A_0, A_1 et A_2 , telles que A_0 et A_1 sont algébriquement concordantes, et, A_1 et A_2 le sont aussi, on construit un métaboliseur pour la forme $A_0 \oplus -A_1$ qui vérifie les conditions c.11, c.12 et c.2.

2.4. La concordance algébrique, une condition nécessaire de condordance.

Soient K_0 et K_1 deux nœuds fibrés simples concordants, de dimension $2n-1$ avec $n \geq 3$, dont les formes de Seifert associées aux fibrations sont notées A_0 et A_1.

Soit N une sous-variété, compacte et orientée, de $S^{2n+1} \times [0,1]$ obtenue en recollant le long de leurs bords F_0, le "tube" du cobordisme $\Phi(K \times [0,1])$, et F_1. Par un argument classique de théorie d'obstruction il existe une sous-variété W de $S^{2n+1} \times [0,1]$ telle que $\partial W = N$.

Soit i : $\mathrm{H}_n(F_0) \oplus \mathrm{H}_n(F_1) \to \mathrm{H}_n(W)$ l'homomorphisme induit par les inclusions, et $M = \operatorname{Ker} i$ le sous-module de $\mathrm{H}_n(F_0) \oplus \mathrm{H}_n(F_1)$, constitué de tous les cycles n-cycles de $\mathrm{H}_n(F_0) \oplus \mathrm{H}_n(F_1)$ qui sont des bords dans $\mathrm{H}_n(W)$. Montrons que $A = A_0 \oplus -A_1$ est

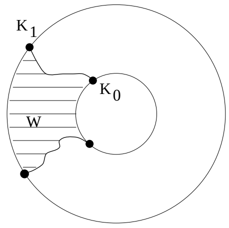

FIG. 5. La variété W

identiquement nulle sur M. Soit $[a]$ et $[b]$ deux classes d'homologie de M, par définition de M il existe deux $(n+1)$-chaînes x et y dans W telles que $\partial x = a$ et $\partial y = b$. Soit i_+ le champ de vecteurs normal, orienté dans le sens positif sur W dans $S^{2n+1} \times [0,1]$. Les chaînes x et $i_+(y)$ ne se coupent pas, comme indiqué sur la figure 6.

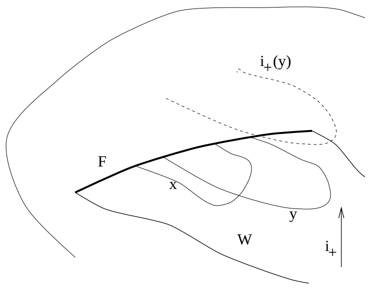

FIG. 6. Déplacement d'une chaîne de W le long de i_+

Donc le nombre d'enlacement dans $S^{2n+1} \times \{0,1\}$ de a et $i_+(b)$ est zéro. Mais ce nombre d'enlacement est, par définition, égal à $A(a,b)$, donc $A(a,b) = 0$ et $A_{|M} \equiv 0$. De plus, ce métaboliseur M vérifie les conditions requises pour être un métaboliseur de concordance (c.f. [**2**]).

Remarquons par contre qu'il n'y a pas de restriction de dimension dans la construction de ce métaboliseur et nous avons alors le résultat suivant

THÉORÈME 3 ([**2**]). *Soient K_0 et K_1 deux entrelacs simples, et A_0 et A_1 des formes de Seifert unimodulaires. Si K_0 et K_1 sont concordants alors A_0 et A_1 sont algébriquement concordantes.*

REMARQUE 2.8. *Dans le cas des nœuds de dimension supérieure ou égale à 5, le fait de posséder une forme de Seifert unimodulaire prouve que le nœud est fibré. Ceci n'est pas forcément vrai pour les dimensions plus petites.*

2.5. La concordance algébrique, une condition suffisante de condordance.

Nous allons voir que la concordance algébrique est une condition suffisante de concordance pour les nœuds simples de dimension supérieure ou égale à 5, qui ne sont pas nécessairement fibrés.

Soient K_0 et K_1 deux nœuds simples, de formes de Seifert respectives A_0 et A_1, qui sont algébriquement concordantes. Commençons par faire la somme connexe, que l'on notera $\mathcal{S}$, des deux sphères dans lesquelles K_0 et K_1 sont plongés. On fait cette somme connexe de telle sorte que $K_0 \coprod K_1$ est un nœud dans la sphère $\mathcal{S}$. Faisons aussi la somme connexe des surfaces de Seifert F_0 et F_1 dans $\mathcal{S}$, de telle sorte que cette somme connexe notée F soit une surface de Seifert pour $K_0 \coprod K_1$. Soit M un métaboliseur de concordance pour $A = A_0 \oplus -A_1$.

Comme $n \geq 3$, la procédure de Whitney [**Wh**] permet de représenter les éléments du métaboliseur par des plongements disjoints de sphères. Les obstructions à pouvoir effectuer des chirurgies plongées dans le $(2n+2)$-disque D sur les cycles représentés par ces sphères plongées, sont nulles car données par les enlacements des cycles.

Après chirurgie sur une base du métaboliseur on obtient une nouvelle sous-variété $\tilde{F}$ de D^{2n+2} vérifiant $\partial(\tilde{F}) = K_0 \coprod K_1$, et dans [**2**] on montre de plus que $H_*(\tilde{F}, K_i) = 0$ pour $i = 0, 1$.

Rappelons le théorème du h-cobordisme

THÉORÈME 2.9 ([**M2**]). *Soit $\mathcal{M}$ une k-variété compacte telle que $\partial\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \coprod \mathcal{M}_1$ avec $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ simplement connexes. Si $\mathrm{H}_*(\mathcal{M}, \mathcal{M}_0) = 0$ et $k \geq 6$ alors $\mathcal{M}$ est difféomorphe à $\mathcal{M}_0 \times [0, 1]$.*

Comme $\dim \tilde{F} = 2n \geq 6$ nous pouvons appliquer le théorème du h-cobordisme qui nous démontre que $\tilde{F}$ est difféomorphe à $K_0 \times [0; 1]$, et donc est un tube de concordance. On a alors le théorème suivant

THÉORÈME 4 ([**2**]). *Soit $n \geq 3$, et soient K_0 et K_1 deux nœuds simples de dimension $2n-1$. Si les formes de Seifert, associées à des surfaces de Seifert $(n-1)$-connexes, des nœuds K_0 et K_1 sont algébriquement concordantes, alors K_0 et K_1 sont concordants.*

REMARQUE 2.10. *Notons que les conditions sur les dimensions des nœuds sont fondamentales ici. D'une part elles permettent de faire des chirurgies plongées, d'autre part elles nous permettent l'utilisation du théorème du h-cobordisme. De plus pour un nœud de dimension $2n+1$, $n = 3$ est la plus petite valeur possible de n qui permet d'utiliser la procédure de Whitney dans la méthode décrite ci-dessus pour trouver des plongements* *disjoints. Donc dans le cas des nœuds de dimension inférieure nous devrons mettre en œuvre d'autres techniques.*

Puisque l'existence d'un métaboliseur est toujours nécessaire, le point important dans la caractérisation des classes de concordance donnée par le théorème 1 vient de la rigidité imposée pour le choix du métaboliseur de concordance dans la définition de la concordance algébrique. En effet, ce choix imposé par la définition 2.6 est crucial pour pouvoir effectuer les chirurgies plongées qui donnent le tube de concordance.

Prenons l'exemple suivant pour nous en convaincre c.f. [**6**].

EXEMPLE 2.11. *Considérons le cas d'un nœud non sphérique donné comme étant l'union disjointe de deux copies de* S^1 *trivialement plongées, avec* $S^1 \times [0,1]$ *comme surface de Seifert. Ce nœud est concordant à lui-même.*

Pour construire le tube de concordance, nous avons vu qu'il est nécessaire de faire la somme connexe des deux surfaces de Seifert et de modifier la variété ainsi obtenue par des chirurgies. Mais si nous faisons la somme connexe des deux copies de $S^1 \times [0,1]$ *alors le métaboliseur obtenu est de rang* 2 *avec* $\{a,b\}$ *comme générateurs (c.f. fig.7). Il y a alors deux chirurgies possibles comme décrit dans la figure* 7. *Mais l'une prouve la concordance alors que l'autre pas.*

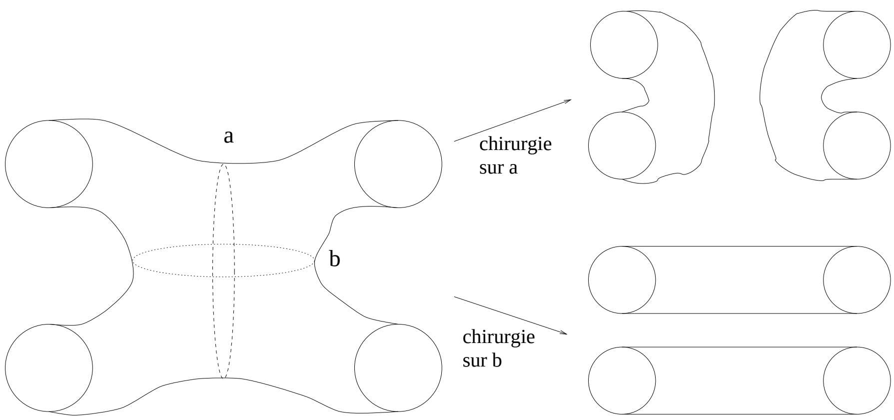

FIG. 7. Les deux chirurgies possibles.

Par contre on peut remarquer que le cycle b est dans $Ker\, S^* \cap M$ *et satisfait les conditions de la concordance algébrique entre les deux formes de Seifert, alors que le cycle a ne les vérifie pas.*

3. Polynôme d'Alexander

À tout $(2n-1)$-nœud K, dont on a fixé une surface de Seifert, on peut associer un polynôme Δ, qui est donné par la relation $\Delta(X) = \det(X\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A}^T)$, où $\mathbf{A}$ est la matrice de la forme de Seifert associée à F. Changer de surface de Seifert revient à multiplier Δ par $\pm X^m$ où m est dans $\mathbf{Z}$.

Définition 3.1. *Le polynôme $\Delta(X) = \det(X\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A}^T)$, défini à une unité de $\mathbf{Z}[X, X^{-1}]$ près, est appelé polynôme d'Alexander du nœud K.*

Remarque 3.2.
- *Le polynôme d'Alexander peut aussi être vu comme le déterminant de la matrice de présentation du n-ième groupe d'homologie du revêtement infini cyclique de la surface de Seifert du nœud.*
- *Dès que l'on a fixé une surface de Seifert, donc en particulier dans le cas des nœuds fibrés, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'expression du polynôme. On le prend alors défini par la relation $\Delta(X) = \det(X\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A}^T)$.*

Remarquons que pour un nœud fibré le polynôme caractéristique de la monodromie et le polynôme d'Alexander coïncident.

Comme la valeur en 1 du polynôme d'Alexander d'un nœud est égale au déterminant de sa forme d'intersection, nous avons

Proposition 3.3. *Un nœud est sphérique si et seulement si l'évaluation en* 1 *de son polynôme d'Alexander vaut* ± 1.

À tout polynôme γ de $\mathbf{Z}[X]$ on associe un polynôme noté γ^* défini par la relation $\gamma^*(X) = X^{\deg\gamma}\gamma(X^{-1})$.

Soient K_0 et K_1 des nœuds concordants de dimension $2n-1$. Notons Δ_0 et Δ_1 leurs polynômes d'Alexander respectifs (associés aux surfaces de Seifert choisies).

Notons A_0 and A_1 les formes de Seifert de K_0 et K_1. Comme K_0 et K_1 sont concordants la forme bilinéaire $A = A_0 \oplus -A_1$ possède un métaboliseur M. Ainsi il existe une base de $\mathrm{H}_n(F_0) \oplus \mathrm{H}_n(F_1)$ telle que dans cette base la matrice de A est $\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}$ où les B_i, $i=1,2,3$ sont des matrices carrées. Nous avons alors $\Delta_0(X).\Delta_1(X) = \det(XA + \varepsilon A^T)$, et donc

$$\Delta_0(X).\Delta_1(X) = \varepsilon.\det(XB_1 + \varepsilon B_2^T).\det(XB_2 + \varepsilon B_1^T)$$

Si $\gamma(X)$ est le polynôme $\det(XB_1 + \varepsilon B_2^T)$, alors $\gamma^*(X) = \det(XB_2 + \varepsilon B_1^T)$. Finalement nous obtenons la proposition suivante

PROPOSITION 5 ([**6**]). *Soient K_0 et K_1 deux nœuds fibrés simples qui ont respectivement Δ_0 et Δ_1 comme polynômes caractéristiques de la monodromie. Si K_0 et K_1 sont concordants alors il existe un polynôme $\gamma(X) \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $\Delta_0.\Delta_1 = \pm\gamma\gamma^*$*

Dans le cas des nœuds algébriques, le polynôme caractéristique de la monodromie est un produit de polynômes cyclotomiques et nous avons

PROPOSITION 3.4. *Soient K_0 et K_1 deux nœuds algébriques qui ont respectivement Δ_0 et Δ_1 comme polynômes caractéristiques de la monodromie. Si K_0 et K_1 sont concordants alors le produit $\Delta_0.\Delta_1$ est un carré dans $\mathbf{Z}[X]$*

Cette proposition s'avère très utile dans certains cas pour montrer que des nœuds ne sont pas concordants. En particulier dans le cas des nœuds algébriques de dimension 1, le polynôme d'Alexander est alors un produit de polynômes cyclotomiques très facilement calculable.

Remarquons que dans [**10**] nous donnerons une relation analogue sur les polynômes d'Alexander des nœuds, de dimension 1 et non nécessairement sphériques, qui sont le bord d'une surface de caractéristique d'Euler 1 dans la boule de dimension 4.

4. Exemples non sphériques

Le théorème 1 étend la classification des nœuds sphériques à cobordisme près à celle des nœuds fibrés simples à cobordisme près. Dans [**3**] nous avons construit des exemples de nœuds fibrés simples non sphériques qui sont concordants et qui ne sont pas isotopes. Pour cela nous avons utilisé les exemples de nœuds algébriques sphériques cités plus haut.

PROPOSITION 6 ([**3**]). *Pour tout $n \geq 3$ il existe des $(2n-1)$-nœuds non sphériques qui sont concordants et pas isotopes.*

Soient K_i, avec $i = 0, 1$, les nœuds algébriques concordants (c.f. [**DB-M**]) associés aux fonctions holomorphes $h_i : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ définies par

$$h_i(x_0, \ldots, x_n) = g_i(x_0, x_1) + x_2^p + x_3^q + \sum_{k=4}^{n} x_k^2$$

où $g_0(x_0, x_1) = (x_0 - x_1)\Big((x_1^2 - x_0^3)^2 - x_0^{s+6} - 4x_1 x_0^{(s+9)/2}\Big)\Big((x_0^2 - x_1^5)^2 - x_1^{r+10} - 4x_0 x_1^{(r+15)/2}\Big)$, et $g_1(x_0, x_1) = (x_0 - x_1)\Big((x_1^2 - x_0^3)^2 - x_0^{r+14} - 4x_1 x_0^{(r+17)/2}\Big)\Big((x_0^2 - x_1^5)^2 - x_1^{s+2} - 4x_0 x_1^{(s+7)/2}\Big)$.

et $s \geq 11$ est impair, $s \neq r + 8$ est impair, $p \neq q$ sont des nombres premiers qui ne divisent pas le produit $\epsilon = 330(30 + r)(22 + s)$. Notons A_i pour $i = 0, 1$ les formes de Seifert, associées aux nœuds algébriques K_i, définies sur des $\mathbf{Z}$-modules libres de rangs finis notés H_i.

Soit L le nœud algébrique de dimension $2n - 1$ associé à la singularité isolée en 0 définies par la fonction holomorphe

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbf{C}^{n+1}, 0) & \to & (\mathbf{C}, 0) \\ & (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^2 \end{array}$$

ce nœud algébrique a pour forme de Seifert $A = \Big((-1)^{n(n+1)/2}\Big)$, définie sur un $\mathbf{Z}$-module de rang 1 noté G.

Construisons L_i la somme connexe de L et de K_i pour $i = 0, 1$. La forme de Seifert de L_i est donnée par la forme bilinéaire $A \oplus A_i$ définie sur le $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini $G_i = G \oplus H_i$. Les nœuds fibrés L_i sont fibrés simples car $A \oplus A_i$ est unimodulaire. Notons S_i la $(-1)^n$-symétrisée associée à $A \oplus A_i$, c'est la forme d'intersection de la fibre associée à L_i. Comme $A = (\pm 1)$ alors $\mathrm{Tors\,Coker} S_i^* \neq \{0\}$ ou bien $\mathrm{Ker} S_i^* \neq \{0\}$; donc les nœuds L_i, $i = 0, 1$ ne sont pas sphériques.

Soit M le métaboliseur de concordance de $A_0 \oplus -A_1$ construit par P. Du Bois et F. Michel [**DB-M**]. Le module $N = \Delta_G \oplus M$, où $\Delta_G = \{x \oplus x, x \in G\}$, est un métaboliseur pour $B = A \oplus A_0 \oplus -(A \oplus A_1)$. Comme N satisfait les conditions c.1 et c.2 de la définition de la concordance algébrique des formes bilinéaires entières, nous avons $A \oplus A_0$ algébriquement concordante à $A \oplus A_1$. Donc L_0 est concordant à L_1 par le théorème 1.

Expliquons maintenant pourquoi les nœuds fibrés simples L_0 et L_1 ne peuvent pas être isotopes. Pour cela on reprend la méthode utilisée par P. Du Bois et F. Michel pour construire leurs exemples de nœuds algébriques sphériques concordants et non isotopes.

Soit t_i la monodromie associée au nœud fibré L_i. S'il existe un entier e tel que $(t_i^e - 1)\, G_i = 0$ alors e est appelé *exposant* pour L_i. Le *e-ième groupe du twist* pour L_i est défini comme suit. En supposant que $(t_i^e - 1)^2\, G_i = 0$, où e est un exposant pour L_i alors le e-ième groupe du twist associé à L_i est le groupe noté $GT^e(L_i)$ qui est le sous-groupe de $\mathbf{Z}$-torsion du quotient $\mathrm{Ker}\,(t_i^e - 1)_{/(t_i^e - 1)H_i}$.

Puisque $\epsilon = 330(30 + r)(22 + s)$ est un exposant pour L_0 et L_1, et comme pour tout k multiple de ϵ les k-ième groupes du twist $GT^k(L_0)$ et $GT^k(L_1)$ ont des ordres distincts, il vient que, en tant que $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$-modules, $\mathrm{H}_n(G_0)$ et $\mathrm{H}_n(G_1)$ ne sont pas isomorphes. De là on en déduit que les nœuds L_0 and L_1 ne sont pas isotopes.

Remarquons qu'en vertu du résultat de N. A'Campo [**A**] les nœuds fibrés simples L_0 et L_1, qui sont des sommes connexes de deux nœuds algébriques, ne peuvent pas être algébriques.

5. Nœuds fibrés

J. Levine [**L2**] a montré que tout nœud sphérique est concordant à un nœud sphérique simple. Dans [**4**] on a étendu ce résultat aux nœuds non sphériques.

Plus précisément on démontre le résultat suivant

PROPOSITION 7 ([**4**]). *Soient un nœud K et A une forme de Seifert pour K. Alors K est concordant à un nœud simple K' ayant une forme de Seifert A' algébriquement concordante à A.*

Pour démontrer cette proposition on effectue des chirurgies sur la surface de Seifert, notée F, de départ de manière à la rendre $(n-1)$-connexe. Ensuite à l'aide d'un théorème de M. Hirsh [**Hir**] nous établissons la concordance entre le nœud muni de sa première surface de Seifert et le même nœud muni de la surface $(n-1)$-connexe.

La principale difficulté consiste à contrôler la forme de Seifert lors des chirurgies de dimension $n-1$. Dans [**4**] on montre que les chirurgies sur des cycles générateurs d'un facteur libre ne modifient pas la forme de Seifert.

Lorsque l'on effectue une chirurgie sur un $(n-1)$-cycle de F qui est un générateur de la torsion de $\mathrm{H}_{n-1}(F)$, ceci équivaut à une chirurgie rationnelle sur un $(n-1)$-cycle nul-homologue. C'est pourquoi cette opération modifie l'homologie de dimension n de F. On montre ensuite qu'une chirurgie sur un $(n-1)$-cycle de torsion augmente de 2 le rang de $\mathrm{H}_n(F)$.

Cette augmentation du rang de l'homologie de la surface de Seifert en dimension n, induit des changements pour la forme de Seifert. Mais il est facile de montrer que la nouvelle forme de Seifert est algébriquement concordante à la première.

À l'aide de cette proposition on démontre alors le théorème suivant

THÉORÈME 8 ([**4**]). *Soit $n \geq 3$. Soient K_0 et K_1 deux nœuds fibrés de dimension $2n-1$. Les nœuds K_0 et K_1 sont concordants si et seulement si leurs formes de Seifert sont algébriquement concordantes.*

On dispose donc d'une classification à concordance près des nœuds fibrés de dimension supérieure ou égale à 5. Le progrès est réel, puisqu'un nœud de dimension supérieure ou égale à 5 est fibré si, et seulement si, il possède une forme de Seifert unimodulaire. Cette condition est facilement vérifiable sur la forme de Seifert.

6. Nœuds de dimension 3

Les difficultés dans l'étude de la concordance des nœuds de dimension 3 viennent d'une part de la dimension des surfaces de Seifert, qui est 4, et d'autre part du fait que le théorème du h-cobordisme n'est valable que pour les variétés de dimension au moins 6. Mais nous allons voir qu'il est possible de caractériser les classes de concordance de certains de ces nœuds.

Dans tout ce paragraphe tous les nœuds sont de dimension 3.

Dans le cas des nœuds sphériques de dimension 3, J. Levine [**L2**] a démontré que les classes de concordance sont en bijection avec les classes de Witt-équivalence de formes bilinéaires entières A telles que la forme $A + A^T$ est unimodulaire et de signature un multiple de 16.

Les plongements de 3-variétés autres que des sphères se comportent de manières très différentes. En effet dans [**S6**] O. Saeki a construit des exemples de 3-nœuds fibrés qui sont des plongements de la même 3-variété et qui vérifient les propriétés suivantes

(1) les complémentaires des nœuds dans S^5 sont difféomorphes ;

(2) les formes de Seifert de ces nœuds sont isomorphes ;

(3) les nœuds ne sont pas isotopes.

Du fait que des formes bilinéaires entières isomorphes sont algébriquement concordantes, il est clair que le théorème 1 n'est pas vrai en dimension 3.

Exemple 6.1. *On peut aussi construire des* 3*-nœuds concordants et non isotopes. Soit N le nœud fibré sphérique qui a pour surface de Seifert F, l'adhérence d'une fibre, qui est difféomorphe à $(S^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2) \setminus \mathring{D}^4$ avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comme matrice pour la forme de Seifert dans la base notée a_1, a_2, a_3, a_4. Puisque A n'est pas isomorphe à la forme nulle, N n'est pas le nœud trivial. De plus le sous-module engendré par a_1 et a_3 est un métaboliseur de concordance pour A, du fait que N est un nœud sphérique. Maintenant, si l'on fait des chirurgies sur les cycles a_1 et a_3, représentés par deux sphères plongées dans F, le résultat sera un 4-disque dans D^6 qui a N comme bord. Ceci montre que N est concordant au nœud sphérique trivial.

Soit K un 3*-nœud fibré quelconque, qui n'est pas forcément sphérique. Les nœuds $K \# N$ et K ne sont pas isotopes parce que les rangs de leurs groupes d'homologie, en dimension* 2*, sur* **Z** *sont différents. Mais ils sont concordants car $K \times [0;1] \#_\partial D$ est* *difféomorphe à* $K \times [0;1]$ *avec* $K\#N \coprod -K$ *comme bord (on note* $\#_\partial$ *la somme connexe le long sur le bord).*

Comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe 2.3 (c.f. remarque 2.10), pour établir la concordance des 3-nœuds nous allons devoir utiliser des techniques spécifiques à la dimension des nœuds qui est 3 et à la dimension des surfaces de Seifert qui est 4. En particulier nous allons affiner la notion de concordance algébrique, puisque d'après le théorème 3 la concordance algébrique des formes de Seifert est une condition nécessaire à la concordance des nœuds de dimension 3.

Nous allons définir une nouvelle relation d'équivalence pour les formes de Seifert des 3-nœuds de manière à caractériser les classes de concordance des 3-nœuds fibrés simples.

Pour cela nous aurons besoin de la notion de structure spin sur les variétés. De manière générale une structure spin est une structure associée à un fibré vectoriel. Dans le cas d'une variété, cette structure est associée au fibré tangent de la variété.

DÉFINITION 6.2. *On appelle structure spin sur une variété la classe d'homotopie d'une trivialisation du fibré tangent, à cette variété, restreinte au* 2*-squelette.*

On peut définir les structures spin de différentes façons. En particulier il est souvent utile de voir une structure spin sur un fibré vectoriel comme une 1-classe de cohomologie, à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$, de ce fibré, telle que la restriction de cette classe à chaque fibre soit un générateur de la 1-cohomologie, à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$, de la fibre.

Une telle structure, sur une variété X, existe si et seulement si la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(X)$ s'annule. Et dans ce cas l'ensemble des structures spin est en bijection avec $H^1(X; \mathbf{Z}_2)$.

Soit K un 3-nœud orienté et soit F une surface de Seifert orientée de ce nœud. Alors K possède une 2-trivialisation $\nu = (\nu_1, \nu_1)$ dans S^5 de son fibré normal, telle que le champ de vecteurs ν_1 est le champ de vecteurs normal entrant dans F. La classe d'homotopie de cette 2-trivialisation ne dépend pas du choix de la surface de Seifert F.

De plus K possède aussi une 3-trivialisation de son 2-squelette telle qu'en la juxtaposant avec la 2-trivalisation du fibré normal on retrouve la trivialisation du fibré tangent de la sphère S^5 restreinte au 2-squelette de K

Donc K possède une structure spin naturelle unique à homotopie près. Cette structure spin coïncide alors avec celle induite par sa surface de Seifert, qui elle-même vient de la structure spin naturelle de S^5.

DÉFINITION 6.3. *Un* 3*-nœud* K *est dit libre si* $H_1(K)$ *est sans torsion sur* $\mathbf{Z}$*.*

Puisque Coker S^* est sans torsion dans le cas des nœuds libres, nous ne mentionnerons plus la condition (c.2) dans la définition de la concordance algébrique (c.f. Définition 2.6) qui est automatiquement vérifiée.

DÉFINITION 6.4. *Soient K_0 et K_1 deux 3-nœuds simples. Soient A_0 et A_1 les formes de Seifert pour K_0 et K_1 associées à des surfaces de Seifert 1-connexes. On dit que A_0 et A_1 sont spin concordantes s'il existe un difféomorphisme préservant l'orientation $h : K_0 \to K_1$ tel que*

(1) *h préserve les structures spin ;*
(2) *A_0 et A_1 sont algébriquement concordantes par rapport à $h_* : H_2(K_0) \to H_2(K_1)$ et $h_*|\mathrm{Tors}\, H_1(K_0) : \mathrm{Tors}\, H_1(K_0) \to \mathrm{Tors}\, H_1(K_1)$, où l'on identifie $H_2(K_i)$ et $H_1(K_i)$ avec $\mathrm{Ker}\, S_i^*$ et $\mathrm{Coker}\, S_i^*$ respectivement pour $i = 0, 1$.*

Lorsque les 3-nœuds K_0 et K_1 sont libres, l'isomorphisme $h_*|\mathrm{Tors}\, H_1(K_0)$ est trivial.

REMARQUE 6.5. *La spin concordance des formes de Seifert associées à des surfaces de Seifert 1-connexes est une relation d'équivalence.*

Remarquons que la concordance algébrique des formes de Seifert de 3-nœuds n'implique pas nécessairement leur spin concordance. En effet, soit $\mathcal{M} = S^1 \times \Sigma_g$ où Σ est la surface orientée compacte sans bord de genre $g \geq 2$. Soit K_1 et K_2 deux 3-nœuds libres fibrés simples, plongements de $\mathcal{M}$ construits comme dans [**S4**] proposition 3.8. Par construction leurs formes de Seifert sont isomorphes donc spin concordantes, mais du fait qu'il n'existe pas de difféomorphisme entre K_0 et K_1 qui préserve les structures spin, ces deux 3-nœuds ne sont pas spin concordants.

Dans [**7**] nous démontrons le théorème suivant

THÉORÈME 9 ([**7**]). *Deux 3-nœuds libres fibrés simples sont concordants si et seulement s'ils possèdent des formes de Seifert, associées à des fibres 1-connexes, qui sont spin concordantes.*

Dans ce théorème on se restreint aux 3-nœuds libres pour deux raisons. Tout d'abord parce que dans ce cas la concordance algébrique des formes de seifert est plus simple à utiliser. Ensuite, et surtout, à cause des fibres, qui sont des variétés de dimension 4. Les résultats que nous utiliserons sur la topologie des 4-variétés qui bordent des 3-variétés nécessitent de ne pas avoir de torsion en homologie de dimension 1.

6.1. La spin concordance une condition nécessaire de concordance.

Dans ce paragraphe nous allons voir pourquoi la spin concordance est une condition nécessaire de concordance pour tous les 3-nœuds fibrés simples, et pas seulement pour ceux qui sont libres.

Soient K_0 et K_1 deux 3-nœuds fibrés simples concordants. Notons F_0 et F_1 leurs fibres 1-connexes, et par A_0 et A_1 les formes de Seifert associées. D'après [**2**], les formes A_0 et A_1 sont algébriquement concordantes, et le métaboliseur M pour $A_0 \oplus -A_1$ est construit comme dans le cas général des nœuds de dimension $2n-1$ (c.f. §2.4).

En prenant une 2-trivialisation du fibré normal de C dans $\mathcal{S}$ induit par le champ de vecteur normal entrant à $N = \partial W$ dans W, il est clair que le difféomorphisme h, entre K_0 et K_1, induit par C préserve les structures spin.

De plus, dans [**2**], nous avons établi que A_0 et A_1 sont algébriquement concordantes par rapport à $h_* : H_2(K_0) \to H_2(K_1)$ et $h_*|\mathrm{Tors}\, H_1(K_0) : \mathrm{Tors}\, H_1(K_0) \to \mathrm{Tors}\, H_1(K_1)$; ceci à cause de l'unimodularité de A_0 et de A_1.

Ainsi, nous avons démontré que la spin concordance est nécessaire pour la concordance des 3-nœuds fibrés simples qui ne sont pas nécessairement libres.

PROPOSITION 10 ([**7**]). *Si deux 3-nœuds fibrés simples sont concordants, alors les formes de Seifert de ces nœuds associées à des fibres simplement connexes sont spin concordantes.*

6.2. La spin concordance une condition suffisante de concordance.

Nous allons maintenant voir que la spin concordance des formes de Seifert est une condition suffisante de concordance pour les nœuds libres et simples qui ne sont pas nécessairement fibrés.

Soient K_0 et K_1 deux 3-nœuds libres et simples munis de formes de Seifert A_0 et A_1, associées à des surfaces de Seifert 1-connexes notées F_0 et F_1 respectivement. Supposons que A_0 et A_1 sont spin concordantes et soit M un métaboliseur de concordance et $h : K_0 \to K_1$ un difféomorphisme donnant la spin concordance. Notons $F = F_0 \natural (-F_1)$ et $V = (K_0 \setminus \mathrm{Int}\, D^3) \times [0,1]$, où "$\natural$" veut dire somme connexe sur le bord. Remarquons que $\partial F = K_0 \sharp (-K_1)$ et $\partial V = K_0 \sharp (-K_0)$, où "$\sharp$" veut dire somme connexe usuelle (c.f. Fig. 8 et Fig. 9).

La 4-variété compacte V est spin, avec une structure spin induite par K_0.

Dans la suite une *chirurgie spin* le long d'une courbe fermée simple c dans une 4-variété spin est une modification qui consiste à ôter le voisinage tubulaire de $N(c) \cong S^1 \times D^3$ de c, et de le remplacer par $D^2 \times S^2$ en recollant le long des bords. Le résultat est alors une 4-variété spin, dont la structure spin à l'extérieur de c coïncide avec celle sur la variété de départ.

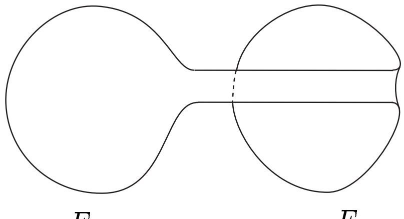

FIG. 8. $F = F_0\natural(-F_1)$

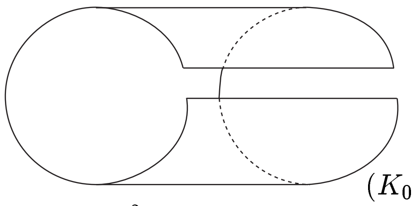

FIG. 9. $V = (K_0 \setminus \mathrm{Int}D^3) \times [0,1]$

En utilisant les méthodes de S. Boyer [**Bo**] et le théorème de h-cobordisme stable de T. Lawson [**La**] et S. Quinn[**Q**], on démontre que pour certains entiers $k \geq 0$, il existe une 4-variété compacte $\widetilde{V}$ et un difféomorphisme $\tilde{h} : F\sharp k(S^2 \times S^2) \to \widetilde{V}$ tels que

(1) $\widetilde{V}$ est obtenue à partir de V par des chirurgies spin le long de courbes simples fermées ;
(2) $\tilde{h}|\partial(F\sharp k(S^2 \times S^2)) = \mathrm{id}_{K_0}\sharp h^{-1} : K_0\sharp(-K_1) \to K_0\sharp(-K_0)$.

Remarquons que c'est pour s'assurer de pouvoir utiliser ces résultats que les nœuds sont supposés libres.

On peut construire $F_0\sharp(-F_1)\sharp k(S^2 \times S^2)$ en recollant $D^3 \times [0,1]$ sur $F\sharp k(S^2 \times S^2)$ le long de $\partial D^3 \times [0,1]$. De même on construit une variété, notée $\widetilde{V'}$, en recollant $D^3 \times [0,1]$ sur $\widetilde{V}$ le long de $\partial D^3 \times [0,1]$ c.f. Fig. 8 et Fig. 9. Ceci prouve que pour certains entiers $k \geq 0$, il existe une 4-variété compacte $\widetilde{V'}$ et un difféomorphisme $\tilde{h}' : F_0\sharp(-F_1)\sharp k(S^2 \times S^2) \to \widetilde{V'}$ tels que

(1) $\widetilde{V'}$ est obtenue à partir de $V' = K_0 \times [0,1]$ par des chirurgies spin le long de courbes simples ;
(2) $\tilde{h'}|\partial(F_0\sharp(-F_1)\sharp k(S^2 \times S^2)) = \mathrm{id}_{K_0} \coprod h^{-1} : K_0 \coprod(-K_1) \to K_0 \coprod(-K_0)$.

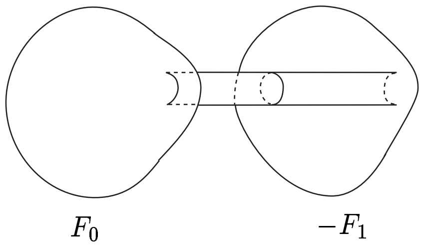

FIG. 10. $F_0\sharp(-F_1)$

La variété $\widetilde{V'}$ que l'on vient de construire a été obtenue à partir de $K_0 \times [0,1]$ par des chirurgies spin. Lors de cette construction de $\widetilde{V'}$ on choisit les courbes fermées simples c_i avec $1 \leq i \leq r$, sur lesquelles on fait les chirurgies spin qui annulent le $\mathrm{H}_1(V)$, à l'intérieur de $(K_0 \setminus \overset{\circ}{D^3}) \times \{1/2\}$. À chaque produit $D^2 \times S^2$ utilisé pour remplacer le voisinage tubulaire de c_i correspond une 2-sphères $\Sigma_i = \{0\} \times S^2$ plongées dans $\widetilde{V'}$. Ces sphères Σ_i avec $1 \leq i \leq r$ sont homologues au bord d'un 3-disque méridien à c_i.

De même il existe des 2-sphères Σ_i, avec $r+1 \leq i \leq r+s$, plongées dans $\widetilde{V'}$ qui correspondent aux autres chirurgies spin nécessaires à la construction de $\widetilde{V'}$. Du fait que pour ces dernières on a effectué les chirurgies spin sur des courbes nulles homologues, ces sphères représentent des classes d'homologies qui ont des duaux pour S dans $\mathrm{H}_2(\widetilde{V'})$.

Ensuite, on montre l'existence d'un difféomorphisme φ de $F_0\sharp(-F_1)\sharp k(S^2 \times S^2)$ sur elle-même tel que

- φ préserve l'orientation et qui est l'identité sur le bord ;
- le morphisme φ_* induit en homologie par φ est une isométrie pour S sur $\mathrm{H}_2(F_0\sharp(-F_1)\sharp k(S^2 \times S^2))$;
- la restriction de φ_* à $\mathrm{Ker} S^*$ est égale à l'identité ;
- les 2-sphères $\varphi(\Sigma_1), \varphi(\Sigma_2), \ldots, \varphi(\Sigma_{r+s})$ de $F_0\sharp(-F_1)\sharp k(S^2 \times S^2)$ représentent des classes d'homologies qui engendrent le métaboliseur M.

Pour construire le tube de concordance, il ne reste maintenant plus qu'à effectuer des chirurgies spin sur les sphères Σ_i dans $\mathcal{S} = S^5 \times [0,1]$. Ce processus est en fait l'opération inverse des chirurgies spin faites pour construire $\widetilde{V'}$, au difféomorphisme φ

près. La 4-variété qui en résulte est donc difféomorphe à $K_0 \times [0,1]$, et est plongée dans $\mathcal{S}$. Finalement K_0 et K_1 sont concordants.

Avec la construction proposée ci-dessus on démontre le théorème suivant

THÉORÈME 11 ([**7**]). *Deux 3-nœuds simples et libres qui possèdent des formes de Seifert, associées à des surfaces de Seifert simplement connexes, spin concordantes sont concordants.*

REMARQUE 6.6. *Bien que nous ayons déjà vu que la concordance algébrique n'implique pas nécessairement la spin concordance, remarquons que les théorèmes 9 et 11 ne sont toujours pas vrais si l'on remplace la spin concordance par la concordance des formes de Seifert en imposant que les 3-nœuds sont abstraitement difféomorphes. En effet on peut construire des 3-nœuds qui sont des plongements d'un fibré en cercles sur une surface compacte de genre supérieur à 2 qui ont des formes de Seifert isomorphes, mais tels qu'il n'existe pas de difféomorphisme entre ces nœuds qui préserve les structures spins (c.f.* [**7**] *exemples 7.1 et 7.2).*

7. Nœuds de dimension paire

Dans le cas des plongements de variétés de dimension paire, il convient de décider ce que l'on va appeler nœud.

DÉFINITION 7.1. *On appelle* $2n$*-nœud l'image du plongement d'une* $2n$*-variété, compacte, orientée et* $(n-1)$*-connexe dans une sphère de dimension* $2n+2$*.*

M. Kervaire a montré que les nœuds sphériques de dimension paire sont concordants en utilisant la structure de groupe sur les classes de concordance. Nous utilisons une construction identique à celle mise en place pour démontrer le théorème 1 pour démontrer le théorème suivant

THÉORÈME 12. [**8**] *Soit* $n \geq 3$*. Tous les* $2n$*-nœuds abstraitement difféomorphes à la même variété sont concordants.*

Soient K_0 et K_1 deux $2n$-nœuds qui sont les plongements de la même variété dans S^{2n+2}. Notons F_0 et F_1 des surfaces de Seifert associées à ces nœuds. Supposons K_0 (resp. $-K_1$) plongé dans la sphère $S^{2n+2} \times \{0\}$ (resp. $S^{2n+2} \times \{1\}$) qui sont les bords orientés de $S^{2n+2} \times [0,1]$. Soit x dans $S^{2n+2} \times \{0\}$ tel que $(x \times [0,1]) \cap (F_0 \coprod -F_1)$ est vide et soit U une petite boule ouverte centrée en x dans $S^{2n+2} \times \{0\}$. Le bord S du disque $D = (S^{2n+2} \times [0,1]) \setminus (U \times [0,1])$ contient $F_0 \coprod -F_1$. Notons F la somme connexe dans S, de F_0 et de F_1.

La suite exacte longue associée au couple (F, K_0) est

$$0 \to \mathrm{H}_{n+1}(F) \to \mathrm{H}_{n+1}(F, K_0) \to \mathrm{H}_n(K_0) \to \mathrm{H}_n(F) \to \mathrm{H}_n(F, K_0) \to 0$$

D'après [**M1**] on peut réaliser des chirurgies plongées sur F dans D pour obtenir une nouvelle variété $(n-1)$-connexe $\tilde{F}$ telle que $\mathrm{H}_n(\tilde{F}, K_0) = 0$.

En utilisant des arguments de dualité et des calculs de rangs dans les suites exactes, on montre que $\mathrm{H}_{n+1}(\tilde{F}, K_0) = 0$. Donc $\mathrm{H}_*(\tilde{F}, K_0) = 0$ et en appliquant le théorème du h-cobordisme, on obtient que $\tilde{F}$ est un tube de concordance.

8. Plongements de $S^1 \times S^1$ dans S^4

Dans [**K1**] M. Kervaire a démontré que tout plongement de S^2 dans S^4 est le bord d'un disque plongé dans D^5, ce résultat se généralise en

Théorème 13. [**9**] *Tout $S^1 \times S^1$ plongé dans $S^4 = \partial(D^5)$ est le bord d'un $S^1 \times D^2$ plongé dans D^5.*

Pour démontrer ce résultat, on utilise une 3-variété orientable M qui est plongée dans S^4 et telle que $\partial M = S^1 \times S^1 \hookrightarrow D^4$. Cette variété M existe par des arguments classiques de théorie d'obstruction,

Ensuite, on modifie cette variété M par des chirurgies plongées dans D^5 de manière à obtenir un $S^1 \times D^2$ de bord le plongement de $S^1 \times S^1$ donné au départ.

Appelons W la 3-variété compacte sans bord obtenue en recollant un $S^1 \times D^2$ à M le long de son bord. D'après [**Kap**] W est le bord d'une 4-variété parallélisable que nous noterons $\tilde{W}$, et de plus la variété $\tilde{W}$ est obtenue par attachement d'anses d'indices 2 et 4 uniquement.

La décompositions en anses de la 4-variété $\tilde{W}$ peut s'écrire alors

$$\tilde{W} = W \times [0;1] + \sum_j (\varphi_j^2) + (\varphi^4)$$

où (φ^l) désigne une anse d'indice l.

À des glissements d'anses près, on peut supposer que les lieux d'attachements des anses d'indice 2 ne rencontrent pas le $S^1 \times D^2$ ajouté à M pour construire W. En effet ces lieux d'attachement sont des $S^1 \times D^2$ de W, il suffit de modifier ces plongements de manière à ce qu'ils ne rencontre pas le $S^1 \times D^2$ ajouté à M pour construire W. Ceci est toujours possible car cela revient à séparer deux plongements de S^1 dans M qui est de dimension trois. On peut alors considérer la 4-variété suivante

$$\tilde{M} = M \times [0;1] + \sum_j (\varphi_j^2)$$

Comme nous avons supprimé l'anse d'indice 4, le bord de $\tilde{M}$ est constitué de $M \times \{0\} \cup \partial(M) \times [0;1] \cup X$ où X est un S^3, qui correspond au lieu d'attachement de l'anse d'indice 4, privé d'un $S^1 \times D^2 = T$.

À un attachement d'anse sur $M \times [0;1]$ correspond une chirurgie sur la 3-variété M.

En utilisant les arguments de [**M2**] on montre que l'on peut effectuer les chirurugies plongées dans D^5 correspondant à aux attachements d'anses d'indices 2.

Le résultat de ces modifications par chirurugies plongées sur M dans D^5 est un plongement de X dans D^5, qui a pour bord le $S^1 \times S^1$ de départ. Comme X a le type d'homotopie du complementaire de $T = S^1 \times D^2$ dans S^3, faisons maintenant une chirurgie plongée dans D^5 sur un $\sigma = S^1$, trivialement plongé dans X, méridien de T. Cette opération rend nuls-homotopes tous les éléments de $\pi_1(X)$ sauf ceux qui enlacent σ. On obtient alors est une variété M' telle que $\pi_1(M') = \mathbf{Z}$, et donc qui a le type d'homotopie de $S^1 \times D^2$.

La 3-variété M' de bord $S^1 \times S^1$ est donc décomposable en la somme connexe d'un $S^1 \times D^2$ et de sphères d'homotopie $\mathcal{S}_i$.

Faisons de nouvelles chirurgies plongée dans D^5 de manière à séparer les sphères d'homotopie $\mathcal{S}_i$, du plongement de $S^1 \times D^2$.

Pour cela il suffit de voir que l'on peut séparer la somme connexe d'une 3-variété M et d'une sphère d'homotopie $\mathcal{S}$ dans D^5, par une chirurgie plongée dans D^5.

Comme une somme connexe de deux 3-variétés est faite en enlevant un 3-disque à chaque variété et en recollant par un $S^2 \times D^1$ le long des deux bords créés. Dans notre cas cela revient à enlever un 3-disque, de M, et à recoller le long du bord $\Sigma = S^2$ un faux disque $\Delta = \mathcal{S} \setminus D^3$. Le voisinage tubulaire de Δ dans D^5 est une variété $\mathcal{D}$ homéomorphe à un 5-disque, de bord une variété homéomorphe à une 4-sphère.

Le résultat de M. Kervaire [**K1**] cité au début reste valable si l'on plonge des sphères dans une sphère d'homotopie en codimension 2, on peut donc trouver un 3-disque plongé dans $\mathcal{D}$ de bord Σ. Comme $\Sigma \cap M \setminus (M \cap \mathcal{D})$ on peut faire une chirurgie plongée dans D^5 qui permet de passer de $M \# \mathcal{S}$ à M.

Finalement dans le cas de M' on peut supprimer les sommes connexes avec des sphères d'homotopie dans D^5, ainsi le $S^1 \times S^1$ de départ est le bord d'un $S^1 \times D^2$ plongé dans D^5.

9. Programme

9.1. Développements récents.

– Avec O. Saeki nous avons étendu les résultats de [**9**] aux cas de plongements de surfaces orientables dans S^4, nous avons ainsi pu établir une généralisation du théorème de M. Kervaire qui dit que tous les nœuds sphériques sont concordants.

THÉORÈME 14. [**11**] *Soient M_1 et M_2 deux surfaces orientables, fermées et connexes plongées dans S^4, qui ont le même genre. Alors ces deux surfaces sont concordantes.*

– Avec F. Michel [**10**] nous avons montré une relation de Fox-Milnor pour les entrelacs de S^3 qui sont le bord d'une surface, dans B^4, d'une surface de caractéristique d'Euler 1.

9.2. Perspectives à venir.

– Dans [**Ma**], Y. Matsumoto généralise les groupes de cobordisme des nœuds, de plus il ramène l'étude de la concordance des nœuds à la détermination de groupes de groupes abéliens (qui jouent le rôle de groupes d'obstruction).

L'approche de Y. Matsumuto laisse penser que les groupes qu'il a définis permettent de décrirent la concordance des nœuds non sphériques. Plus précisément on peut espérer decrire certaines classes de concordances de nœuds comme des sommes connexes avec des nœud sphériques.

– Les classes d'isotopies dans une classe de concordance donnée ne sont pas connues. Mais comme il est facile de construire des nœuds concordants et non isotopes a l'aide de sommes connexes avec des nœuds sphériques slices. Il est envisageable de définir des classes de nœuds pour lesquels les notions de concordance et d'isotopie coïncident.

– Dans l'article de T. Cochran, K. Orr et P. Teichner [**C-O-T**] ces auteurs étudient les classes de concordances des nœuds de dimension un. Les techniques de chirurgie sont remplacées par l'utilisation de tours de Whitney. Les auteurs construisent à l'aide de cette technique des nœuds de dimension 1 qui ne sont pas slices mais qui ne sont pas distingués d'un nœud slice par les invariants connus actuellement.

Cela laisse de nouvelles persepectives d'étude de la concordance dans le cas des nœuds de dimension 1.

10. Annexe

Dans cette section nous allons voir comment la topologie des variétés de dimension 3 peut permettre de proposer des méthodes observationnelles visant à déterminer si le groupe fondamental de l'univers dans lequel nous vivons est non trivial.

10.1. Approche mathématique. Notons X une 3-variété qui est soit la sphère de dimension 3, soit l'espace euclidien de dimension 3, soit l'espace hyperbolique de dimension 3.

On obtient une 3-variété complète en quotientant X par un sous-groupe discret de son groupe d'isométries, de plus le groupe fondamental de cette variété est alors isomorphe au sous-groupe choisi. On construit un revêtement M de ce quotient en recollant des copies du domaine de Dirichlet le long des faces du polyèdre défini par ce domaine.

Nous allons supposer que l'univers dans lequel nous vivons possède un groupe fondamental non trivial et peut être modélisé comme ci-dessus. Il est alors envisageable de pouvoir prouver que la topologie de l'univers est non triviale (i.e. un groupe fondamental non trivial) par des méthodes observationnelles.

10.2. Approche observationnelle. Supposons le polyèdre fondamental de la variété qui représente notre univers est assez petit par rapport à la taille de notre univers. Dans ce cas si l'on représente les limites observables de notre univers par une sphère, certains points de cette sphère doivent être identifiés. En effet comme nous avons supposé que le rayon de cette sphère est suffisamment grand pour qu'elle contienne tout un polyèdre fondamental, alors dans le revêtement les copies de cette sphère ont une intersection non vide (c.f. Fig.11). Comme ces intersections sont des cercles, un observateur doit pouvoir identifier des cercles, sur la limite observable de l'univers, en regardant dans des directions différentes.

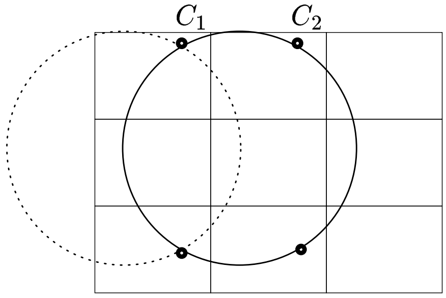

FIG. 11. Identification des cercles C_1 et C_2

N.J. Cornish, D.N. Spergel et G.D. Starkman [**C-S-S**] ont proposé de mesurer les fluctuations thermiques du fond cosmologique diffus. En effet le fond cosmologique représente la limite observable de notre univers, et peut être modélisé par une sphère en expansion. Donc si la topologie de l'univers est non triviale, alors des cercles devraient être identifiés sur le fond cosmologique diffus.

En mesurant les fluctuations de température on peut espérer trouver différentes directions d'observation pour lesquelles les fluctuations sont identiques sur des cercles. Les satellites, comme COBE, qui ont pour mission de mesurer les fluctuations thermiques du fond cosmologique diffus n'ont pas encore une résolution suffisante pour pouvoir conclure.

Une autre méthode observationelle proposée dans [**5**] est basée sur le fait que si la topologie de l'univers est non triviale alors on doit pouvoir observer le même objet dans plusieurs directions. Sur la figure 12, l'observateur situé en O, observe le même objet P dans des directions différentes.

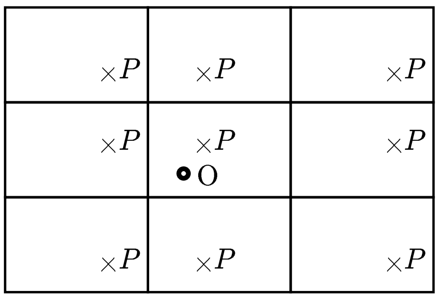

FIG. 12. Une image multiple d'un même objet P

Cette constatation élémentaire pose toutefois quelques problèmes. En effet du fait que la vitesse de la lumière est finie, l'image d'un même objet dans des directions différentes peut avoir des aspects bien différents, voire même totalement différents. Il est alors impossible d'identifier des images multiples du même objet dans des directions différentes.

Un première solution pour pallier à ce problème consiste à trouver soit des sources lumineuses qui restent identifiables même à des âges très différents comme les quasars.

Un seconde, comme décrit dans [**5**], consiste à observer non pas des sources lumineuses mais des configurations de sources lumineuses qui restent stables, à isométrie près, dans le temps. En cataloguant les configurations qui sont les mêmes à isométrie près on peut espérer trouver, non plus un objet mais une configuration d'objets astronomiques observables dans des directions différentes. Cette méthode a encore besoin d'avoir des catalogues d'objets cosmiques beaucoup plus précis que ceux dont nous disposons actuellement pour donner des réultats. Mais du fait que des projets de cartographie du ciel sont en cours on peut espérer mettre en œuvre cette méthode dans les années à venir.

Bibliographie

[A] N. A'Campo, *Le nombre de Lefschetz d'une monodromie*, Indag. Math **36** (1973), 113–118.

[Al] J.W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275–306.

[1] V. Blanlœil, *Cobordisme des entrelacs fibrés simples et forme de Seifert*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **t. 320** série I (1995), 985–988.

[2] V. Blanlœil et F. Michel, *A theory of cobordism for non-spherical links*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), 30–51.

[3] V. Blanlœil, *Cobordism of non-spherical links*, International Mathematics Research Notices **2** (1998), 117–121.

[4] V. Blanlœil, *Cobordisme des entrelacs*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **7** (1998), 185–205.

[5] V. Blanlœil et B. Roukema, *Three-dimensional topology-independent method to look for global topology*, Classical Quantum Gravity 15 (1998), 2645–2655.

[6] V. Blanlœil, *Cobordism of non-spherical knots*, Advanced Studies in Pure Mathematics (6) **29** (2000), 21–30.

[7] V. Blanlœil et O. Saeki, *A theory of concordance for non-spherical 3-knots*, Trans. A.M.S. vol 354 **10** (2002), 3955–3971.

[8] V. Blanlœil, *Concordance of* $2n$*-dimensional knots*, preprint.

[9] V. Blanlœil, *Tout plongement de* $S^1 \times S^1$ *dans* S^4 *est le bord d'un* $S^1 \times D^2$ *plongé dans* D^5, preprint.

[10] V. Blanlœil et F. Michel, *Entrelacs bords d'une surface de caractéristique d'Euler un*, en préparation.

[11] V. Blanlœil et O. Saeki, *Concordance des surfaces plongées dans* S^4, en préparation.

[12] V. Blanlœil, *Minimally embedded knots*, en préparation.

[B-K] E. Brieskorn et H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser 1986.

[Bo] S. Boyer, *Simply-connected* 4*-manifolds with a given boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 331–357.

[Br] W. Browder, *Surgery on Simply-connected Manifolds*, Erger. Math. 65 Springer, 1972.

[Bu] W. Burau, *Kennzeichnung der Schlauchknoten*, Abh. Math. Sem. Hamburg, **9** (1932), 125–133.

[C-R-R] S. Cappell, A. Ranicki et J. Rosenberg *Surveys on Surgery Theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, **145** vol. 1, 2000.

[C-O-T] T.D. Cochran, K.E. Orr et P. Teichner, *Knot concordance, Whitney towers and L^2-signatures*, Preprint (2002).

[C-S-S] N.J. Cornish, D.N. Sperger et G.D. Starkman, *Circles in the sky : finding topology with the microwawe background radiation*, Classical Quantum Gravity 15 (1998), 2657–2670.

[DB-M] P. Du Bois and F. Michel, *Cobordism of algebraic knots via Seifert forms*, Invent. Math. **111** (1993), 151–169.

[D1] A. Durfee, *Fibered knots and algebraic singularities*, Topology **13** (1974), 47–59.

[D2] A. Durfee, *Bilinear and Quadratic Forms on Torsion Modules*, Topology **13** (1974), 47–59.

[F-C] R. Fox et R. Crowell, *Introduction to knot theory* , Ginn, 1966.

[F-M] R. Fox et J. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-spaces and Cobordism of Knots*, Osaka J. Math. **3** (1966), 257–267.

[H] J.C.. Hausmann (Ed.), *Knot Theory*, Lecture Notes in Mathematics **685** 1977.

[Ha1] A. Haefliger, *Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} with $q > 2$.*, Annals of Math. **83** (1966), 402–436.

[Ha2] A. Haefliger, *Enlacements de sphères en codimension supérieure à* 2, Comment. Math ; Helv. **41** (1966), 51–72.

[Hil] J. A. Hillman, *Simple locally flat* 3*-knots*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 599–602.

[Hir] M. Hirsh, *Embeddings and compressions of polyhedra and smooth manifold*, Topology **4** (1966), 361–369.

[Kap] S. Kaplan, *Constructing framed* 4*-manifolds with given almost framed boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc. **254** (1979), 237–263.

[Kau] L. Kauffman, *Branched coverings, open books and knot periodicity*, Topology **13** (1974), 143–160.

[Kaw] A. Kawauchi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser 1996.

[Ke] C. Kearton, *Some non-fibred* 3*-knots*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 365–367.

[K-M] M. Kervaire et J. Milnor, *Groups of homotopy spheres*, Ann. of Math. **77** (1963), 504–537.

[K1] M. Kervaire, *Les nœuds de dimensions supérieures*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 225–271.

[K2] M. Kervaire, *Knot cobordism in codimension two*, Manifolds–Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School), Lecture Notes in Math. **197** (1971), Springer, Berlin, pp. 83–105.

[L-L] J. Lannes et F. Latour, *Forme quadratique d'enlacement et applications*, Société Mathématique de France Astérisque **26** 1975.

[La] T. Lawson, *Trivializing* 5*-dimensional h-cobordisms by stabilization*, Manuscripta Math. **29** (1979), 305–321.

[Le1] D. T. Lê, *Sur les noeuds algébriques* Compos. Math. **25** (1972), 281–321.

[Le2] D. T. Lê, *Un critère d'équisingularité* C. R. Acad. Sci. Paris **272** (1971), 138–140.

[L1] J. Levine, *A classification of differentiable knots*, Ann. of Maths **82** (1965), 15–50.

[L2] J. Levine, *Knot cobordism groups in codimension two*, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 229–244.

[L3] J. Levine, *An algebraic classification of some knots of codimension two*, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 185–198.

[Ma] Y. Matsumoto, *Knot cobordism and surgery in codimension two*, J. Fac. Sci. Tokyo IA**20** (1973), 253–317.

[M-W] F. Michel et C.Weber, *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*, Université de Genève, 1985.

[M-H] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Ergebnisse Math., Band 73, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[M1] J. Milnor, *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics A.M.S. **t.3** (1961), 39–55.

[M2] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism Theorem*, Princeton Mathematical Notes, Princeton U. Press, 1965.

[M3] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Math. Studies **61**, 1968.

[P] U. Pinkall, *Regular homotopy classes of immersed surfaces*, Topology **24** (1985), 421–434.

[Q] F. Quinn, *The stable topology of* 4*-manifolds*, Topology Appl. **15** (1983), 71–77.

[Ra] A. Ranicki, *High-dimensional Knot Theory*, Springer Monographs in Mathematics 1998.

[R1] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lectures Series **7**, Publish or Perish 1976.

[R2] D. Rolfsen (Ed.), *Knot Theory and Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **1144** 1983.

[Sa] K. Sakamoto, *The Seifert Matrices of Milnor Fiberings defined by Holomorphic Functions*, J. Math. Soc. Japan, **26** (4) (1974), 714–721

[S1] O. Saeki, *On simple fibered 3-knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 587–601.

[S2] O. Saeki, *Knotted homology 3-spheres in S^5*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 65–75.

[S3] O. Saeki, *Cobordism classification of knotted homology 3-spheres in S^5*, Osaka J. Math. **25** (1988), 213–222.

[S4] O. Saeki, *Theory of fibered 3-knots in S^5 and its applications*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6** (1999), 691–756.

[S5] O. Saeki, *On punctured 3-manifolds in 5-sphere*, Hiroshima Math. J. **29** (1999), 255–272.

[S6] O. Saeki, *Theory of fibered 3-knots in S^5 and its applications*, Hiroshima Math. J. **29** (1999), 255–272.

[S-S-T] O. Saeki, A. Szűcz, and M. Takase, *Regular homotopy classes of immersions of 3-manifolds into 5-space*, preprint, 2000.

[Se] H. Seifert, *Über das Geschecht von Knoten*, Math. Ann **110** (1934), 571–592.

[Sta] J. Stallings, *On topologically unknotted spheres*, Ann. of Maths. **77**, (1963), 490–503.

[Sto] N. Stoltzfus, *Unraveling the integral knot concordance groupe*, Memoirs of the A.M.S. **192**, 1977.

[W1] C. T. C. Wall, *Diffeomorphisms of 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 131–140.

[W2] C. T. C. Wall, *On simply-connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 141–149.

[We] C. Weber (Ed.), *Nœuds, tresses et singularités*, Monographie de l'enseignement mathématique, Genève 1983.

[Wh] H. Whitney, *The Self-Intersection of a Smooth n-Manifold in $2n$-Spaces*, Annals of Math. **45** (1944), 220–246.

[Za] O. Zariski, *On the topology of algebroide singularities* Amer. J. Math. **54** (1932), 453–465.

[Ze] E. C. Zeeman, *Unkontting combinatorial balls*, Ann. of Maths **78** (1963), 501–526.

Table des matières

Avant-propos 1

1. Concordance des nœuds sphériques 2
   Formes de Seifert 4
2. Singularités, nœuds fibrés simples 7
   Singularités isolées d'hypersurfaces complexes 7
   Classification des nœuds fibrés simples à concordances près 8
   Concordance algébrique 10
   La concordance algébrique, une condition nécessaire de condordance 11
   La concordance algébrique, une condition suffisante de condordance 13
3. Polynôme d'Alexander 15
4. Exemples non sphériques 17
5. Nœuds fibrés 19
6. Nœuds de dimension 3 20
   La spin concordance une condition nécessaire de concordance 22
   La spin concordance une condition suffisante de concordance 23
7. Nœuds de dimension paire 27
8. Plongements de $S^1 \times S^1$ dans S^4 28
9. Programme 30
10. Annexe 31

Bibliographie 35