Singularités à l'infini et fibres irrégulières des polynômes complexes

Arnaud Bodin

Exposé présenté lors de la 67$^{\text{ème}}$ RCP
à Strasbourg le 24 novembre 2000

Introduction

Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme réduit, la théorie locale de Milnor affirme que l'entrelacs local d'une singularité détermine le type topologique du germe de la courbe au point singulier. Nous discutons ici de la théorie globale de f. Un contre-exemple de E. Artal prouve que l'entrelacs à l'infini ne détermine pas la topologie de f. Cependant dans le cas où l'ensemble de bifurcation est réduit à un seul élément, nous prouvons que l'entrelacs à l'infini pour la valeur critique détermine la topologie de f. En fait nous dressons la liste (non redondante), à équivalence topologique près, des polynômes ayant une seule valeur critique. Dans le cas où l'ensemble de bifurcation $\mathcal{B}$ n'est plus réduit à un singleton, nous étudions la topologie de f au voisinage de chacune des fibres irrégulière. En particulier nous montrons que le morphisme induit en homologie par l'inclusion de la fibre $f^{-1}(c)$ dans un voisinage tubulaire de cette fibre est un isomorphisme si et seulement si la valeur c n'est pas une valeur critique à l'infini. En plus nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que ce morphisme soit injectif. Nous étudions enfin la monodromie globale induite par l'action de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{B})$ sur l'homologie de la fibre générique. L'objectif étant d'obtenir une base (fixe) dans laquelle on sait écrire toutes les matrices des monodromies associées à un lacet élémentaire autour d'une valeur critique. À l'aide des cycles évanescents et des cycles invariants, nous avons une base dans laquelle nous obtenons une description partielle des matrices de monodromie. Pour plus de détails, pour les démonstrations et pour une bibliographie plus complète vous pouvez consulter [Bo$^{20}_{00}$], [Bo'$^{20}_{00}$] et [Bo"$^{20}_{00}$].

1 Singularités locales

Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme réduit. Le point $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ est un *point singulier affine* si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Par changement de variable nous supposons que $(0,0)$ est un point singulier affine et que $f(0,0) = 0$. L'*entrelacs local* est l'entrelacs obtenu en intersectant la fibre $f^{-1}(0)$ avec une sphère S^3_ε de dimension 3, de rayon $0 < \varepsilon \ll 1$, centrée en l'origine :

$$K_0^{\text{loc}} = f^{-1}(0) \cap S^3_\varepsilon.$$

Le type d'isotopie de l'entrelacs K_0^{loc} ne dépend pas de ε suffisamment petit. L'étude locale est due à J. Milnor [Mi68].

Théorème 1 (Milnor). Soit f, g deux polynômes réduits tels que $f(0,0) = 0 = g(0,0)$ et $0 < \varepsilon, \varepsilon' \ll 1$. Alors les couples $(B^4_\varepsilon, f^{-1}(0) \cap B^4_\varepsilon)$ et $(B^4_{\varepsilon'}, g^{-1}(0) \cap B^4_{\varepsilon'})$ sont homéomorphes si et seulement si les entrelacs $f^{-1}(0) \cap S^3_\varepsilon$ et $g^{-1}(0) \cap S^3_{\varepsilon'}$ sont isotopes.

Exemple 2. Soit $f(x,y) = x^7 - y^2$. Alors l'entrelacs local est un nœud torique de type $(7,2)$. Comme l'entrelacs local de $g(x,y) = x^7 - y^2 + y^3$ est le même entrelacs alors la courbe $g^{-1}(0)$ est équivalente en $(0,0)$ à la courbe $f^{-1}(0)$.

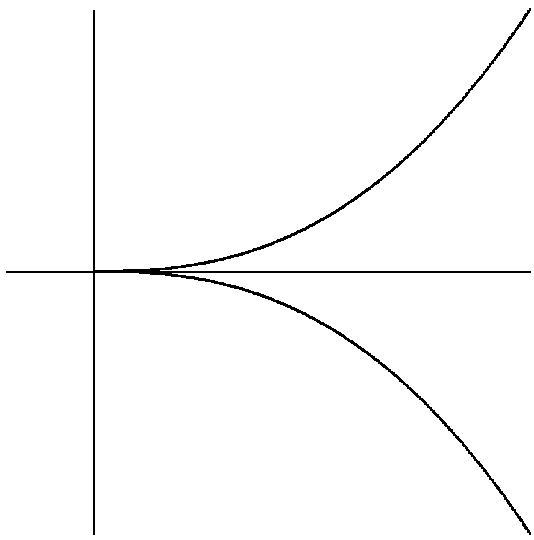

Fig. 1 – Singularité locale de $f(x,y) = x^7 - y^2$.

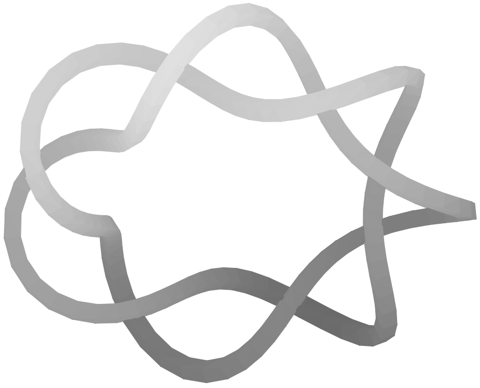

Fig. 2 – Nœud local de la singularité de $f(x,y) = x^7 - y^2$.

2 Topologie globale des polynômes

L'étude locale nous amène à nous poser la question : quels sont les invariants combinatoires qui déterminent la topologie du polynôme f ?
Pour pouvoir répondre à la question initiale, définissons l'*ensemble de bifurcation* $\mathcal{B}$ comme l'ensemble minimal de points de $\mathbb{C}$ tels que $f : f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$ soit une fibration localement triviale. L'ensemble $\mathcal{B}$ contient les *valeurs critiques affines* :

$$\mathcal{B}_{\text{aff}} = \Big\{ f(x,y) \mid \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Big\}.$$

Cependant l'ensemble $\mathcal{B}$ n'est pas composé seulement de $\mathcal{B}_{\text{aff}}$. En fait d'après une étude de Hà et Lê l'ensemble $\mathcal{B}$ est :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{aff}} \cup \mathcal{B}_{\infty}.$$

Nous devons définir $\mathcal{B}_{\infty}$. La valeur c est *régulière à l'infini* s'il existe un disque D centré en c et un compact C tel que $f : f^{-1}(D) \setminus C \longrightarrow D$ soit une fibration. L'ensemble des *valeurs critiques à l'infini* forme $\mathcal{B}_{\infty}$.
La fibre $F_c = f^{-1}(c)$ est une *fibre irrégulière* si $c \in \mathcal{B}$. Si $s \notin \mathcal{B}$ la *fibre générique* $f^{-1}(s)$ est notée F_{gen}. Comme dans le cas local, nous associons à une fibre un entrelacs. L'*entrelacs à l'infini* de la fibre c est

$$K_c^{\infty} = f^{-1}(c) \cap S_R^3,$$

où $R \gg 1$; de plus le type d'isotopie de l'entrelacs ne dépend pas de la valeur de R suffisamment grande.

Exemple 3. Soit $f(x,y) = x(xy-1)$ le polynôme de Brougthon. Le gradient de f ne s'annule jamais donc $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \varnothing$. La fibre $f^{-1}(0)$ a deux composantes connexes homotopes à un disque et à un anneau. Alors que les fibres $f^{-1}(s)$ pour $s \neq 0$ sont toutes des anneaux. Pour ce polynôme, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\infty = \{0\}$.

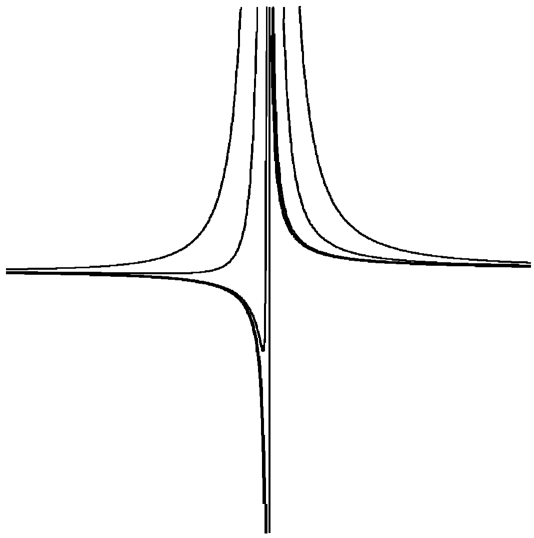

Fig. 3 – Trace réelle des fibres $f = c$ avec $f(x,y) = x(xy-1)$ et $c = 0, 0.5, 1, 2$

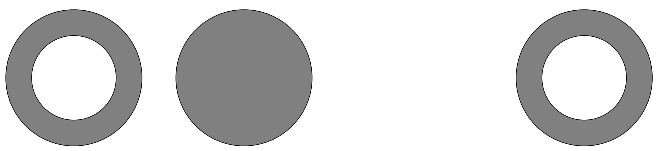

Fig. 4 – Type d'homotopie de la fibre $f^{-1}(0)$ (à gauche) : l'union d'un disque et d'un anneau ; et type d'homotopie de la fibre générique $f^{-1}(s)$ ($s \neq 0$, à droite) : un anneau.

Fig. 5 – Entrelacs à l'infini de $f^{-1}(0)$.

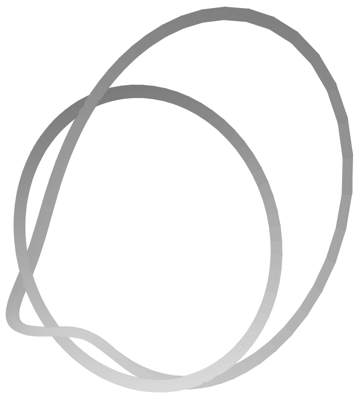

Fig. 6 – Entrelacs à l'infini de $f^{-1}(s)$ $(s \neq 0)$.

Définissons maintenant avec quelle équivalence nous cherchons à déterminer les polynômes. Deux polynômes $f, g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ sont *topologiquement équivalents* s'il existe des homéomorphismes Φ et Ψ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\Psi"'] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

La topologie d'une fibre $f^{-1}(c)$ est obtenue par le plongement de cette fibre dans $\mathbb{C}^2$, c'est-à-dire par le couple $(\mathbb{C}^2, f^{-1}(c))$. Si les deux polynômes f et g sont topologiquement équivalents alors pour tout $c \in \mathbb{C}$ il existe $c' \in \mathbb{C}$ tel que le couple $(\mathbb{C}^2, f^{-1}(c))$ soit homéomorphe au couple $(\mathbb{C}^2, g^{-1}(c'))$.

On peut se poser la question : l'entrelacs à l'infini K_c^∞ détermine-t-il la topologie de la fibre $f^{-1}(c)$? La réponse est double. Tout d'abord une réponse positive pour les fibres génériques [Ne89].

Proposition 4 (Neumann). L'entrelacs à l'infini d'une fibre générique détermine la topologie de cette fibre. En d'autres termes : si $s \notin \mathcal{B}(f)$ et $s' \notin \mathcal{B}(g)$ alors $f^{-1}(s) \cap S^3_R$ est isotope à $g^{-1}(s') \cap S^3_R$ si et seulement si les couples $(\mathbb{C}^2, f^{-1}(s))$ et $(\mathbb{C}^2, g^{-1}(s'))$ sont homéomorphes.

Cependant la réponse est négative pour les fibres irrégulières ; un contre-exemple à été donné par E. Artal.

Exemple 5 (Artal). Soient f, g les polynômes de degré 6 suivants [Ar93] :

$$f(x,y) = \big(x(xy-1)-y^2\big)^2 - 4y(xy-1)\big((xy-1)-y^3\big) - \big((xy-1)-y^3\big)^2$$

et

$$g(x,y) = \big(x(xy-1)-y^3\big)^2 - (xy-1)^3.$$

Les ensembles de bifurcation pour f et pour g sont les mêmes : 0 est la seule valeur critique à l'infini, et il y a 7 valeurs critiques affines qui correspondent à des singularités quadratiques ordinaires. De plus les entrelacs à l'infini $f^{-1}(0) \cap S^3_R$ et $g^{-1}(0) \cap S^3_R$ sont isotopes. Cependant les couples $(\mathbb{C}^2, f^{-1}(0))$ et $(\mathbb{C}^2, g^{-1}(0))$ ne sont pas équivalents, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'homéomorphisme $\Phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ avec $\Phi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$. Nous obtenons *a fortiori* que les polynômes f et g ne sont pas topologiquement équivalents.

Comme, en général, la combinatoire à l'infini ne determine ni la topologie des polynômes ni celle des fibres : que faut-il rajouter pour obtenir cette topologie ? Nous savons qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entrelacs $(S^3_r, f^{-1}(c) \cap S^3_r)$ à isotopie près pour $r > 0$. Plusieurs conjectures existent, par exemple :

Conjecture 6 (Boileau-Rudolph). L'ensemble des entrelacs $(S^3_r, f^{-1}(c) \cap S^3_r)$ pour $r > 0$ détermine la topologie de $(\mathbb{C}^2, f^{-1}(c))$.

3 Classification des polynômes ayant une seule valeur critique

Un des corollaires de ce paragraphe est le résultat suivant :

Théorème 7. Soit f un polynôme dont la seule valeur critique est c alors l'entrelacs à l'infini $(S^3_R, f^{-1}(c) \cap S^3_R)$ détermine le type topologique de $(\mathbb{C}^2, f^{-1}(c))$.

En fait nous obtenons la classification des polynômes ayant une seule valeur critique à équivalence topologique près :

Théorème 8. Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme réduit. Nous notons p et q des entiers premiers entre eux, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0,1\}$, $\sigma = \sigma(x,y) = x^s y + 1$, $(s > 0)$. Soit g le polynôme défini par $g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-i)^{m_i}$, avec $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n$ et $n \geqslant 1$; et soit g_{red} le polynôme réduit associé à g : $g_{red}(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-i)$.
- Si $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \mathcal{B}_\infty = \varnothing$ alors $f \approx x$,
- si $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \{0\}$ et $\mathcal{B}_\infty = \varnothing$ alors
  - $f \approx y \cdot g_{red}(x)$,
  - ou $f \approx x \prod_{i=1}^{n}(x^p - iy)$ (si $p = 1$ alors $n \geqslant 2$),
  - ou $f \approx x^\varepsilon y^{\varepsilon'} \prod_{i=1}^{n}(x^p - iy^q)$, $(1 < p < q)$,
- si $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \varnothing$ et $\mathcal{B}_\infty = \{0\}$ alors
  - $f \approx x \prod_{i=1}^{n} (x^p y^q - i)$
  - ou $f \approx x\sigma \prod_{i=1}^{n} (x^p \sigma^q - i)$ $(p > 1$ ou $q > 1)$,
  - ou $f \approx x\sigma^\varepsilon \prod_{i=1}^{n} (x^p - i\sigma^q)$ (si $\varepsilon = 0$ alors $q > 1$),
  - ou $f \approx g_{red}(x)(g(x)y + 1)$ $(n > 1)$,
- si $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \{0\}$ et $\mathcal{B}_\infty = \{0\}$ alors
  - $f \approx xy \prod_{i=1}^{n}(x^p y^q - i)$ $(1 \leqslant p < q)$,
  - ou $f \approx g_{red}(x)k(x)(g(x)y+1)$ $(k(x) = \prod_{i=1}^{n'}(x+i),\ n' \geqslant 1)$.

De plus deux polynômes distincts de cette classification ne sont pas topologiquement équivalents.

Commentons brièvemment ce résultat :
- Le cas $\mathcal{B} = \varnothing$ est le théorème d'Abhyankar-Moh ([AM75]).
- Le cas $\mathcal{B}_\infty = \varnothing$ et $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \{0\}$ est une généralisation du théorème de Zaĭdenberg-Lin [ZL83] (qui traite des polynômes irréductibles), voir aussi [BF98].
- Dans les cas où $\mathcal{B}_\infty = \{0\}$ alors d'une part la fibre $f^{-1}(0)$ n'est pas connexe et d'autre part une des composantes irréductibles est une droite. Par le théorème d'Abhyankar-Moh, cette droite est supposée d'équation $(x = 0)$.
- Il existe une équivalence plus forte sur les polynômes : deux polynômes f et g sont dits *algébriquement équivalents* s'il existe un automorphisme algébrique Φ de $\mathbb{C}^2$ et un automorphisme Ψ de $\mathbb{C}$ du type $\Psi(z) = az + b$, tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\Psi"'] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

  Deux polynômes algébriquement équivalents sont topologiquements équivalents. Pour les polynômes irréductible traités par les théorèmes d'Abhyankar-Moh et de Zaïdenberg-Lin ($\mathcal{B}_\infty = \varnothing$ et $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \varnothing$ ou $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \{0\}$) alors la classification algébrique et la classification topologique coïncident. Par contre pour des polynômes ayant une singularité à l'infini ($\mathcal{B}_{\text{aff}} = \varnothing$, $\mathcal{B}_\infty = \{0\}$) nous obtenons des classifications différentes (voir l'exemple 10).

Nous donnons maintenant quelques idées de la preuve.

Liste abstraite. Nous obtenons en premier lieu une classification abstraite, c'est-à-dire que nous décrivons chaque composante irréductible de $F_0 = f^{-1}(0)$ comme une surface de Riemann avec bord. Pour cela nous utilisons les faits suivants dont les démonstrations utilisent $\mathcal{B} \subset \{0\}$ (voir [Bo2000], [Bo'2000]) :

- $\chi(F_0) = +1$ (χ désigne la caractéristique d'Euler) ;
- les monodromies induites par des cercles $S^1_r(0)$ sur l'homologie de la fibre générique sont toutes égales quelque soit $r > 0$;
- la fibre F_0 est rationnelle : chacune de ces composantes irréductibles n'a pas de genre.

Essayons de voir ce que cela donne sur un exemple : soit f un polynôme vérifiant $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \varnothing$ et $\mathcal{B}_\infty = \{0\}$. Nous supposons de plus que la fibre F_0 a r composantes homotopes à des disques avec $r \geqslant 2$. Tout d'abord par le théorème d'Abhyankar-Moh, on peut choisir des équations ($x = \alpha_i$) pour les r disques (qui ne rencontrent pas car $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \varnothing$). Soit $\mathcal{C}$ une composante de F_0 qui n'est pas un disque. Alors F_0 est rationnelle et admet au moins $r+1$ composantes de bord (un trou pour chacune des droites et un trou pour la droite à l'infini). En fait $\mathcal{C}$ a exactemment $r+1$ trous car, comme $\chi(\mathcal{C}) \leqslant 1-r < 0$ alors

$$1 = \chi\big(F_0\big) = r + \chi(\mathcal{C}) + \chi(\mathcal{C}') + \cdots \leqslant r + (1-r) + (1-r) + \cdots$$

Pour avoir l'égalité il faut d'une part que $\chi(\mathcal{C}) = 1 - r$ et d'autre part qu'il n'y ait pas d'autres composantes. Donc la fibre F_0 est composée de r droites parallèles et d'une composante rationnelle à $r+1$ trous.

Liste algébrique. Nous obtenons ensuite une classification (redondante) à équivalence algébrique près. Continuons la preuve sur l'exemple précédent : il suffit de trouver une équation ($g = 0$) de la courbe $\mathcal{C}$. La projection de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ définie par $(x, y) \mapsto x$ est un revêtement ramifié. Comme les caractéristiques d'Euler de la courbe et de la base sont égales (et égales à $1 - r$) alors par une formule de Riemann-Hurwitz le revêtement est non ramifié et de degré 1. Or le degré de ce revêtement est le degré en y du polynôme $g(x, y)$ définissant $\mathcal{C}$. Comme de plus la courbe $\mathcal{C}$ ne coupe pas les droites $(x = \alpha_i)$ alors une équation de g est de la forme :

$$\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{m_i} y + h(x),$$

avec $h \in \mathbb{C}[x]$ et $h(\alpha_i) \neq 0$.

Classification topologique. Nous obtenons finalement une classification non redondante à équivalence topologique près. Pour cela nous avons besoin de compactifier la situation : soit $\tilde{f}$ le morphisme induit par l'homogénéisation de f. Ce morphisme n'est pas défini en un nombre fini de points situés sur la droite à l'infini. Nous notons π une succession d'éclatements de points en ces points à l'infini de telle sorte que Σ soit une surface lisse et que le morphisme $\bar{f}$ soit bien défini. Nous exigeons de plus que le diviseur obtenu soit à croisements normaux.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C}P^2 \arrow[d, "\tilde{f}"'] & \Sigma \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
\mathbb{C} \arrow[r] & \mathbb{C}P^1 &
\end{tikzcd}$$

Nous notons G_f le graphe dual de résolution de f. Les sommets sont pondérés par un couple (c, e) où c est la valeur de $\bar{f}$ sur la composante irréductible correspondante ($c \in \{0, \infty, \mathbb{C}P^1\}$ dans notre cas) et e est l'auto-intersection de la composante. Comme toutes les composantes sont rationnelles, nous omettons le genre.

Proposition 9. Soient f, g des polynômes réduits ayant une seule valeur critique. Alors f et g sont topologiquement équivalents si et seulement si les graphes G_f et G_g sont équivalents.

Le contre-exemple d'Artal prouve que cette équivalence ne peut être étendue au cas où les polynômes ont plus d'une valeur critique.
La classification topologique se termine en éliminant les cas redondants, c'est-à-dire ne garder qu'un polynôme représentant la classe d'équivalence des graphes. Pour l'exemple vu précédemment, cela revient à pouvoir choisir $h(x, y) = 1$, $\alpha_i = i$ et $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_r$.
Regardons en détails un autre exemple.

Exemple 10. Soit $f(x, y) = x(x^2y+1)$ et $g(x, y) = x(x^2y+x+1)$ alors les polynômes f et g sont topologiquement équivalents car ils ont le même graphe.

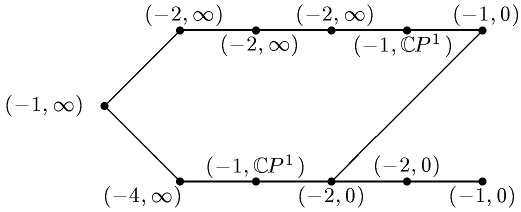

Fig. 7 – Graphe dual des polynômes $f(x, y) = x(x^2y+1)$ et $g(x, y) = x(x^2y+x+1)$.

Il faut remarquer que les polynômes f et g ne sont pas algébriquement équivalents. Ceci peut se voir sur les figures suivantes : les deux polynômes f et g ont des fibres pour la valeur 0 qui contiennent l'axe $(x = 0)$, si les polynômes sont algébriquement équivalents alors l'automorphisme algébrique Φ de $\mathbb{C}^2$ doit préserver l'axe $(x = 0)$. De plus les polynômes f et g ont le même comportement sur la partie $(x < 0)$ donc le demi-axe $(y = 0) \cap (x < 0)$ est préservé par Φ. Comme Φ est algébrique alors les deux axes (entiers) $(xy = 0)$ sont préservés. Donc le comportement des fibres sur le demi-axe $(y = 0) \cap (x > 0)$ doit être le même pour f et pour g, ce qui n'est pas le cas car les fibres pour f ne recoupent pas le demi-axe alors que les fibres pour g le recoupent. Cette étude ne contredit pas le fait que les polynômes sont topologiquement équivalents car le comportement topologique sur un demi-axe n'implique rien pour le comportement sur l'autre demi-axe.

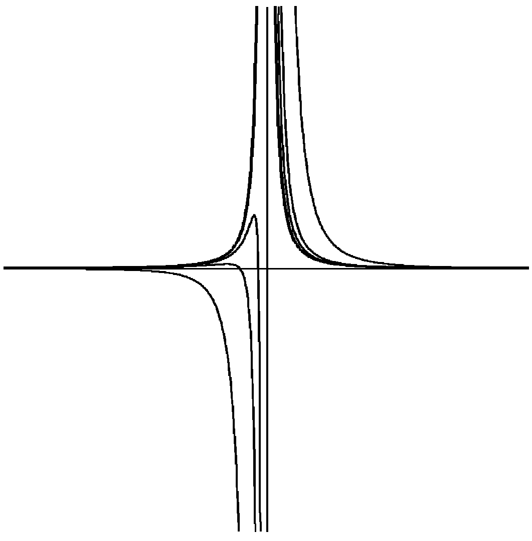

Fig. 8 – Trace réelle des fibres de $f(x, y) = x(x^2y + 1)$.

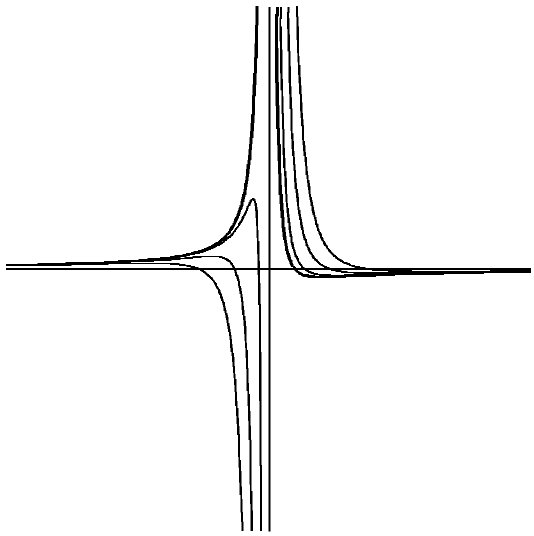

Fig. 9 – Trace réelle des fibres de $g(x,y) = x(x^2y + x + 1)$.

Le théorème 7 se prouve comme suit : l'entrelacs à l'infini de la fibre $f^{-1}(0)$ détermine l'entrelacs de la fibre générique ([LW97], [NL93]), comme $B \subset \{0\}$ alors tous les sommets correspondant aux composantes dicritiques sont de valence 2 dans le graphe G_f. Cela implique que l'entrelacs à l'infini de $f^{-1}(0)$ détermine la partie à l'infini de G_f (voir [Fo96]). Comme les singularités affines ne sont que des singularités quadratiques ordinaires, on peut reconstituer tout le graphe G_f à partir de la partie à l'infini de ce graphe.

4 Fibres irrégulières

Dans le cas où l'ensemble de bifurcation n'est plus réduit à un singleton, il semble illusoire d'arriver à une classification. L'étude de la topologie des polynômes se décompose de la façon suivante :

1. Une étude locale au voisinage de chaque fibre irrégulière. Si on note $D^2_\varepsilon(c)$ un petit disque centré en $c \in \mathbb{C}$, cette étude se ramène à l'étude des trois objets $F_c = f^{-1}(c)$, $T_c = f^{-1}(D^2_\varepsilon(c))$ et $F_{gen} = f^{-1}(s)$ avec $s \in \partial D^2_\varepsilon(c)$.
2. Le recollement de ces études locales par le groupe de monodromie. À un lacet $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}, *)$, $(* \notin \mathcal{B})$ on associe une monodromie (algébrique) $h_\gamma : H_1(F_{gen}) \longrightarrow H_1(F_{gen})$. Nous notons h_c la monodromie qui correspond à un lacet élémentaire autour de c.

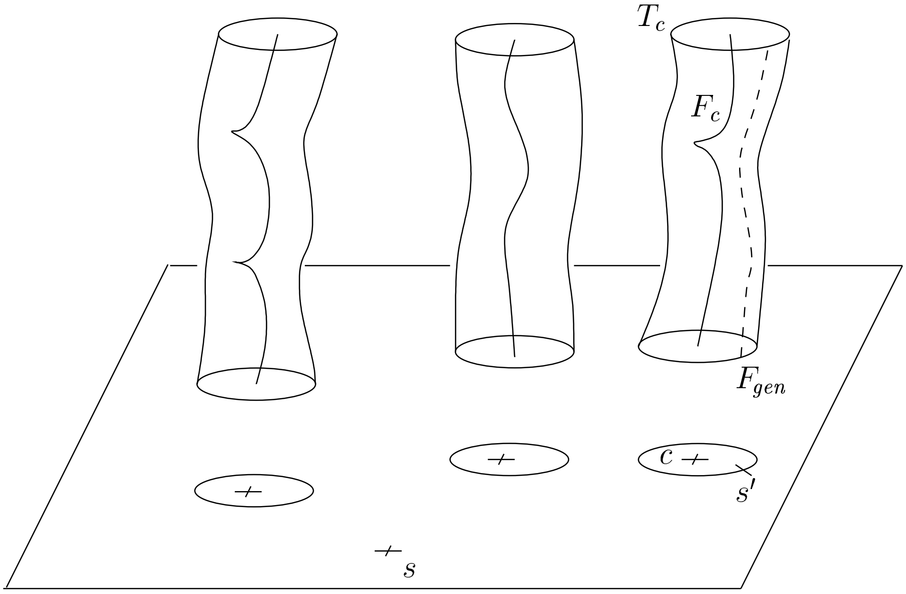

Fig. 10 – Étude globale.

L'étude globale est justifiée par la conjecture :

Conjecture 11 (Boileau). Soit f un polynôme à singularités isolées, alors les fibrations induites par f sur $D^2_\varepsilon(c)$ pour tout $c \in \mathcal{B}$ et la monodromie topologique (les difféomorphismes $h_\gamma : F_{gen} \longrightarrow F_{gen}$, $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}, *)$) déterminent la classe d'équivalence topologique de f.

4.1 Étude du plongement d'une fibre irrégulière dans le tube

L'inclusion de F_c dans le tube T_c induit un morphisme $j_c : H_1(F_c) \longrightarrow H_1(T_c)$. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 12. $j_c : H_1(F_c) \longrightarrow H_1(T_c)$ est un isomorphisme si et seulement si la valeur c est régulière à l'infini.

Ce résultat généralise un résultat de [ACD98] qui n'est valide que pour une fibre F_c connexe. En fait nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour que j_c soit injectif (voir [Bo"00] pour le cas j_c surjectif). Définissons tout d'abord quelques termes. G_c est le graphe dual de $f^{-1}(c)$: un sommet par composante irréductible et une arête entre deux sommets si les composantes correspondantes s'intersectent. $\bar{G}_c$ est le graphe dual de $\bar{f}^{-1}(c)$. La valeur c est *acyclique* si $H_1(G_c) \cong H_1(\bar{G}_c)$.

Proposition 13. j_c est injective si et seulement si F_c est connexe et c est acyclique. De plus si $n(F_c)$ est le nombre de composantes connexes de F_c alors

$$\dim \operatorname{Ker} j_c = n(F_c) - 1 + \dim H_1(\bar{G}_c) - \dim H_1(G_c).$$

Exemple 14. Soit $f(x,y) = x(x^2y+1)$ alors j_0 n'est pas injectif car F_0 n'est pas connexe. Pour $s \neq 0$ la valeur s est régulière à l'infini donc j_s est un isomorphisme.

Exemple 15. Soit le polynôme de Briançon :

$$f(x,y) = yp^3 + p^2 s + a_1 ps + a_0 s$$

avec

$$s = xy+1, \quad p = x(xy+1)+1, \quad a_1 = -\frac{5}{3}, \quad a_0 = -\frac{1}{3}.$$

Ce polynôme n'a pas de valeur critique affine et toutes ces fibres sont irréductibles. De plus les valeurs critiques à l'infini sont 0 et $c = \frac{16}{9}$. Le graphe dual G_0 de F_0 est réduit à un seul sommet, par contre le graphe dual $\bar{G}_0$ a un cycle, la valeur 0 n'est donc pas acyclique et j_0 n'est pas injectif (la dimension de $\operatorname{Ker} j_0$ est 1). Pour la valeur c le graphe G_c est réduit à un sommet et le graphe $\bar{G}_c$ n'a pas de cycle supplémentaire. Comme de plus la fibre F_c est connexe (car irréductible) alors le morphisme j_c est injectif. Par le théorème ci-dessus j_c n'est pas surjectif.

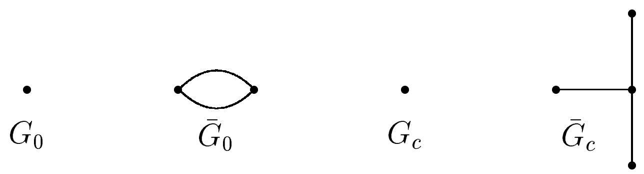

Fig. 11 – Graphes duaux G_0, $\bar{G}_0$, G_c, $\bar{G}_c$.

4.2 Cycles évanescents

Une autre partie de l'étude locale est l'étude des cycles évanescents. De façon intuitive les cycles évanescents sont les cycles qui disparaissent lorsque la fibre générique tend vers la fibre irrégulière. Si $k_c : H_1(F_{gen}) \longrightarrow H_1(T_c)$ est induit par l'inclusion de la fibre générique $F_{gen} = f^{-1}(s)$ dans T_c alors les *cycles évanescents* sont $V_c = \operatorname{Ker} k_c$.

Proposition 16 (Broughton).

$$H_1(F_{gen}) = \bigoplus_{c \in \mathcal{B}} V_c.$$

Les cycles évanescents nous seront utiles pour l'étude du groupe de monodromies.

4.3 Groupe de monodromies

Pour $c \in \mathcal{B}$ fixé, la matrice de h_c est connue dans une base qui dépend de c. Pour pouvoir composer les matrices de h_c et de $h_{c'}$ il faut écrire les matrices dans une même base.
Il n'est pas très difficile de montrer le lemme suivant :

Lemme 17. Pour $\sigma \in H_1(F_{gen})$ alors :

$$h_c(\sigma) - \sigma \in V_c.$$

Numérotons $\mathcal{B} = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Le lemme précédent permet d'écrire la matrice de h_{c_i} pour la décomposition $H_1(F_{gen}) = \bigoplus_{j=1}^{m} V_{c_j}$ sous la forme

$$h_{c_i} = \begin{pmatrix} I & & & & & \\ & I & & & & \\ & & \ddots & & & \\ h_{i,1} & h_{i,2} & \cdots & h_{i,i} & \cdots & h_{i,m} \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I \end{pmatrix}.$$

Pour chaque valeur c de $\mathcal{B}$ il existe une décomposition $H_1(F_{gen}) = \operatorname{Ker}(h_c - id)^2 \oplus \Lambda$ avec les cycles de Λ qui sont des cycles évanescents pour la valeur c. L'étude des cycles évanescents appartenant à $\operatorname{Ker}(h_c - id)^2$ est plus délicate.

Proposition 18.

$$\operatorname{Ker}(h_c - id)^2 \cap V_c = \operatorname{Ker}(h_c - id) \cap V_c.$$

De plus la dimension de cet espace est

$$\dim \operatorname{Ker}(h_c - id) \cap V_c = r(F_c) - 1 + \dim H_1(\bar{G}_c)$$

où $r(F_c)$ est le nombre de composantes irréductibles de F_c.

De cette façon, pour une base fixée (et donc indépendante de $c \in B$), compatible avec la décomposition de Broughton $H_1(F_{gen}) = \bigoplus_{c \in B} V_c$, il n'est pas très difficile d'obtenir la description de la sous-matrice de h_c correspondant à V_c (c'est-à-dire la sous-matrice $h_{i,i}$ si $c = c_i$). Cependant pour obtenir toute la matrice de h_c il faudrait calculer les autres sous-matrices de h_c qui correspondent à $V_{c'}$ pour $c' \neq c$. Pour une autre base, on consultera [NN'2000], qui ne donne également qu'une réponse partielle.

Voici quelques références utilisées pour cet article. Pour une bibliographie plus exhaustive on consultera [Bo$^{20}_{00}$].

Références

[AM$^{19}_{75}$] S. Abhyankar et T. Moh, Embedding of the line in the plane, *J. reine angew. Math.*, 276 (1975) 148-166.

[Ar$^{19}_{93}$] E. Artal-Bartolo, Combinatoire et type topologique des applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, *Enseign. Math.*, 39 (1993) 211-224.

[ACD$^{19}_{98}$] E. Artal-Bartolo, P. Cassou-Noguès et A. Dimca, Sur la topologie des polynômes complexes, Singularities (Oberwolfach, 1996), *Progr. Math.*, 162, Birkhäuser, Basel (1998) 317-343.

[Bo$^{20}_{00}$] A. Bodin, Fibres et entrelacs irréguliers à l'infini. *Thèse de l'université de Toulouse* (2000).

[Bo'$^{20}_{00}$] A. Bodin, Classification of complex polynomials from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}$ with one critical value, accepté pour publication dans *Mathematische Zeitschrift* (2000).

[Bo"$^{20}_{00}$] A. Bodin, Irregular fibers of complex polynomials, *preprint* (2000).

[BF$^{19}_{98}$] M. Boileau et L. Fourrier, Knot theory and plane algebraic curves, Knot theory and its applications, *Chaos Solitons Fractals*, 9 (1998) 779-792.

[Fo$^{19}_{96}$] L. Fourrier, Topologie d'un polynôme de deux variables complexes au voisinage de l'infini, *Ann. Inst. Fourier,* 46, 3 (1996) 645-687.

[LW$^{19}_{97}$] Lê D. T. et C. Weber, Équisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et C^0-suffisance, *Enseign. Math.*, 43 (1997) 355-380.

[Mi$^{19}_{68}$] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math.*, Studies 61, Princeton University Press (1968).

[Ne$^{19}_{89}$] W. Neumann, Complex algebraic curves via their links at infinity, *Invent. Math.*, 98 (1989) 445-489.

[NL$^{19}_{93}$] W. Neumann et Lê V. T., On irregular links at infinity of algebraic plane curves, *Math. Ann.*, 295 (1993) 239-244.

[NN'$^{20}_{00}$] W. Neumann et P. Norbury, Unfolding polynomial maps at infinity, *Math. Ann.*, 318 (2000) 149-180.

[ZL$^{19}_{83}$] M. Zaĭdenberg et V. Ya. Lin, An irreducible, simply connected algebraic curve in $\mathbb{C}^2$ is equivalent to a quasihomogeneous curve, *Sov. Math. Dokl.*, 28 (1983) 200-204.

Arnaud Bodin
laboratoire Émile Picard, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse
bodin@picard.ups-tlse.fr