Méthode du point col et asymptotique d'intégrales oscillantes.

*E. Delabaere**,

Résumé

Nous présentons quelques développement récents sur l'asymptotique globale d'une classe d'intégrales oscillantes complexes à fonctions de phase polynomiales. On expliquera en particulier de quel façon la géométrie globale des polynômes intervient dans la mise en oeuvre de la méthode du point col.

1. Introduction

Le problème posé par le calcul de l'asymptotique quand $|k| \to +\infty$ dans le champ complexe $\mathbb{C}$ des intégrales oscillantes complexes

$$I_\Gamma(k) = \int_\Gamma e^{-kf(z)} g(z) dz, \tag{1}$$

a déjà une longue histoire, transverse à nombre de disciplines. Dans un cadre analytique, l'asymptotique découle de la méthode du col à laquelle sont attachés les noms de Riemann et Debye. On sait comment Bernhard Riemann, vers 1850-60, introduisit cette idée afin de mieux comprendre l'asymptotique de la célèbre fonction ζ (d'Euler-Riemann); ces travaux, non publiés du vivant de Riemann mais mis à jour par Siegel vers 1930, débouchent sur le développement de Riemann-Siegel. Entre temps, dans les années 1910, Peter Debye découvrait la méthode du col et l'exploitait pour ses travaux en chimie physique.

La méthode du col repose sur l'hypothèse d'analyticité de l'intégrand. Cela permet la déformation du contour d'intégration, sans modification de l'intégrale (Cauchy), de manière à lui faire suivre les lignes de plus grandes pentes, et de se ramener ainsi à la méthode de Laplace. Cette même liberté permet d'appréhender l'asymptotique globale, et en particulier le phénomène de Stokes, dont le paradigme (depuis Stokes) est fourni par l'intégrale d'Airy.

Les extensions multidimensionnelles de la méthode du col sont plus récentes. Il s'agit ici d'intégrales du type

$$I_\Gamma(k) = \int_\Gamma e^{-kf(z)} g(z) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \tag{2}$$

où $f, g \ : \ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques de la variable $z = (z_1, \cdots, z_n)$ et Γ est chaîne de dimension réelle n. Là encore, l'idée consiste à déformer le contour d'intégration de façon à lui faire suivre les directions de plus grandes pentes. En général, cela raméne le

*Département de Mathématiques, UMR CNRS 6093, Université d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France / tel. +33 (0)2.41.73.54.94 / fax. +33 (0)2.41.73.54.54 / e-mail. delab@tonton.univ-angers.fr

problème de l'asymptotique à une étude locale au voisinage des points critiques de la fonction de phase f.

Nombre de travaux se sont concentrés sur ce dernier aspect local, cf. Arnold et al [2]. En supposant le point critique isolé, l'asymptotique découle de la géométrie de la singularité dans une boule de Milnor, et cela suffit en pratique dans nombre de problèmes, cf. Nye [31] par exemple.

L'asymptotique globale de ces intégrales fait l'objet de travaux plus récents et sont fondés sur les articles de Fedoryuk [16] et de Pham [35, 36]. Les motivations sont très liées à la résurgence d'une problématique de Balian & Bloch [3, 37] en analyse semi-classique exacte [43, 12], de la théorie d'Ecalle [15] et de l'hyperasymptotique de Berry-Howls [21].

L'asymptotique globale des intégrales oscillantes repose naturellement sur la géométrie globale des fibres $f^{-1}(t)$ de la fonction de phase f, supposée être polynomiale à partir de maintenant. Dans [35, 36], Pham met en exergue le problème posé par les points critiques à l'infini, phénomène nouveau par rapport à la dimension un. Sous l'hypothèse qu'aucune de ces singularités à l'infini n'existent, et une finitude du nombre de Milnor total, il démontre que toute chaîne d'intégration Γ non bornée se décompose en une somme finie

$$\Gamma = \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{\mu_\alpha} N_{\alpha_j}(\Gamma)\Gamma_{\alpha_j} \tag{3}$$

Dans (3), à chaque point critique isolé z_α de f est associé une base de μ_α(=multiplicité) cycles de plus grandes pentes Γ_α^j, et les $N_\alpha^j(\Gamma)$ sont des entiers pouvant s'interpréter comme indices d'intersections. Ce résultat forme la charpente de la mise en oeuvre de la méthode du col, l'asymptotique découlant dès lors de considérations locales où nombre de résultats s'appliquent en théorie (e.g., Arnold *et al* [2], Vassiliev [42], Varchenko [40, 41] Gaveau [17]), Wong [45]). Cela débouche également sur une analyse hyperasymptotique, cf. Howls [21].

Aucun bord ne venait interferer dans l'analyse précédente. Le problème du bord apparait par exemple dans certains problèmes de diffractions [31], ou encore dans l'étude des billards quantiques [3]. Des progrès substantiels dans l'étude des intégrales à bords ont été realisés par Paris *et al* [22, 23, 25], pour une classe d'intégrales se ramenant à des intégrales de type Mellin-Barnes.

Présenter une extension de la méthode du col dans le cas d'intégrales à bords est le sujet principal de cet article. On commentera au passage, à l'aide d'exemples, comment le problème des points critiques à l'infini soulève de bien intéressantes questions du point de vue de l'(hyper)asymptotique des intégrales oscillantes.

Les principaux résultats de cet article, obtenus par un travail commun avec C. Howls, devant paraître par ailleurs, aucune preuve ne sera détaillée.

2. L'homologie des chaînes d'intégration

Dans [36] où [21], Les intégrales du type (2) sont considérées pour des chaînes d'intégration Γ de dimension réelle n, non bornées, allant d'une vallée asymptotique à l'infini à une autre, où la condition $\Re(kf) \to +\infty$ est satisfaite. De façon plus précise, supposons que k posséde

$-\theta$ comme phase,

$$k = |k| \exp(-i\theta) \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{4}$$

et introduisons avec Pham [35, 36] les familles de demi-plans fermés

$$S_c^+ = S_c^+(\theta) = \{t \in \mathbb{C}, \Re(te^{-i\theta}) \geq c\}, \quad S_c^- = S_c^-(\theta) = \{t \in \mathbb{C}, \Re(te^{-i\theta}) \leq c\} \tag{5}$$

avec c parcourant $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$. La famille $\Psi = \Psi(\theta)$ des fermés $A \in \mathbb{C}^n$ tels que, pour tout $c > 0$, $A \cap f^{-1}(S_c^-)$ est compact, définit une famille de supports dans $\mathbb{C}^n$ au sens homologique du terme. Cela permet d'introduire un complexe de chaînes $C_\star^\Psi(\mathbb{C}^n)$ tel que, pour tout nombre complexe k non nul, les intégrales $\int e^{-kf(z)}g(z)dz^{(1)} \wedge \cdots \wedge dz^{(n)}$ suivant les éléments de $C_\star^\Psi(\mathbb{C}^n)$ convergent, et pour lesquelles le théorème de Stokes s'applique. Ce résultat demande une croissance modérée de g à l'infini, de sorte que la décroissance exponentielle du terme $e^{-kf(z)}$ assure la convergence. Comme on demande de plus à g d'être entière (pour simplifier), on supposera donc que g est une fonction polynomiale. On renvoit à [36] pour plus de détails.

Afin de prendre en compte l'impact d'un bord, introduisons à présent $m \leq n$ hypersurfaces affines irréductibles lisses $S_1, S_2, \cdots, S_m$. Les chaînes d'intégrations que nous considèrerons pourront venir prendre appui sur l'une ou l'autre de ces hypersurfaces et s'étendre au besoin à l'infini dans les vallées considérées précédemment. Notant $S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$, cela revient à introduire le complexe de chaînes relatives

$$C_\star^\Psi(\mathbb{C}^n, S) := C_\star^\Psi(\mathbb{C}^n)/\mathcal{I}_\star C_\star^\Psi(S) \tag{6}$$

où $\mathcal{I} : S \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ est l'injection naturelle. Il découle de [36] que les intégrales du type (2) suivant les éléments de ce complexe relatif convergent, le théorème de Stokes s'appliquant tout autant.

Notant $H_\star^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$ l'homologie du complexe $C_\star^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$, les intégrales (2) seront dorénavant considérées comme définies par les (classes des) n-cycles de l'espace $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$.

Examples Illustrons ce qui précède par deux exemples simples. On prend pour fonction de phase f le polynôme réel $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2^2 + z_1^4$ et $g = 1$ pour la fonction d'amplitude.
Considérons le bord $S = S_1 : z_2 - z_1^2 = 0$. Cela correspondra, par exemple, à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{z_1^2}^{+\infty} dz_2 e^{-kf(z_1,z_2)}$ définie pour $\Re(k) > 0$.
L'intégrale réelle $\int_D e^{-kf(z_1,z_2)} dz_1 \wedge dz_2$, où D désigne le disque de rayon 1 centré à l'origine, rentre tout autant dans le cadre de cette étude. Dans ce cas $S = S_1 : z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$ est le bord associé au problème.

3. Fibration globale et théorème de décomposition

En tant que tel, l'espace $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$ est un ensemble sur lequel l'intuition manque sérieusement de prise. Nous allons montrer comment, sous certaines hypothèses, cet espace peut être appréhender.

Nous supposerons tout d'abord que

Hypothesis H1 : Les m hypersurfaces affines irréductibles lisses $S_1, S_2, \cdots, S_m$ sont en position générales.

En conséquence, les différentes intersections transverses $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m)$ se présentent comme des sous-variétés de codimension complexe p, et induisent une stratification (de Whitney) naturelle sur l'espace $\mathbb{C}^n$, les strates étant de la forme: $\mathbb{C}^n \backslash S$, $S_i \backslash \bigcup_{j \neq i} S_i \cap S_j$, $S_i \cap S_j \backslash \bigcup_{k \neq i,j} S_i \cap S_j \cap S_k$, etc ... [13].

On déduit du théorème de Bertini-Sard et de la nature algébrique de f et du bord S, que f et ses restrictions $f|$ suivant les différentes strates n'auront qu'un nombre fini de valeurs critiques Λ. On précise que si $m = n$, alors les éléments de l'ensemble fini $S_1 \cap \cdots \cap S_n$ seront considérés, comme il se doit, comme autant de points critiques.

Faute de savoir traiter le problème des points critiques en toute généralité, on fera l'hypothèse supplémentaire:

Hypothesis H2 : f et ses restrictions $f|$ suivant les différentes strates n'admettent aucun point critique à l'infini.

En pratique, et en ce qui concerne f, cela pourra dire que est "tame" [1], i.e., qu'il existe un $\delta > 0$ tel que l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^n \, , \parallel \mathrm{grad}\, f(z) \parallel \leq \delta\}$ soit compact, ou même $\mathcal{M}$-tame [30]. Bien entendu, cette seule condition n'assure pas le bon comportement des restrictions $f|$ de f aux strates: par exemple $f(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}) = {z^{(1)}}^2 z^{(2)} - z^{(1)} z^{(3)} + z^{(2)}(z^{(3)} - 1)$ est tame, pourtant sa restriction $f|$ au bord $z^{(3)} = 1$ possède un point critique à l'infini (on reconnait l'exemple classique de Broughton [5]). Il serait ici intéressant d'avoir un critère général assurant la validité de l'hypothèse 2, et toute suggestion du lecteur en ce sens est la bienvenue.

L'hypothèse 2 assure la trivialité topologique à l'infini de f vue comme fibration d'espace stratifié. Sachant donc ce qu'il se passe en dehors d'une boule ouverte $B \subset \mathbb{C}^n$ de rayon assez grand, le résultat suivant est alors une simple application du premier lemme d'isotopie de Thom-Mather [18, 34, 13].

Theorem 3.1. *L'application $\mathbb{C}^n \backslash f^{-1}(\Lambda) \xrightarrow{f|} \mathbb{C} \backslash \Lambda$ réalise une fibration topologique localement triviale d'espace stratifié.*

Une première application de ce résultat consiste en l'identification du n-ième groupe d'homologie $H_n^{\Psi}(\mathbb{C}^n, S)$ qui nous intéresse avec le groupe d'homologie relative $H_n(\mathbb{C}^n, S \cup f^{-1}(S_c^+))$, plus simple à manier, où c désigne n'importe quel réel positif suffisamment grand (cf. [11]). Puisque $\mathbb{C}^n$ est contractile, on déduit de ce résultat l'isomorphisme

$$H_n^{\Psi}(\mathbb{C}^n, S) \to H_{n-1}(S \cup f^{-1}(t)) \tag{7}$$

pour $t \in S_c^+$. Il va de soit que l'on travaille ici (et par la suite) en homologie réduite.

Prenons à présent comme hypothèse supplémentaire que

Hypothesis H3 : les points critiques de f et de ses restrictions $f|$ aux strates sont isolés.

En l'absence de bord, l'homologie $H_{n-1}(f^{-1}(t))$ de la fibre générique $f^{-1}(t)$ est bien connue: il s'agit d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, son rang étant décrit par le nombre de Milnor total $\mu_f = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z]/(\partial f)$. Du point de vue de la méthode du col, cela correspond à la décomposition de tout cycle $\Gamma \in H_n^{\Psi}(\mathbb{C}^n)$ en une chaîne suivant une base de μ_f cycles de

1. i.e., "bonne" ou "gentille". A ma connaissance, il n'existe pas de traduction française officielle de ce terme mathématique. Je garde donc le mot anglais.

plus grandes pentes Γ_α ainsi que l'a démontré Pham [36] (sous réserve d'un phénomène de Stokes).
En présence du bord S, l'analyse de $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$ revient également, par (7), à considérer la topologie de la fibre (générique) $P^{-1}(0)$, où P désigne le polynôme $(f-t)\prod_{i=1}^n P_i$, chacun des S_i étant défini comme lieu des zéros du polynôme irréductible P_i. Il est donc naturel de poursuivre dans cette voie afin de montrer le résultat central de ce chapitre, à savoir la finitude du $\mathbb{Z}$-module libre $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$. J'avoue cependant n'avoir pas réussi à venir à bout de ce raisonnement, du fait de la difficulté à traduire l'hypothèse 2 en terme des propriétés de P comme fibration. Toute suggestion d'un géomètre serait ici la bienvenue.

L'étude de $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$, ou plutôt du groupe isomorphe $H_n(\mathbb{C}^n, S \cup f^{-1}(S_c^+))$, peut être entreprise en calquant l'idée de la méthode du col en dimension 1: on veut déformer tout cycle d'intégration dans sa classe d'homologie de manière à lui faire suivre les directions de plus grandes pentes.
Donnons l'idée de la marche à suivre (cf. [11] pour les détails). Suivre les directions de plus grandes pentes signifie considérer les hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ le long desquelles la partie imaginaire $\Im(kf(z))$ reste constante. Parmi elles, celles se projetant par f sur l'une ou l'autre des demi-droites fermées $L_\alpha = f_\alpha + e^{i\theta}\mathbb{R}^+$ où les $f_\alpha \in \Lambda$ designent les valeurs critiques sont celles qui nous intéressent pour la méthode du col. Appelons *plan de Borel* le champ complexe $\mathbb{C}$ des valeurs de f. On suppose la phase (θ) générique, en ce sens que les L_α définissent un ensemble de demi-droites deux à deux disjointes. On définit alors une déformation-rétraction du plan de Borel sur une réunion disjointe de cylindres, voisinages fermés des demi-droites L_α, à quoi lui correspond, par le théorème 3.1, une isotopie dans l'espace stratifié ambiant $\mathbb{C}^n$. Ceci fait, l'étude se raméne (essentiellement par excision et déformation-rétraction) à une étude locale dans un petit voisinage de chacune des valeurs critiques z_α du problème. Pour préciser ce que l'on entend par "localisation", il nous sera utile d'introduire quelques définitions, sous l'hypothèse technique:

Hypothesis H4: Chaque valeur critique $f_\alpha \in \Lambda$ est l'image par f d'un unique point critique z_α de f où de l'une de ses restritions $f|$ aux strates.

L'étude locale au voisinage des points critiques diffère suivant que celle-ci est point critique de f ou d'une de ses restrictions. Introduisons la définition suivante:

Definition 3.1. *La* profondeur *d'un point critique z_α (ou de la valeur critique correspondante f_α) désigne la codimension complexe p de la strate sur laquelle il repose.*

Un point (ou une valeur) critique est dit
- *de* type 1 *s'il est de profondeur $p = 0$.*
- *de* type 2 *s'il est de profondeur $p > 0$ et s'il n'est point critique que pour la restriction de f à l'intersection de p hypersurfaces.*
- *de* type 3 *dans les autres cas.*

Notez que notre classification est quelque peu différente de celle de Wong [45].

Etude locale au voisinage d'un point critique de type 1 Il s'agit ici d'un point critique z_α de f ne rencontrant aucune des hypersurfaces S_i. Ce cas est en quelque sorte le b-a-ba du singulariste (cf. [2] par exemple). Soit D_α un petit disque ouvert centré en la valeur critique f_α et de rayon r. On sait depuis Milnor ([29, 32, 13]) que l'on peut choisir une petite boule ouverte B_α centrée en z_α et de rayon ϵ tel que l'ensemble de niveau $X_\alpha^t = \{z \in B_\alpha, f(z) = t\}$ et le bord de B_α aient une intersection transverse pour tout $t \in D_\alpha$, quitte pour ce faire à supposer r très petit devant ϵ: $\epsilon \gg r > 0$. Introduisons les notations:

$$D_\alpha^+(\theta) = D_\alpha \cap \{\Re((t - f_\alpha)e^{-i\theta}) \geq r/2\}, \quad X_\alpha = B_\alpha \cap f^{-1}(D_\alpha), \quad X_\alpha^+ = B_\alpha \cap f^{-1}(D_\alpha^+(\theta)). \tag{8}$$

Dans ce cas de figure, la localisation raméne l'étude de l'homologie à celle de l'homologie relative $H_n(X_\alpha, X_\alpha^+)$ (cf. [36]), qui se réduit elle-même à l'homologie évanescente par l'isomorphisme bord ∂,

$$H_n(X_\alpha, X_\alpha^+) \overset{\partial}{\to} H_{n-1}(X_\alpha^t) \tag{9}$$

pour tout $t \in D_\alpha^+(\theta)$. D'après Milnor [29], la fibre X_α^t a le type d'homotopie d'un bouquet de μ_α sphères où μ_α désigne la multiplicité du point critique isolé z_α; par voie de conséquence, $H_{n-1}(X_\alpha^t)$, et donc $H_n(X_\alpha, X_\alpha^+)$, définit un $\mathbb{Z}$ module libre de type fini μ_α. Dans le cas non dégénéré, $H_n(X_\alpha, X_\alpha^+)$ est complètement décrit par la donnée d'un onglet de Lefschetz Γ_α^t.

Etude locale au voisinage d'un point critique de type 2 Nous considérons maintenant un point critique de type 2, de profondeur p. On peut évidemment supposer que $S_1, \cdots, S_p$ sont les bords qui définissent la strate de codimension p qui nous intéresse.

Par le lemme d'Hadamard, on montre facilement l'existence de coordonnées locales $(s_1, \cdots, s_p, s_{(p+1)}, \cdots, s_n)$ telles que $s^{(i)} = 0$ soit une équation locale pour l'hypersurface S_i, et pour lesquelles

$$f = f_\alpha + s^{(1)} + \cdots + s^{(p)} + F(s^{(p+1)}, \cdots, s^{(n)}) \tag{10}$$

L'existence d'une telle représentation locale facilite grandement l'analyse de la situation. Bien entendu, c'est la multiplicité de la singularité F qui va gouverner la géométrie.
De même que précédemment, avec les mêmes hypothèses sur B_α et D_α, on introduit les ensembles

$$X_\alpha = B_\alpha \cap f^{-1}(D_\alpha), \quad X_\alpha^+ = B_\alpha \cap f^{-1}(D_\alpha^+(\theta)), \quad X_\alpha^t = B_\alpha \cap f^{-1}(t) \tag{11}$$

for $t \in D_\alpha(\theta)$. On note également $Y_i = B_\alpha \cap (f|S_i)^{-1}(D_\alpha) = X_\alpha \cap S_i$.
Ici, l'homologie locale qui joue un rôle (cf. [11]) est l'homologie relative $H_n(X_\alpha, X_\alpha^+ \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_p)$. Pour mieux comprendre sa structure, on s'aide de la représention locale (10) pour réduire la dimension jusqu'à l'homologie évanescente. On obtient ainsi l'isomorphisme

$$H_n(X_\alpha, X_\alpha^+ \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_p) \overset{\partial_p \circ \cdots \circ \partial_1 \circ \partial}{\longrightarrow} H_{n-p-1}(Y_p \cap \cdots \cap Y_1 \cap X_\alpha^t) \tag{12}$$

pour $t \in D_\alpha^+(\theta)$. L'isomorphisme bord ∂ consiste à considérer la partie du bord sur X_α^t, l'isomorphismes bord ∂_i faisant de même pour la partie appartenant à Y_i. Bien entendu, l'isomorphisme (12) dépend de l'ordre d'apparition des ∂_i et n'est donc pas canonique.

Si le point critique est non dégénéré alors, par le lemme de Morse, F peut se se décrire en coordonnées locale sous la forme

$$F = {s_{(p+1)}}^2 + \cdots + {s_n}^2 \tag{13}$$

En supposant $\theta = 0$ pour simplifier, on obtient

$$\Gamma_\alpha^t = \{(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{C}^n \mid y_1 = \cdots = y_n = 0\,,\, x_1 \geq 0, \cdots, x_p \geq 0, \\ x_1 + \cdots + x_p + {x_{(p+1)}}^2 + \cdots + {x_n}^2 \leq r_t\} \tag{14}$$

avec $x_i = \Re(s_i)$, $y_i = \Im(s_i)$ et $r_t = |t - f_\alpha|$ comme réalisation optimale des conditions de plus grandes pentes. Γ_α^t est appelé *onglet de Lefschetz relatif*, son orientation standard étant celles définies par les coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$. Le cas θ quelconque se déduit du cas précédent par le morphisme

$$(s_1, \cdots, s_p, s_{(p+1)}, s_n) \mapsto (e^{i\theta}s_1, \cdots, e^{i\theta}s_p, e^{i\theta/2}s_{(p+1)}e^{i\theta/2}s_n). \tag{15}$$

La classe d'homologie d'un tel onglet de Lefschetz relatif définit alors une base de l'homologie locale $H_n(X_\alpha, X_\alpha^+ \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_p)$.

Dans cette étude, le cas d'un coin, pour lequel $p = n$, est à mettre à part. Pour reprendre l'appellation de [34], il s'agit du "pincement simple", où $\partial_p \circ \cdots \circ \check{\partial}_i \circ \cdots \partial_1 \circ \partial[\Gamma]$ se réduit à un simple point, et l'homologie locale $H_n(X_\alpha, X_\alpha^+ \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_p)$ est engendré par un simple onglet de Lefschetz relatif.

Théorème de décomposition Il manque à l'étude précédente le cas des points critiques de type 3. Bien que ce cas ne pose pas de difficultés majeures du point de vue de l'homologie locale, les propriétés correspondantes du point de vue de l'asymptotique sont bien moins claires. Faute d'énoncés satisfaisants dans ce domaine, on prendra donc comme hypothèse que

Hypothèse H5 : Il n'y a aucune valeur critique de type 3.

Dans ces conditions, les résultats précédents fournissent le théorème suivant:

Theorem 3.2. *L'espace des classes d'homologie $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini μ_t. Son rang μ_t est la somme des multiplicités μ_α des points critiques z_α de f ou de ses restrictions aux strates. De plus, si les demi-droites $L_\alpha = f_\alpha + e^{i\theta}\mathbb{R}^+$ $(f_\alpha \in \Lambda)$ sont deux à deux disjointes, on peut associer à chacun des points critiques z_α un ensemble de μ_α cycles Γ_α indépendants passant par z_α et se projetant par f sur L_α, l'ensemble des n-cycles $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ formant une base de $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)$.*

Par variation de l'argument θ le long du cercle des directions $\mathbb{S}$, on s'assure aisément que la famille des groupes d'homologie $H_n^{\Psi(\theta)}(\mathbb{C}^n, S)$ définit un système local $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)_\mathbb{S}$ de $\mathbb{Z}$-modules de type fini sur le cercle des directions $\mathbb{S}$. Notez cependant que le faisceau localement constant $H_n^\Psi(\mathbb{C}^n, S)_\mathbb{S}$ n'est pas constant, en général, phénomène déjà présent en dimension $n = 1$ (prendre l'intégrale d'Airy,correspondant à $f(z) = z - z^3/3$, par exemple). Par ailleurs, au passage d'un nombre fini de θ sur $\mathbb{S}$, la décomposition d'un cycle donné comme chaîne de n-cycles de plus grandes pentes rencontrera en général des discontinuités: c'est là tout l'âme du *phénomène de Stokes*.

Example Illustrons d'un exemple les considérations de cette section. Prenons

$$f(z_1, z_2) = {z_1}^4 + z_1{z_2}^2 + {z_2}^3 \tag{16}$$

et comme bord l'hypersurface affine $S\,:\,z_1 - z_2 = 1$. La fonction f étant "tame", elle n'admet aucun point critique à l'infini. Ce problème ne se pose pas pour $f\,|S$ pour une raison de dimension. Le polynôme f posséde deux points critiques isolés, de type 1: l'un, non-dégénéré, correspond à la valeur critique $-1/19683$, l'autre est à l'origine. Par semi-quasi homogénéité, la singularité se ramène à $X(Y^2+X^3)$, ce qui correspond à la singularité D_5, de multiplicité $\mu = 5$ cf. [1]). La restriction de f à S posséde 3 points critiques non-dégénérés, de type 2. On en déduit que $H_2^{\Psi}(\mathbb{C}^n, S)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 9.

4. Intégrales et asymptotiques

Nous rappelons que $g = g(z)$ est supposé être une fonction polynomiale. On notera $\omega = g(z)dz^{(1)} \wedge \cdots \wedge dz^{(n)}$ la n-forme différentielle associée.

Nous venons de voir que l'application

$$\Gamma \mapsto I_{\Gamma}(k) = \int_{\Gamma} e^{-kf(z)}\omega \tag{17}$$

fournit une représentation du système local d'homologie $H_n^{\Psi}(\mathbb{C}^n, S)_{\mathbb{S}}$ dans le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Nous avons vu de plus qu'il suffisait

1. pour θ générique, de considérer l'image par (17) d'une base de n-cycles de plus grandes pentes (théorème 3.2).

2. d'analyser les discontinuités éventuelles (phénomène de Stokes) d'une décomposition suivant une base donnée à la traversée d'une direction non générique $\theta \in \mathbb{S}$.

Nous reviendrons sur le second point un peu plus tard. Concentrons nous ici sur les conséquences du second point pour l'analyse de l'asymptotique quand $|k| \to +\infty$. Pour θ générique, fixons nous un n-cycle de plus grande pente $\Gamma = \Gamma_{\alpha}(\theta)$ passant par le point critique z_{α}. De la définition même d'un tel cycle on tire deux conséquences:

1) La projection par f du cycle Γ étant la demi-droite fermée L_{α}, cela assure la décroissance exponentielle du terme $e^{-kf(z)}$ de l'intégrand à l'infini le long de Γ pour k dans tout sous-secteur fermé Σ'_{θ} contenu dans

$$\Sigma_{\theta} = \{|\arg(k) + \theta| < \pi/2 \text{ and } |k| > 0\}. \tag{18}$$

On en déduit que l'intégrale de Laplace

$$I_{\alpha}(k) = \int_{\Gamma} e^{-kf(z)}\omega \tag{19}$$

définit une fonction analytique dans le secteur ouvert Σ_{θ}.

2) En reprenant les notations du paragraphe 3., considérons la trace du cycle Γ dans l'ouvert X_{α}. On peut l'identifier au cycle Γ^{t_0}, avec $t_0 \in L_{\alpha}$ et t_0 proche de f_{α}, cycle relatif de plus grande pente dont la classe d'homologie appartient à $H_n(X_{\alpha}, X_{\alpha}^{t_0})$ si la profondeur de f_{α}) est nulle, à $H_n(X_{\alpha}, X_{\alpha}^{t_0} \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_p)$ si cette profondeur est p. Dans ce cas, l'intégrale

$\int_{\Gamma-\Gamma^{t_0}} e^{-kf(z)}\omega$ définit une fonction analytique admettant une asymptotique de Poincaré plate à l'infini dans tout sous-secteur fermé Σ'_θ. Par conséquent, $I_\alpha(k)$ et

$$I_\alpha^{t_0}(k) = \int_{\Gamma^{t_0}} e^{-kf(z)}\omega \tag{20}$$

possédent la même asymptotique au sens de Poincaré à l'infini dans Σ_θ.

4.1. Le cas sans bord

Ce cas est bien connu des spécialistes, notamment à la suite des travaux de Malgrange [27] (voir aussi [36], [2] §11). Supposons pour simplifier que $f_\alpha = 0$ et $\theta = 0$. Partant de l'intégrale (20), le théorème de Stokes ([27]) et la théorie des résidus de Leray ([24]) nous donnent l'identité:

$$I_\alpha^{t_0}(k) = \int_{\Gamma^{t_0}} e^{-kf(z)}\omega = \int_0^{t_0} dte^{-kt}\widehat{J_\alpha}(t) \quad \text{avec} \quad \widehat{J_\alpha}(t) = \int_{\partial[\Gamma^t]} \frac{\omega}{df_t} \tag{21}$$

où ω/df_t désigne la $n-1$-forme quotient de Leray, $\partial[\Gamma^t]$ désignant le cycle évanescent, $\partial[\Gamma^t] \in H_{n-1}(X_\alpha^t)$.

Par [4, 27], on sait que la fonction $\widehat{J_\alpha}(t)$ est analytique sur le revêtement universel $\widetilde{D_\alpha\backslash\{0\}}$ du disque épointé $D_\alpha\backslash\{0\}$: mieux, elle est solution d'une équation différentielle d'ordre $l \leq \mu_\alpha$ (où μ_α désigne la multiplicité du point critique) the multiplicity), dite de Picard-Fuchs. Cette équation admet l'origine comme point (au plus) singulier régulier, d'où l'on tire ([44]) que dans chaque secteur $\{a < \arg(t) < b\} \subset \widetilde{D_\alpha\backslash\{0\}}$, $\widehat{J_\alpha}(t)$ s'écrit comme somme d'une série convergente de la forme

$$\widehat{J_\alpha}(t) = \sum_{r,s} a_{r,s}(t)t^r(\ln t)^s \tag{22}$$

où:
- les r appartiennent à l'ensemble fini des exposants de monodromie de l'opérateur classique de monodromie en homologie. En particulier $\in \mathbb{Q}$ et de plus $r > -1$ [27].
- à chaque r est associé un ensemble fini de $s \in \mathbb{N}$, dérivant de la structure jordanienne de l'opérateur de monodromie, tels que $s \leq \inf\{\mu_\alpha - 1, n-1\}$ (cf. [2]).
- les $a_{r,s}(t) = \sum_{j\geq 0} a_{r,s,j}t^j$ sont des séries de Taylor convergentes.

L'asymptotique de $I_\alpha^{t_0}(k)$ se déduit facilement de (21), (22), du lemme de Watson et de l'identité

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}t^\lambda(\ln t)^l\, dt = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{k^{(\lambda+1)}}\right) \tag{23}$$

pour donner: $I_\alpha^{t_0}(k)$, donc $I_\alpha(k)$, a

$$J_\alpha(k) = \sum_{r,s} T_{r,s}(k)\frac{(\ln k)^s}{k^{r+1}} \tag{24}$$

comme développement asymptotique au sens de Poincaré quand $|k| \to \infty$ dans tout sous-secteur fermé Σ_θ. De plus, les séries formelles

$$T_{r,s}(k) = \sum_{j\geq 0} T_{r,s;j}/k^j \tag{25}$$

sont de classe Gevrey-1, i.e., il existe $C_{r,s} > 0$ et $A_{r,s} > 0$ tels que $|T_{r,l;j}| \leq C_{r,s} A^j_{r,s} \Gamma(j)$ (cf. Malgrange [28], Ramis [38] ou Loday-Richaud [26]).

Utilisons à présent la liberté que l'on a de déformer légèrement θ de telle sorte que la demi-droite L_α ne rencontre aucun point critique autre que f_α. La fonction $I_\alpha(k)$ qui en résulte n'est autre que le prolongement analytique de la fonction précédente, tandis que l'asymptotique reste bien entendu inchangée. La fonction $I_\alpha(k)$ admet donc (24) pour son asymptotique dans un secteur d'ouverture plus grande que π. Il resulte du théorème de Watson que l'expression formelle (24) est Borel-sommable, $I_\alpha(k)$ étant sa somme au sens de Borel. En particulier, on en déduit la nouvelle expression intégrale

$$I_\alpha(k) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} dt e^{-kt} \widehat{J_\alpha}(t) \tag{26}$$

Formulons ce résultat en un théorème, valable pour toute valeur de f_α:

Theorem 4.1. *Soit f_α une valeur critique de type 1. Alors la somme de l'intégrale $I_\alpha(k)$ admet $e^{-kf_\alpha} J_\alpha(k)$ comme développement asymptotique au sens de Poincaré pour $k \to \infty$ dans le secteur $\Sigma_\theta = \{|k| > 0, |\arg(k) + \theta| < \pi/2\}$, avec*

$$J_\alpha(k) = \sum_{r,s} T_{r,s}(k) \frac{(\ln k)^s}{k^{r+1}} \tag{27}$$

$$\text{où} \quad T_{r,s}(k) = \sum_{j \geq 0} T_{r,s;j}/k^j \tag{28}$$

appartient à l'algèbre différentielle $\mathbb{C}[[k^{-1}]]_1$ des séries Gevrey-1. Les $r \in \mathbb{Q}$, $r > -1$ parcourt un ensemble spectrale *fini, et à chaque r est associé un ensemble d'entiers s tels que $0 \leq s \leq \inf\{\mu_\alpha - 1, n - 1\}$.*
*Réciproquement, $I_\alpha(k)$ (*resp. *$\widehat{J_\alpha}(t)$) peut être vu comme la somme de Borel (*resp. *le mineur en théorie de la résurgence d'Ecalle (cf. [15, 7, 12, 9]) de $e^{-kf_\alpha} J_\alpha(k)$ pour la direction de sommation $\theta \in \mathbb{S}$.*

Dans le cas d'un point critique non-dégénéré, le résultat est bien entendu plus simple (cf. [16],[45]).:

Corollary 4.1. *Si z_α est un point de Morse, alors $I_\alpha(k) \sim e^{-kf_\alpha} J_\alpha(k)$ dans Σ_θ avec*

$$J_\alpha(k) = \frac{1}{k^{n/2}} T_\alpha(k) \quad \text{et} \quad T_\alpha(k) = \frac{g(0)(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{Hess(f)(0)}} + \sum_{j \geq 1} T_j^\alpha / k^j \in \mathbb{C}[[k^{-1}]] \tag{29}$$

où $Hess(f)$ désigne le hessien. Le choix de détermination de la racine carrée dépend de l'orientation du cycle évanescent.

Un algorithme de calcul des T_j^α est décrit dans [10].

4.2. Le cas à bord

Nous supposons à présent que le point critique est de type 2, de profondeur $p > 0$. Sans perte de généralité, on peut évidemment supposer que $f_\alpha = 0$ et $\theta = 0$.

L'analyse de l'asymptotique va suivre point par point le processus de réduction à l'homologie évanescente (si elle existe) décrite en section 3.. Partant de l'intégrale $I_\alpha^{t_0}(k)$, et puisque la fibre $f = 0$ est non-singulière, le théorème de Fubini s'applique pour donner

$$I_\alpha^{t_0}(k) = \int_0^{t_0} dt e^{-kt} \int_{\partial[\Gamma^t]} \frac{\omega}{df_t} \tag{30}$$

où ω/df_t désigne la restriction de la forme quotient ω/df à la fibre $f = t$, tandis que $\partial[\Gamma^t] \in H_n(X_\alpha, X_\alpha^t \cup Y_1 \cup \cdots Y_p)$ désigne la partie du bord de (la classe d'homologie de) Γ^t appartenant à X_α^t. Ce processus de réduction s'itère aisément. Ainsi par exemple obtiendra-t'on au deuxième cran (si $p \geq 2$) l'identité

$$\widehat{J_\alpha}(t) = \int_{\partial[\Gamma^t]} \frac{\omega}{df} = \int_0^t dt_1 \int_{\partial_1 \circ \partial[\Gamma^{t_1}]} \frac{\omega}{df_t \wedge df_{(1)_{t_1}}} \tag{31}$$

où $\omega/df_t \wedge df_{(1)_{t_1}}$ est la restriction à $f = t, f_{(1)} = t_1$ avec $f_{(1)} = f|S_1$ de la $(n-2)$-forme quotient $\omega/df \wedge df_{(1)}$. On obtient de cette façon l'égalité

$$I_\alpha^{t_0}(k) = \int_0^{t_0} dt e^{-kt} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{p-2}} dt_{p-1} \int_{\partial_{(p-1,\cdots,1,0)}[\Gamma^{t_{p-1}}]} \omega_{(p-1,\cdots,1,0)} \tag{32}$$

avec

$$\partial_{(p-1,\cdots,1,0)} = \partial_{p-1} \circ \cdots \circ \partial_1 \circ \partial \tag{33}$$

et

$$\omega_{(p-1,\cdots,1,0)} = \frac{\omega}{df_t \wedge df_{(1)_{t_1}} \wedge \cdots \wedge df_{(1,\cdots,(p-1))_{t_{p-1}}}} \tag{34}$$

avec des notations évidentes.

Si $p = n$ (pincement simple), alors $\omega_{(p-1,\cdots,1,0)}$ est une fonction holomorphe en les variables $(t, t_1, \cdots, t_{p-1})$ et le processus de reduction s'arréte là.

Si $p \leq n-1$, l'argumentation précédente permet de réduire l'intégrale à une primitive p-ième d'une intégrale fibre

$$I_\alpha^{t_0}(k) = \int_0^{t_0} dt e^{-kt} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{p-1}} dt_p \int_{\partial_{(p,\cdots,1,0)}[\Gamma^{t_p}]} \omega_{(p,\cdots,1,0)} \tag{35}$$

où $\partial_p \circ \cdots \partial_1 \circ \partial[\Gamma^{t_p}]$ désigne le cycle évanescent associé au cycle Γ^{t_0}.

Dans le cas $p = n$, l'intégrale

$$\widehat{J_\alpha}(t) = \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{p-2}} dt_{p-1} \int_{\partial_{(p-1,\cdots,1,0)}[\Gamma^{t_{p-1}}]} \omega_{(p-1,\cdots,1,0)} \tag{36}$$

définit une fonction analytique sur D_α, de série de Taylor à l'origine $\sum_{j\geq 0} a_j t^{j+p-1}$, convergente. Si $p \leq n-1$, l'intégrale

$$h_\alpha(t, t_1, \cdots, t_p) = \int_{\partial_{(p,\cdots,1,0)}[\Gamma^{t_p}]} \omega_{(p,\cdots,1,0)} \tag{37}$$

définit une fonction analytique de $(t_p, (t, t_1, \cdots, t_{p-1})$ sur $\widetilde{D_\alpha \backslash \{0\}} \times U$ où $\widetilde{D_\alpha \backslash \{0\}}$ désigne le revêtement universel du disque épointé $D_\alpha \backslash \{0\}$ et U est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^p$. De plus, dans chaque secteur $a < \arg(t) < b$, elle est la somme d'une série convergente de la forme

$$\sum_{r,s} a_{r,s}(t, t_1, \cdots, t_{p-1}, t_p) t_p^r (\ln t_p)^s \tag{38}$$

avec:
– Les r parcourent l'ensemble fini des exposants de monodromie distincts de l'opérateur de monodromie en homologie. Pour chaque r, les $s \in \mathbb{N}$ satisfont $s \leq \inf\{\mu_\alpha - 1, n - p - 1\}$.
– $a_{r,s}(t, t_1, \cdots, t_{p-1}, t_p) = \sum_{j \geq 0} a_{r,s,j}(t, t_1, \cdots, t_{p-1}) t_p^j$ sont des séries de Taylor convergentes à dépendence analytique en $(t, t_1, \cdots, t_{p-1})$.

Par intégration, on en déduit que la fonction

$$\widehat{J_\alpha}(t) = \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{p-1}} dt_p \int_{\partial_{(p, \cdots, 1, 0)}[\Gamma^{t_p}]} \omega_{(p, \cdots, 1, 0)} \tag{39}$$

posséde le même type de propriétés, et l'on peut écrire

$$\widehat{J_\alpha}(t) = \sum_{r,s} b_{r,s}(t) t^{r+p} (\ln t)^s \tag{40}$$

où $b_{r,s}(t) = \sum_{j \geq 0} b_{r,s,j} t_p^j$ des séries de Taylor convergentes. Par le même argument que ci-avant (théorme de Watson), on obtient finalement la représentation intégrale

$$I_\alpha(k) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} dt e^{-kt} \widehat{J_\alpha}(t) \tag{41}$$

qui fournit le résultat suivant:

Theorem 4.2. *Si f_α est une valeur critique de second type, de profondeur p, l'intégrale $I_\alpha(k)$ admet $e^{-kf_\alpha} J_\alpha(k)$ comme série asymptotique pour $k \to \infty$ dans Σ_θ avec*

$$\text{Si } p = n, \quad J_\alpha(k) = \frac{1}{k^p} \sum_{j \geq 0} T_j / k^j \in \mathbb{C}[[k^{-1}]]_1 \tag{42}$$

$$\text{Si } \; p \leq n - 1, \quad J_\alpha(k) = \sum_{r,s} T_{r,s}(k) \frac{(\ln k)^s}{k^{r+p+1}} \tag{43}$$

où $T_{r,s}(k) = \sum_{j \geq 0} T_{r,s;j} / k^j \in \mathbb{C}[[k^{-1}]]_1$. Les rationnels $r > -1$ parcourent un ensemble spectral fini associé au point critique, et à chaque r correspond un ensemble fini de $s \in \mathbb{N}$ avec $s \leq \inf\{\mu_\alpha - 1, n - p - 1\}$.
*Réciproquement, $I_\alpha(k)$ (*resp. *$\widehat{J_\alpha}(t)$) est la somme de Borel (*resp. *le mineur) de $e^{-kf_\alpha} J_\alpha(k)$ dans la direction de sommation $\theta \in \mathbb{S}$.*

Dans le cas d'un point critique de Morse, on retrouve l'asymptotique déjà décrite dans un certain nombre d'articles ([10], [45] ou [2]):

Corollary 4.2. *Si le point critique est de Morse, alors $I_\alpha(k) \sim e^{-kf_\alpha} J_\alpha(k)$ dans Σ_θ avec*

$$J_\alpha(k) = \frac{1}{k^{(n+p)/2}} T_\alpha(k) \quad \text{et} \quad T_\alpha(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j^\alpha}{k^j} \tag{44}$$

5. Phénomène de Stokes

L'asymptotique étant comprise, reste à analyser les phénomènes de Stokes. Ceux-ci sont intrinséquement liés aux singularités des prolongements analytiques des mineurs $\widehat{J_\alpha}(t)$. C'est là le point de vue de Borel qui mène tout droit à la théorie de Picard-Lefschetz comme tout géomètre s'y attend. Ce point de vue a le défaut de faire perdre les idées maîtresses de la méthode du col, et nous adopterons un point de vue quelque peu différent. Pour ce faire, nous ferons l'hypothèse simplificatrice que

Hypothesis H6 : Les points critiques sont non-dégénérés.

5.1. Dualité

Considérons un n-cycle relatif $\Gamma \in H_n^{\Psi(\theta)}(\mathbb{C}^n, S)$ ayant son support dans $\Psi(\theta)$ et un n-cycle $\Gamma' \in H_n^{\Psi(\theta+\pi)}(\mathbb{C}^n \backslash S)$ prenant son support dans $\Psi(\theta+\pi)$. Quitte à les déformer par isotopie, il est loisible de supposer ces deux cycles en position générale. Remarquons avec Pham [36] que l'intersection $\Psi(\theta) \cap \Psi(\theta+\pi)$ des familles de supports $\Psi(\theta)$ et $\Psi(\theta+\pi)$ définit une famille de compacts de $\mathbb{C}^n$, de sorte que l'intersection dans $\mathbb{C}^n$ de Γ avec Γ' définit un 0-cycle pour l'homologie (réduite) à support compact. Comme $H_0(\mathbb{C}^n) = \mathbb{Z}$, on en déduit une application bilinéaire naturelle

$$<,>: H_n^{\Psi(\theta+\pi)}(\mathbb{C}^n \backslash S) \otimes H_n^{\Psi(\theta)}(\mathbb{C}^n, S) \to \mathbb{Z} \tag{45}$$

C'est là une extension directe de l'indice de Kronecker introduit dans [36]. De plus,

Lemma 5.1. *La forme bilinéaire (45) est non-dégénérée.*

La preuve de ce lemme est une facile adaptation à notre contexte de celle donnée dans [36] (voir [11] pour les détails). Ce lemme reste vrai sans l'hypothèse H6. Dans ce cas, l'analyse passe par une morsification locale des points critiques dégénérés; on notera que ceci ne met aucunement en jeu une quelconque déformation globale de f qui pourrait détruire l'hypothèse H2 (cf. [8]).

L'indice d'intersection (45) met donc en dualité les espaces $H_n^{\Psi(\theta)}(\mathbb{C}^n, S)$ et $H_n^{\Psi(\theta+\pi)}(\mathbb{C}^n \backslash S)$. En particulier, pour toute base (Γ_α) de n-cycles engendrant $H_n^{\Psi(\theta)}(\mathbb{C}^n, S)$ pourra-t'on associer la base duale $(\Gamma_\alpha^\star)$ d'éléments de $H_n^{\Psi(\theta+\pi)}(\mathbb{C}^n \backslash S)$ telle que $< \Gamma_\beta^\star, \Gamma_\alpha^\star >= \delta_{\beta\alpha}$, où $\delta_{\beta\alpha}$ est le symbole de Kronecker.

Voyons à présent comment cela permet l'analyse des phénomènes de Stokes.

5.2. Phénomène de Stokes et résurgence

Supposons donc que (θ) définisse une direction singulière. On supposera plus précisément que la demi-droite fermée $L_\alpha = L_\alpha(\theta)$ rencontre la valeur critique f_β, et uniquement celle-la (excepté f_α bien entendu). Notons par $L_\alpha^- = L_\alpha(\theta^-)$ et L_β^- (*resp.* $L_\alpha^+ = L_\alpha(\theta^+)$ et L_β^+) les demi-droites déduites de L_α et L_β par une légère rotation dans le sens horaire (*resp.* trigonométrique). On fait de même pour les autre demi-droites L_λ.

Définissons pour θ^- (*resp.* θ^+) fixé une base de n-cycles de plus grandes pentes $(\Gamma_{\alpha^-}, \Gamma_{\beta^-}, \cdots, \Gamma_{\lambda^-}, \cdots)$, *resp.* $(\Gamma_{\alpha^+}, \Gamma_{\beta^+}, \cdots, \Gamma_{\lambda^+}, \cdots)$ (on notera ici l'emploi de l'hypothèse

H6, permettant d'associer à chaque demi-droite L un unique n-cycle de plus grande pente Γ). Il est loisible de supposer que les cycles $\Gamma_{\beta^+}, \cdots, \Gamma_{\lambda^+}, \cdots$ se déduisent de $\Gamma_{\beta^-}, \cdots, \Gamma_{\lambda^-}, \cdots$ par isotopie quand l'on passe continûment de θ^- à θ^+, et l'on oubliera les indices $\pm$ dans les notations.
Comparons maintenant Γ_{α^+} et Γ_{α^-}. En écrivant

$$\Gamma_{\alpha^-} = \Gamma_{\alpha^+} + \Gamma \tag{46}$$

il vient nécessairement que

$$\Gamma = \kappa_{\alpha\beta}\Gamma_\beta \quad \text{avec} \quad \kappa_{\alpha\beta} =< \Gamma^\star_\beta, \Gamma > \tag{47}$$

Voyons les conséquences pour nos représentations intégrales. L'intégrale

$$I_\alpha(k) = \int_{\Gamma^-_\alpha} e^{-kf(z)}\omega = e^{-kf_\alpha}\int_0^{\infty e^{i\theta^-}} e^{-kt}\widehat{J_\alpha}(t)\,dt \tag{48}$$

définit une fonction analytique dans le secteur $\Sigma_{\theta^-} = \{|k| > 0, |\arg(k) + \theta^-| < \pi/2\}$. Nous savons par ailleurs que $I_\alpha(k)$ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ comme fonction multivaluée et, par (47), nous en déduisons que

$$I_\alpha(k) = \int_{\Gamma^+_\alpha} e^{-kf(z)}\omega + \kappa_{\alpha\beta}\int_{\Gamma^+_\beta} e^{-kf(z)}\omega \tag{49}$$

coïncide avec ce prolongement analytique pour $k \in \Sigma_{\theta^+}$, i.e.,

$$I_\alpha(k) = e^{-kf_\alpha}\int_0^{\infty e^{i\theta^+}} e^{-kt}\widehat{J_\alpha}(t)\,dt + \kappa_{\alpha\beta}e^{-kf_\beta}\int_0^{\infty e^{i\theta^+}} e^{-kt}\widehat{J_\beta}(t)\,dt \tag{50}$$

Cette dernière formule (50) s'interprète aisément en terme de propriétés résurgentes des symboles formels $J_\alpha(k)$ décrits au §4.. L'identité (48) montre que $I_\alpha(k)$ peut être vue comme la somme de Borel latérale gauche dans la direction θ du symbole $e^{-kf_\alpha}J_\alpha(k)$, ce que l'on note par

$$I_\alpha(k) = e^{-kf_\alpha}\mathrm{s}_{(\theta)^-}\,J_\alpha(k) \tag{51}$$

tandis que (50) montre que l'action sur $J_\alpha(k)$ de l'automorphisme de Stokes $\mathfrak{S}_{(\theta)}$ est exactement donné par

$$\mathfrak{S}_{(\theta)}J_\alpha(k) = J_\alpha(k) + \kappa_{\alpha\beta}e^{-kf_{\alpha\beta}}J_\beta(k) \tag{52}$$

avec

$$f_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha \tag{53}$$

de sorte que

$$\Delta_{f_{\alpha\beta}}\,J_\alpha(k) = \kappa_{\alpha\beta}J_\beta(k) \tag{54}$$

où $\Delta_{f_{\alpha\beta}}$ désigne l'opérateur de dérivation étrangère au point $f_{\alpha\beta}$ ([15, 7, 12, 9]). Ce dernier résultat s'exprime plus simplement en terme des séries formelles T_α des formules (29-44), pour donner:

Theorem 5.1. *Les séries formelles Gevrey-1 $T_\alpha(k) \in \mathbb{C}[[k^{-1}]]_1$ sont résurgentes sommables. Si f_α désigne une valeur critique de profondeur p_α, les singularités vues du mineur $\widehat{T_\alpha}(t)$ de*

$T_\alpha(k)$ sont au plus les $f_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha$ avec $f_\beta \in \Lambda_\alpha$. De plus, dans le cas (générique) où ces $f_{\alpha\beta}$ admettent des arguments distincts, alors les équations de résurgence

$$\Delta_{f_{\alpha\beta}} T_\alpha(k) = \kappa_{\alpha\beta} k^{(p_\alpha - p_\beta)/2} T_\beta(k) \tag{55}$$

définissent complètement la structure résurgente, où p_β ($\leq p_\alpha$) désigne la profondeur de f_β tandis que les constantes $\kappa_{\alpha\beta}$ sont des entiers.

Dans (54) ou le théorème 5.1, l'indice d'intersection $\kappa_{\alpha\beta}$ apparait maintenant comme un *multiplicateur de Stokes*. En théorie de la résurgence, et plus généralement en asymptotique complexe, le calcul effectif de ces multiplicateurs de Stokes est la plupart du temps un problème difficile. Ici, les choses sont facilités par l'interprétation géométrique qu'on en a comme indices d'intersections. Ce sont en premier lieu des entiers, et le théorème 5.1 précise qu'un certain nombre d'entre eux sont nuls, ce qui provient de la nature stratifiée du bord S: si le point critique z_α repose sur la strate $S_1, \cdots, S_p$, l'indice d'intersection $\kappa_{\alpha\beta}$ sera nécessairement nul si f_β n'appartient pas au sous-ensemble $\Lambda_\alpha \subset \Lambda$ formé des valeurs critiques de f et des restrictions $f|$ à l'une ou l'autre des strates définies par les S_i, $i = 1, \cdots, p$.

C'est là plus ou moins toute l'information que l'on peut tirer de la géométrie. En revanche, l'interprétation des $\kappa_{\alpha\beta}$ comme multiplicateurs de Stokes (quantifiés) permet leurs calculs *numériques* effectifs, via les méthodes de l'hyperasymptotique. Ceci est largement développé dans [11], avec un exemple détaillé à l'appui.

6. Asymptotique et points critiques à l'infini

Nous voudrions terminer ces considérations par un retour sur le problème posé par des points critiques à l'infini. A ma connaissance, ce problème prend sa source dans le bel article de Pham [36] (voir aussi [35]) où, en filigrane, transpire déjà la question de la structure asymptotique globale, résurgente, des intégrales oscillantes complexes.

De récents travaux de géomètres (e.g. [33, 19, 20, 39, 8]) donnent aujourd'hui une idée plus claire sur la nature des points critiques à l'infini avec, à la clef, de nombreux exemples disponibles comme support à l'analyse, dont celui de Broughton [5],

$$f(z_1, z_2) = {z_1}^2 z_2 + 2z_1 \tag{56}$$

Il est bien connu que cette fonction f n'admet aucun point critique à distance finie, mais posséde un point critique à l'infini correspondant à la valeur critique $f_\infty = 0$. Quel est l'apport dans l'asymptotique globale d'un tel point critique ? Considérons par exemple l'intégrale à bord

$$I(k) = \int_\Gamma e^{-kf(z_1,z_2)} dz_1 dz_2 \tag{57}$$

avec $\Gamma = \{(z^{(1)}, z^{(2)}) \in [0, +\infty[\times [1, +\infty[\}$. Pour $\Re(k) > 0$, cette intégrale définit une fonction analytique de k qui se laisse mettre sous la forme

$$I(k) = e^{-2k} \int_0^\infty dt\, e^{-kt} \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) \tag{58}$$

L'exponentiel e^{-2k} provient du point critique créé par le coin du bord, la valeur critique associée étant $f_\alpha = f(1,0) = 2$. Sous la forme (58), les propriétés résurgente sont évidentes: $t = -2 = f_\infty - f_\alpha = f_{\alpha\infty}$ est la seule singularité du mineur, et celle-ci provient précisément de la valeur de bifurcation f_∞. Questions: comment pouvait-on prévoir une telle structure singulière? peut-on associer à la singularité à l'infini une "connexion de type Gauss-Manin" naturelle. Un premier pas dans ce sens semble être atteint par la connaissance qu'ont les géomètres de la monodromie associée aux points critiques à l'infini via une extension convenable des formules de Picard-Lefschetz (cf. [19]). On notera cependant que la non-intégrabilité éventuelle des singularités (comme dans notre exemple) corse sensiblement l'analyse.

L'exemple précédent pourra sembler quelque peu artificiel à l'asymptoticien classique, pour qui la contribution de la valeur de bifurcation relative au point critique à l'infini n'intervient pas directement dans l'asymptotique de Poincaré (c'est pourtant bien la présence du point critique à l'infini qui est responsable de la divergence de la série). Un exemple peut-être plus frappant est fourni par l'intégrale

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-kf(z_1,z_2)} dz_1 dz_2 \tag{59}$$

pour $\Re(k) > 0$, avec la fonction de phase

$$f(z_1,z_2) = 1 - 2(z_1 + \frac{1}{4})^2 - 2(z_2 - \frac{i}{4})^2 + (z_1^2 + z_2^2)^2 \tag{60}$$

Un rapide calcul montre que $(z_1 = -1/4, z_2 = i/4)$ est le seul point critique (de Morse) à distance fini. En ignorant la question d'éventuels points critiques à l'infini, on s'attend donc à ce que
1) l'asymptotique quand $k \to +\infty$ soit entièrement gouvernée par la structure locale au point de Morse $(z_1 = -1/4, z_2 = i/4)$.
2) la série asymptotique soit convergente.

Considérons donc l'onglet de Lefschetz Γ passant par le point de Morse, muni de son orientation standard. Une routine standard sur ordinateur (cf. [10]) montre que l'intégrale

$$I_\Gamma(k) = \int_\Gamma e^{-kf(z_1,z_2)} dz_1 \wedge dz_2 \tag{61}$$

admet le symbole $e^{-k} J_\Gamma(k)$ comme série asymptotique, avec

$$J_\Gamma(k) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{3}{3k^3} - \frac{15}{8k^4} + \frac{105}{16k^5} + \dots\right) \tag{62}$$

On peut alors faire deux constatations: 1) à un entier multiplicatif près, l'asymptotique de $I(k)$ devrait être celle de $I_\Gamma(k)$. L'expérience numérique montre une grande discordance entre les valeurs de l'intégrale et l'asymptotique présumée. 2) La série $J_\Gamma(k)$ semble être Gevrey-1 divergente.

Du point de vue de l'analyse, l'explication est la suivante: au $\pi/2$ près, l'asymptoticien reconnaitra en J_Γ la série asymptotique de la fonction $\int_0^\infty \exp(-kt)/\sqrt{1+t}dt$ liée à la fonction d'erreur (plus exactement à $\mathrm{erfc}(\sqrt{k})$). On confirme facilement ce résultat en remarquant que I_Γ (ou $I(k)$) satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^2}{dk^2} + (1 + \frac{3}{2k})\frac{d}{d} + \frac{1}{2k}\right) I = 0 \tag{63}$$

(appliquer l'opérateur différentiel (63) à l'intégrale et voir que la 2-forme obtenue est exacte). On remarque alors que l'équation différentielle (63) admet un point singulier irrégulier à l'infini, les valeurs caractéristiques étant 0 et 1.

Du point de vue géométrique, l'explication tient au fait que la fonction de phase f admet la valeur caractéristique 0 comme valeur de bifurcation associée à l'existence d'un unique point critique à l'infini (cf. [14]: à une transformation près, notre fonction de phase est la fonction $-Y+(XY-1)^2$). C'est précisément cette valeur de bifurcation qui détermine l'asymptotique de la fonction I, qui n'est autre que

$$I(k) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{k}} - \frac{\pi^{3/2}}{2\sqrt{k}}\mathrm{erfc}(\sqrt{k}). \tag{64}$$

Références

[1] V. Arnold, A. Varchenko, S. Gussein-Zadé, *Singularités des applications différentiables I. trad. française, éd. Mir, Moscou (1986).*

[2] V. Arnold, A. Varchenko, S. Gussein-Zadé, *Singularités des applications différentiables II. trad. française, éd. Mir, Moscou (1986).*

[3] R. Balian, C. Bloch, *Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths. Ann. of Physics 85, 514-545 (1974).*

[4] E. Brieskorn, *Die monodromie der isolierten singularitäten von hyperflächen. Manuscripta Math. 2, 103-161 (1970).*

[5] S.A. Broughton, *On the topology of polynomial hypersurfaces. Proc. Symp. of pure Math., 40, A.M.S. Pub., p. 167-178 (1983).*

[6] S.A. Broughton, *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces. Invent. Math. 92, No.2, p. 217-241 (1988).*

[7] B. Candelpergher, C. Nosmas, F. Pham, *Approche de la résurgence. Actualités mathématiques, Hermann, Paris (1993).*

[8] P. Cassou-Noguès, *Sur la généralisation d'un théorème de Kouchnirenko. Compositio Math., 103, p. 95-121 (1996).*

[9] E. Delabaere, *Introduction to the Ecalle theory. In E. Tournier, editor, Computer Algebra and Differential Equations, number 193, London Math. Soc., Lecture Note Series, Cambridge University Press, 59-102 (1994).*

[10] E. Delabaere, C.J. Howls, *Hyperasymptotics for multidimensional Laplace integrals with boundaries. Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear or non-linear (Kyoto, 1998), 119, 145–163, Kyoto Univ. Press, Kyoto (2000).*

[11] E. Delabaere, C.J. Howls, *Global asymptotics for multiple integrals with boundaries. Submitted.*

[12] E. Delabaere, F. Pham, *Resurgent methods in semi-classical asymptotics. Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. A, Vol. 71, N° 1, 1-94 (1999).*

[13] A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York (1992).

[14] A.H. Durfee, *Five definitions of critical point at infinity.* Arnold, V. I. (ed.) et al., Singularities. The Brieskorn anniversary volume. Proceedings of the conference dedicated to Egbert Brieskorn on his 60th birthday, Oberwolfach, Germany, July 1996. Basel: Birkhaeuser. Prog. Math. 162, 345-360 (1998).

[15] J. Ecalle, *Les algèbres de fonctions résurgentes .* Publ. Math. D'Orsay, Université Paris-Sud, 1981.05 (1981).

[16] M.V. Fedoryuk, *La méthode du point selle.* Nauka, Moscou (1977).

[17] B. Gaveau, *Dveloppements asymptotiques de certaines intgrales vanescentes. I. .* Bull. Sci. Math. (2) 115, no. 4, 451–468, (1991).

[18] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection homology theory.* Springer-Verlag, Berlin and New York (1986).

[19] Ha Huy Vui, *La formule de Picard-Lefschetz affine.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 747-450 (1995).

[20] Ha Huy Vui, A. Zaharia, *Families of polynomials with total Milnor number constant.* Math. Ann. 304, 481-488 (1996).

[21] C.J. Howls *Hyperasymptotics for multidimensional integrals, exact remainder terms and the global connection problem.* Proc. Roy. Soc. Lond. A, Vol 453, 2271-2294 (1997).

[22] D. Kaminski, R.B. Paris, *Asymptotics of a class of multidimensional Laplace-type integrals. I. Double integrals.* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 356, 583-623 (1998).

[23] D. Kaminski, R.B. Paris, *Asymptotics of a class of multidimensional Laplace-type integrals. II. Treble integrals.* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 356, 625-667 (1998).

[24] J. Leray, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III).* Bull. Soc. Math. France, 87, 81-180 (1959).

[25] G.V. Liakhovetski, R.B. Paris, *Asymptotic expansions of Laplace-type integrals. III .* Technical Report, Division of Mathematical Sciences, University of Abertay Dundee, Sept. 1999.

[26] M. Loday-Richaud, *Solutions formelles des systèmes différentiels linéaires méromorphes et sommation.* Exposition. Math. 13, no. 2-3, 116–162 (1995).

[27] B. Malgrange, *Intégrales asymptotiques et monodromie.* Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 7, 405-430 (1974).

[28] B. Malgrange, *Sommation des séries divergentes.* Expositiones Mathematicae 13, 163-222 (1995).

[29] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Stud. 61. Princeton Univ. Press: Princeton (1968).*

[30] A. Némethi, A. Zaharia, *On the bifurcation set of polynomial function and Newton boundary. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26, 681-689 (1990).*

[31] J.F. Nye, *Natural focusing and fine structure. IOP-Bristol (1999).*

[32] P. Orlik, *The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point. Real and compl. Singul., Proc. Nordic Summer Sch., Symp. Math., Oslo 1976, 405-474 (1977).*

[33] A. Parusiński, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity. Compositio Mathematica 97, 369-384 (1995).*

[34] F. Pham, *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau. Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris (1967).*

[35] F. Pham, *Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method. Proc. Symposia in Pure Math. 40 , part 2 (1983).*

[36] F. Pham, *La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin. in Systèmes différentiels et singularités, Astérisque 130 (1985).*

[37] F. Pham, *Principe de Huygens et trajectoires classiques complexes, ou Balian et Bloch vingt ans après. Ann. Inst. Fourier 43, 5, 1485-1508 (1993).*

[38] J.P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques. Suppl. au bulletin de la SMF. Panoramas et Synthèses. v. 121. Paris: Société Mathématique de France (1993).*

[39] D. Siersma, M. Tibăr, *Singularities at infinity and their vanishing cycles. Duke Math. J., 80, 3, 771-783 (1995)*

[40] A.N. Varchenko, *Newton polyhedra and estimations of oscillatory integrals. FAA 10, 175-196 (1976).*

[41] A.N. Varchenko, *An asymptotic mixed Hodge structure in vanishing cohomologies. Izv. Acad. Sci. SSSR, ser. mat. 45, 540-591 (1981).*

[42] V. Vassiliev, *Asymptotic exponentials integrals, Newton's diagram, and the classification of minimal points. Functional Analyt. Appl. 11, 163-172 (1977).*

[43] A. Voros, *The return of the quartic oscillator. The complex WKB method Ann. Inst. H.Poincaré, Physique Théorique, 39, 211-338 (1983).*

[44] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. Interscience pub. (1965).*

[45] R. Wong, *Asymptotic approximations of integrals. Boston, MA: Academic (1989).*