Topologie des espaces de dimension trois

Vincent Blanlœil

Résumé

La conjecture de Poincaré était une question ouverte depuis près d'un siècle. L'objectif de cet article est de tenter de donner un sens à cette question, et chemin faisant de constater que des problèmes mathématiques très abstraits peuvent engendrer des questions concrètes sur la nature de notre univers.

1 Introduction

Henri Poincaré (1854-1912) fut l'un des mathématiciens français les plus brillants. Son œuvre est immense, avec des avancées significatives dans différents domaines des mathématiques et de la physique.

La *topologie*, littéralement "connaissance des lieux", est un des domaines des mathématiques auquel le nom de Poincaré reste très attaché. Le topologue s'intéresse à la forme globale des objets. Par exemple on ne fera pas de différence entre une bouée et une tasse à café, l'aspect caractéristique étant le trou dans ces deux objets.

De manière à formaliser cette vision des choses, les mathématiciens se sont efforcés d'inventer de multiples outils. Le plus célèbre, que l'on doit à Henri Poincaré, est appelé *groupe fondamental*.

2 le groupe fondamental

La notion de groupe fondamental, introduite par Poincaré [**Po1**] en 1895, est définie pour des objets abstraits, appelés *espaces topologiques*[1]. Nous n'allons pas les définir ici. Mais puisque les objets à deux dimensions (une surface comme un ballon de baudruche, ou bien la chambre à air d'un pneu) ou à trois dimensions (un volume comme une boule de pétanque, ou bien une bague) que l'on rencontre dans la vie courante peuvent être munis d'une structure d'espaces topologiques, nous allons donner une description du groupe fondamental à l'aide de ces objets concrèts à deux ou trois dimensions. Car bien que la définition du groupe fondamental ne dépende pas de la dimension, il est plus facile de la visualiser sur des objets que l'on peut facilement dessiner ou bien se représenter mentalement. Nous pourrons ensuite nous intéresser au groupe fondamental de notre univers, c'est-à-dire de l'espace à trois dimensions dans lequel nous vivons.

Le terme groupe se rapporte à une structure algébrique sur un ensemble. Plus précisément, une loi de composition interne associative avec un élément neutre doit être définie sur cet ensemble pour pouvoir parler effectivement de groupe. Nous devrons donc munir l'ensemble des éléments du groupe fondamental d'une loi.

Pour simplifier la situtation, nous ne considérerons que des objets à deux ou trois dimensions d'un seul tenant, ce sont en particulier des espaces *connexes*.

Notons X un objet à deux ou trois dimensions avec lequel nous allons définir le groupe fondamental. Tout d'abord fixons un point x_0 dans X. L'ensemble

[1] Les termes en italiques sont des termes mathématiques que nous ne définirons pas tous précisément ici.

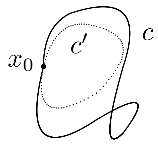

FIG. 1 – Deux chemins c et c'homotopes

que nous allons d'abord considérer, noté $\mathcal{C}_{x_0}(X)$, est constitué des *chemins* commençant et se terminant au point x_0. On les appelle *chemins basés en* x_0. Par chemin on entend la boucle constituée des points de l'image d'une application continue $c : [0,1] \rightarrow X$ telle que $c(0) = x_0$ et $c(1) = x_0$. Un chemin peut passer plusieurs fois par le même point. L'intérêt de prendre X d'un seul tenant est que les chemins basés en x_0 peuvent passer par n'importe quel point de X.

Le problème est que l'ensemble $\mathcal{C}_{x_0}(X)$ contient énormément d'éléments. De manière à le rendre plus petit, nous allons identifier certains de ses éléments. Nous allons définir des classes d'équivalence de chemins. Cette démarche est l'analogue de celle utilisée pour définir les vecteurs du plan comme des classes d'équivalence de bipoints.

Nous dirons que deux chemins c_1 et c_2 de $\mathcal{C}_{x_0}(X)$ sont équivalents s'ils sont *homotopes*. C'est-à-dire s'il existe une application continue

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] \times X & \rightarrow & X \\ (t,x) & \mapsto & h(t,x) \end{array}$$

vérifiant $h(0,x) = c_1(x)$ et $h(1,x) = c_2(x)$. Intuitivement cela revient à passer d'un chemin à l'autre par de petites modifications qui déplacent légèrement le tracé des chemins sur X. Attention on interdit les cassures car les applications doivent rester continues, mais il est tout à fait possible d'augmenter le nombre des points doubles du chemin.

Sur la Figure 1 nous avons représenté deux chemins basés en x_0, ces chemins sont dessinés dans un disque D du plan. Le chemin c en trait plein et le chemin c' en pointillés sont homotopes car on peut passer d'un tracé à l'autre.

Nous noterons $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence des chemins basés en x_0. La loi de composition sur $\pi_1(X, x_0)$, que l'on notera $\bullet$, est alors très simple à définir. Étant donnés deux éléments α_1 et α_2 de $\pi_1(X, x_0)$, on leur associe l'élément $\gamma = \alpha_1 \bullet \alpha_2$ de $\pi_1(X, x_0)$. Pour cela notons c_1 et c_2 deux chemins basés en x_0 qui sont respectivement des représentants de α_1 et α_2. Choisir un représentant revient simplement à tracer un chemin particulier dans la classe d'équivalence. Soit alors c le chemin basé en x_0 obtenu en parcourant d'abord c_1 puis c_2. L'élément γ cherché est alors la classe d'équivalence de c. Si l'on note c_1 et c_2 les applications continues qui définissent les chemins de même nom $c_i : [0,1] \rightarrow X \; t \mapsto c_i(t)$ pour $i = 0, 1$, alors le chemin c est défini par l'application

$$\begin{array}{rcl} c : [0,1] & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} c_1(\frac{t}{2}) & \text{pour} & t \in [0, 1/2] \\ c_2(1 - \frac{t}{2}) & \text{pour} & t \in [1/2, 1] \end{array} \right. \end{array}$$

Tout d'abord, on vérifie que γ ne dépend pas des choix des représentants c_1 et c_2, et ensuite que cette loi muni $\pi_1(X, x_0)$ d'une structure de groupe que l'on appelle groupe fondamental de X en x_0.

3 À quoi sert le groupe fondamental ?

Le groupe fondamental est un outil de *topologie algébrique*. C'est-à-dire que l'on associe un groupe à un objet topologique. L'intérêt de cette manipulation réside dans le fait que deux objets de nature topologique X et Y seront différents[2] si leurs groupes fondamentaux sont différents. On dit alors que le groupe fondamental est un *invariant*. Attention deux objets différents peuvent avoir le même groupe fondamental.

Pour imager cette notion, on peut voir le groupe fondamental comme une caractéristique technique de X analogue à une marque de fabrication. Illustrons cette analogie avec un exemple ; si l'on croise plusieurs voitures sur une route, on peut affirmer que l'on a pas croisé deux fois la même voiture dès qu'elles étaient de marques différentes. De la même manière, deux espaces n'ayant pas le même groupe fondamental seront distincts.

[2]Par différents on entend qui ne sont pas homéomorphes, c'est-à-dire que l'on ne peut pas déformer un objet en l'autre sans coupure ni recollement.

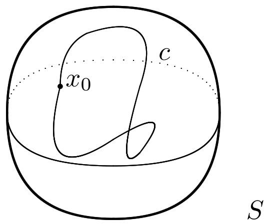

FIG. 2 – Un chemin c sur S^2

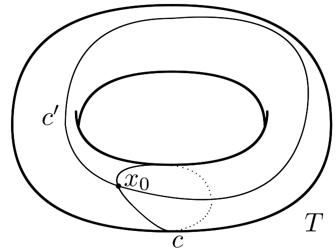

FIG. 3 – Deux chemins c et c' sur T

Étudions quelques exemples simples.

3.1 Les sphères

Notons S^2 une sphère de dimension deux, la surface d'un ballon par exemple. Fixons un point x_0 sur S^2, le groupe fondamental de S^2 est alors réduit à un seul élément. En effet tous les chemins tracés[3] sur S^2 peuvent être déformés petit à petit en un chemin constant, qui consiste à rester au point x_0 (on remarque par la même occasion que le choix du point x_0 n'a pas d'importance ici). Il est agréable d'écrire $\pi_1(S^2, x_0) = \{0\}$ en effet on note souvent 0 l'élément neutre d'un groupe et un groupe à un seul élément est réduit à l'élément neutre.

On appelle *sphère de dimension trois*, notée S^3, l'ensemble des points d'un espace à quatre dimensions, qui sont tous situés à la même distance de l'origine de cet espace. Remarquons qu'il faut un espace de dimension quatre pour représenter S^3. De même S^2 est constitué des points d'un espace de dimension trois qui sont tous situés à la même distance de l'origine, et S^2 ne peut pas être représentée dans un espace de dimension deux.

Comme dans le cas de S^2 il est assez facile de se convaincre que le groupe fondamental de S^3 est réduit à $\{0\}$.

3.2 Le tore

Ce que l'on appelle *tore* est en fait une surface qui correspond à la chambre à air d'un pneu. Soit T un tore. Après avoir fixé un point x_0 sur T examinons différentes possibilités pour des chemins basés en x_0. Si le chemin considéré ne s'éloigne pas trop de x_0 il pourra être ramené au chemin constant. Par contre si le chemin fait le tour du pneu, comme c sur la figure 3, il est impossible de le déformer en le chemin constant. Le groupe fondamental de T n'est pas réduit à $\{0\}$.

Remarquons qu'il existe beaucoup d'autres chemins sur T que l'on ne peut pas déformer en le chemin constant. Pour cela il suffit par exemple de faire le tour du trou comme avec c' sur la figure 3, ou bien en parcourant c et c' à plusieurs reprises.

On voit donc que le Tore T et la sphère S^2 ont des groupes fondamentaux différents. Mathématiquement cela traduit le fait qu'il n'existe pas d'application bijective bicontinue entre la sphère et le tore, intuitivement c'est parce que l'on ne peut pas déformer une sphère en tore sans cassure ni recollement.

4 Le groupe fondamental de notre univers.

Connaissant le groupe fondamental, il est assez naturel, après l'avoir vu fonctionner sur des exemples simples de se demander quel est le groupe fondamental de notre univers ? À première vue on peut être tenté de penser qu'il est réduit à un seul élément, c'est-à-dire que tous les chemins que l'on peut tracer dans notre univers peuvent se déformer en le chemin constant.

Ce réflexe est dû au fait que naturellement le cerveau humain n'imagine pas d'espace à trois dimen-

[3]Attention les chemins considérés doivent impérativement rester sur S^2 et ne pas sortir de la surface.

sions différent de l'espace ambiant dans lequel nous vivons. Et comme dans la petite partie de l'univers qui nous entoure il est clair que tous les chemins que l'on peut représenter se ramènent au chemin constant, notre intuition est faussée.

Pour pouvoir imaginer qu'il peut en être autrement, il faut avoir un modèle d'univers à trois dimensions pour lequel le groupe fondamental n'est pas réduit à $\{0\}$.

4.1 Le tore de dimension 3

Construisons un espace à trois dimensions pour lequel le groupe fondamental n'est pas réduit à un seul élément. Pour cela partons d'un cube à trois dimensions. Et construisons l'objet H, abstrait, obtenu en identifiant la face supérieure avec la face inférieure, la face de droite avec la face de gauche et enfin la face de devant avec la face arrière. Identifier veut dire que tout se passe comme si l'on avait pu étirer le cube et recoller ses faces les unes sur les autres. Le résultat est un objet avec des propriétés assez surprenantes. En effet si je vis dans H et si je me déplace vers la face avant du cube qui a servi à construire H, lorsque je traverse la face avant je traverse la face arrière (à laquelle elle a été identifiée) et donc je reviens à mon point de départ. Ce déplacement matérialise un chemin c dans H. Si maintenant je tente de déformer c je ne réussirait jamais à le ramener au chemin constant. Le groupe fondamental contient donc au moins un élément autre que l'élément neutre. En fait on peut trouver deux autres chemins non constants, il suffit pour cela de traverser la face supérieure pour l'un et la face de droite pour l'autre.

La difficulté est que l'on ne peut pas donner de représentation de H dans notre univers à trois dimensions. La seule façon serait d'utiliser un espace à quatre dimensions.

Il est possible de construire beaucoup[4] de modèles d'univers à trois dimensions avec des groupes fondamentaux très compliqués.

A prioiri rien ne nous permet de prédire quel est le groupe fondamental de notre univers. C'est-à-dire que nous ne pouvons pas être sûrs qu'il n'existe pas de chemin basé en la terre, et allant très loin dans notre univers, qui ne se déforme pas en le chemin constant. L'expérience pour le prouver consiste à partir de la terre à bord d'un vaisseau spatial qui déroule un immense câble derrière lui. Une fois revenu sur terre on essaye de réduire la longueur du câble en tirant dessus. Si le groupe fondamental de notre univers n'est pas réduit à un seul élément, et si le vaisseau spatial a parcouru un chemin qui représente un élément non nul dans ce groupe ; alors on ne pourra pas ramener totalement le câble sur terre. Pour illustrer cette expérience théorique, on peut penser à une araignée vivant sur un tore T. Celle-ci tire sur son fil après avoir fait le tour de T (en suivant un chemin analogue à c sur la figure précédente). On voit bien que le fil ne pourra pas être totalement ramené au point de départ.

L'expérience décrite a simplement une vocation pédagogique, et on comprend bien que la difficulté pour nous est de trouver des moyens pour détecter un groupe fondamental non réduit à un élément pour notre univers. En fait on peut montrer qu'une observation très détaillée du fond cosmologique diffus peut éventuellement permettre d'avoir des éléments de réponse. En effet sous certaines hypothèses réalistes sur l'univers, un groupe fondamental non réduit à $\{0\}$ entraînerait l'exitence de points, sur le fond cosmologique diffus, au voisinage desquels les fluctuations de la température seraient identiques. Ces points seraient de plus situés sur des cercles. D'un point de vue observationnel, cela revient à mesurer très précisément les fluctuations de température et constater qu'elles sont comparables sur des cercles. Nous citerons le livre [**L**] et les articles [**B-R**, **C-S-S**, **L-W-R-L-U**] pour un exposé précis sur ces méthodes. La tendance actuelle laisse envisager un groupe fondamental qui ne serait pas du tout réduit à un seul élément, mais dans lequel on pourrait trouver six générateurs distincts.

5 La conjecture de Poincaré.

Nous nous sommes intéressés au groupe fondamental d'un espace topologique de dimension trois particulier, celui de notre univers. Contrairement à ce que

[4] Une infinité en fait.

le non spécialiste pourrait penser, il est très diffcile de bien comprendre la nature topologique des espaces de dimension trois.

Henri Poincaré en était sans doute conscient, la conjecture qui porte son nom est relative aux espaces topologiques de dimension trois. En 1904, H. Poincaré [**Po2**] avait construit un espace de dimension trois qui était différent de la sphère de dimension trois et qui avait un groupe fondamental non réduit à un seul élément. Il formula alors la question suivante

Existe-t-il un espace topologique de dimension trois[5] *autre que la sphère de dimension trois, dont le groupe fondamental est* $\{0\}$ *?*

H. Poincaré conclu le Cinquième complément à l'analysis situs par ces mots *"Mais cette question nous entraînerait trop loin."*. Il avait clairement saisi la grande difficulté du problème. Il aura fallu attendre près d'un siècle pour avoir une réponse à cette question. Car bien que non encore publiés, les travaux de G. Perelman [**P1**, **P2**, **P3**] répondent par la négative à cette question. Les méthodes utilisées par G. Perelman sont très techniques et surtout font appel à des résultats de domaines variés des mathématiques.

L'approche de Perelman n'est pas uniquement topologique, il étudie les espaces de dimension trois munis d'une structure géométrique. C'est-à-dire que l'on y définit une application, appelée *métrique*, qui permet de mesurer la distance entre les points. En étudiant le comportement des métriques sur un espace il est possible d'avoir des informations de nature topologique. Plus précisément on étudie une famille à un paramètre associée à cette métrique. Cette famille est constituée de métriques satisfaisant une équation différentielle et est appelée flot de Ricci. Dans ses travaux G. Perelman explique précisément tous les comportements possibles du flot de Ricci. Cela lui permet ensuite de démontrer la conjecture de Poincaré.

À cause de la très grande complexité des techniques mises en œuvre dans l'ensemble des travaux de Perelman, la validité de ces derniers n'est pas encore clairement établie. Beaucoup de spécialistes sont convaincus par les arguments, et par les avancées significatives qui en résultent dans ce domaine des mathématiques. Cela ne semble plus qu'être une question de temps pour avoir une démonstration détaillée et accessible de la conjecture de Poincaré.

En août 2006, la médaille Fields a été attribuée à A. Okounkov, G. Perelman, T. Tao et W. Werner ; cette distinction est décernée tous les quatre ans à des mathématiciens de moins de quarante ans. Cette récompense est une preuve marquante de la reconnaissance des travaux de G. perelman par la communauté mathématique.

V. BLANLŒIL
Département de Mathématiques,
Université Louis Pasteur Strasbourg,
7 rue René Descartes,
67084 Strasbourg cedex, France
blanloeil@math.u-strasbg.fr

[5] Ici on suppose cet espace *connexe compact et sans bord*

Références

[**B-R**] V. Blanlœil, B. Roukema, *Three-dimensional topology-independent method to look for global topology*, Classical Quantum Gravity **15** (1998), pp. 2645–2655.

[**C-S-S**] N. J. Cornish, D. N. Spergel, G. D. Starkman, *Circles in the sky : finding topology with the microwave background radiation*, Classical Quantum Gravity **15** (1998), pp. 2657-2670

[**L-W-R-L-U**] J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, J.-P. Uzan, *Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background*, Nature **425** (2003), pp. 593-595.

[**L**] J.-P. Luminet, *L'Univers chiffonné*, Gallimard/Folio Essais (Paris), 2005.

[**P1**] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint, novembre 2002. arXiv :math.DG/0211159

[**P2**] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, mars 2003. arXiv :math.DG/0303109

[**P3**] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow*, preprint, juillet 2003. arXiv :math.DG/0307245

[**Po1**] H. Poincaré, *Analysis situs*, J. de l'école Polytechnique **1** (1895), pp. 1–121.

[**Po2**] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1904), pp. 45–110.