Invariants symplectiques et semi-classiques des systèmes intégrables avec singularités

Vũ Ngọc San [*]

Résumé

On définit les notions de feuilletages classiques et semi-classiques pour les systèmes complètement intégrables avec singularités. Les résultats de classification standard (telles les coordonnées actions-angles semi-classiques) sont rappelés. Le cas du feuilletage classique de type foyer-foyer est examiné en détail, où des nouveaux invariants semi-globaux apparaissent. Ces invariants sont identifiés dans les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières qui donnent le spectre conjoint au voisinage d'une valeur singulières de l'application moment.

1 Énoncé du problème

0. – La motivation première pour les résultats présentés ici est l'étude de la limite semi-classique $h \to 0$. Autrement dit, on se donne un espace classique (variété symplectique) M et une algèbre d'opérateurs sur un certain espace de Hilbert vue comme une déformation formelle de l'algèbre des observables classiques (fonctions C^∞ de M). h est alors le paramètre de déformation.

On se placera dans le cadre le plus simple où $M = T^*X$ est un cotangent (X est une variété différentielle de dimension n), et l'algèbre semi-classique est donnée par les h-opérateurs pseudo-différentiels, dont la structure locale est définie par la quantification de Weyl à petit paramètre: à $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est associé l'opérateur $\hat{H}$ suivant:

$$\hat{H}u(x) = (Op_h^W(H)u)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} H((x+y)/2,\xi)u(y)dyd\xi.$$

Si H ne dépend pas de h, c'est par définition le symbole principal de $\hat{H}$.

[*]CNRS-Institut Fourier, UMR 5582. BP 74, F-38402 Saint Martin d'Hères

Il serait naturel d'étendre les résultats de cet article à d'autres types de quantification semi-classique, comme celle des opérateurs de Toeplitz, qui permet la prise en compte de variétés symplectiques compactes (et donc de la réduction symplectique). À ce sujet, on pourra consulter [2] ou [1].

1. – X étant toujours de dimension n, on considère n opérateurs pseudo-différentiels $P_1,\dots,P_n$, de symboles principaux réels, qui commutent deux-à-deux:

$$[P_i, P_j] = 0$$

(Par exemple un opérateur de Schrödinger $-\frac{h^2}{2}\Delta + V(r)$ sur $\mathbb{R}^2$ avec un potentiel radial commute avec l'opérateur $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$.) Les symboles principaux p_j commutent alors deux-à-deux pour le crochet de Poisson et forment donc un système classique complètement intégrable, au sens de Liouville.

On s'intéresse au faisceau $\mathscr{L}_h$ des solutions microlocales u du système d'équations:

$$P_i u = O(h^\infty). \tag{1}$$

Autrement dit, si $\Omega \subset M$, le module des *sections* de $\mathscr{L}_h$ au dessus de Ω, noté $\mathscr{L}_h(\Omega)$, est l'ensemble des distributions u à croissance modérée en h et telles que le front d'onde semi-classique (ou microsupport) $WF_h(P_i u)$ de $P_i u$ ne rencontre pas Ω pour tout $i = 1,\dots,n$, modulo les u dont le microsupport est déjà en dehors de Ω.

Pour h fixé, et pour un ouvert Ω non simplement connexe, $\mathscr{L}_h(\Omega)$ est en général réduit à zéro. Pour éviter de se restreindre dès maintenant à l'ensemble des valeurs de h pour lesquelles il existe une solution non triviale, on supposera toujours que les opérateurs P_j dépendent d'un paramètre multidimensionnel E. Ainsi, la non-nullité de $\mathscr{L}_h^E(\Omega)$ se lit sur une certaine relation entre E et h qu'on appellera *condition de Bohr-Sommerfeld*.

Si on pose $P_j^{E_j} = P_j - E_j$, et si Ω est un voisinage d'un tore invariant du système classique complètement intégrable associé, on retrouve les conditions de Bohr-Sommerfeld standard, qui permettent de déterminer le *spectre conjoint* des P_j, dans une fenêtre bornée de $\mathbb{R}^n \ni E$.

3. – La théorie microlocale du front d'onde [9] nous dit que les solutions de (1) sont microlocalisées sur les ensembles de niveau $\Lambda_E := (F^E)^{-1}(0)$, où

$$F^E = (p_1^E,\dots,p_n^E) : M \to \mathbb{R}^n$$

est l'application moment classique.

Je supposerai toujours que F^E est propre, ce qui assure que les Λ_E sont compacts. La connaissance *locale* des Λ_E permet de déterminer la nature des sections locales du faisceau $(\mathscr{L}_h^E, \Lambda_E)$. Par propagation des singularités, on en déduit les conditions de recollement qui donnent l'existence d'une *section globale* de ce faisceau, et donc d'une solution globale de notre problème. Ces conditions de Bohr-Sommerfeld relient E et h et s'interprètent donc au niveau semi-classique non pas en terme de la géométrie d'une "feuille" donnée Λ_E, mais de tout le *feuilletage* des Λ_E, pour E dans un voisinage d'un E_0.

Je m'intéresserai dans cet article aux relations entre la géométrie du feuilletage classique et les conditions de Bohr-Sommerfeld semiclassiques. Cette approche, appliquée au problème spectral, permet non seulement de prévoir les caractéristiques du spectre connaissant les opérateurs, mais aussi de résoudre certains problèmes spectraux inverses, où la donnée du spectre fournit les invariants classiques du problème.

Dans l'optique de l'analyse semi-classique microlocale, la connaissance de la dynamique classique sur Λ_E est censée fournir de précieux renseignements sur le comportement quantique du système d'opérateurs pseudo-différentiels associés. Puisque celle-là est invariante par difféomorphisme symplectique, on s'attend (théorème d'Egorov — voir par exemple [12]) à ce qu'une action symplectique classique puisse se relever en une conjugaison de nos opérateurs pseudo-différentiels par des opérateurs unitaires. On montre dans la section suivant que c'est souvent le cas.

Réciproquement, la donnée des conditions de Bohr-Sommerfeld, mêmes si elles ont été déterminées à partir de formes normales locales et des équations de transport, renseignent forcément sur la géométrie globale des feuilles du feuilletage classique (c'est ce que j'appellerai la géométrie *semi-globale* du feuilletage). Je montrerai en section 3 comment certains invariants semi-classiques d'un problème de type foyer-foyer permettent de classifier entièrement le feuilletage classique sous-jacent, dans un voisinage de la feuille singulière.

2 Résultats "standards"

Pour simplifier, je supposerai toujours que la dépendance en E de notre système est du type spectral, ie. E varie dans un ouvert D relativement compact de $\mathbb{R}^n$ et $P_i^E = P_i - E_i$. Cela implique en particulier, et ce sera crucial, que $\frac{\partial(P^E)}{\partial E}$ est inversible.

1. – Avant d'énoncer les résultats classiques, il est commode de fixer quelques définitions.

En général, on appelle système complètement intégrable un n-uplet d'hamiltoniens $(p_1, \ldots, p_n)$ qui commutent deux-à-deux pour le crochet de Poisson, et dont les différentielles sont presque partout indépendantes. Une telle donnée définit deux objets géométriques intéressants: d'une part un *feuilletage lagrangien singulier*, qui est la collection des ensembles de niveau $\Lambda_E := \cap_j p_j^{-1}(E)$ pour $E \in \mathbb{R}^n$; ces feuilles sont des sous-variétés lagrangiennes au voisinage de leurs points réguliers (où les dp_j sont linéairement indépendants). D'autre part l'*application moment* $F = (p_1, \ldots, p_n)$ est vue comme une carte de l'espace des feuilles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Si l'on souhaite oublier l'application moment, on dira qu'on étudie le feuilletage. Dans le cas contraire, on s'intéresse à la *fibration*.

Ainsi, on dira que deux feuilletages sont équivalents s'il existe un symplectomorphisme de l'espace total de l'un à celui de l'autre qui envoie une feuille sur une feuille. On dira que deux fibrations F et F' sont équivalentes s'il existe symplectomorphisme φ de l'espace total de l'un à celui de l'autre tel que $F' \circ \varphi = F$. Remarque: les feuilletages définis par les fibrations $F = (p_1, \ldots, p_n)$ et $F' = (p'_1, \ldots, p'_n)$ sont équivalents si et seulement s'il existe un φ symplectique tel que

$$\forall i, j, \qquad \{p'_i \circ \varphi, p_j\} = 0.$$

Une telle équivalence sera dite *locale* si on étudie le feuilletage au voisinage d'un point de M. Je la dirai *semi-globale* si elle concerne un voisinage invariant par la dynamique; par exemple: un voisinage d'un tore de Liouville. Au voisinage d'un point fixe de type elliptique, les deux notions coïncident. Je ne parlerai pas ici d'équivalence globale. On connaît d'ailleurs peu de résultats à ce sujet (voir malgré tout [6] et [11]).

À une feuille classique $\Lambda \subset \Lambda_E$ on associe le *faisceau des solutions microlocales sur* Λ $(\mathscr{L}_h, \Lambda)$ du système $P_i^E u = O(h^\infty)$. On obtient ainsi une notion raisonnable de feuilletage semi-classique; deux tels feuilletages seront équivalents s'il existe un opérateur intégral de Fourier microlocalement elliptique envoyant toute solution microlocale du premier système (section *locale* du faisceau) sur une solution du deuxième (pour une valeur éventuellement différente du paramètre E). La transformation canonique associée est alors une équivalence du feuilletage classique sous-jacent.

De même une fibration semi-classique est la donnée des n opérateurs $P := (P_1, \ldots, P_n)$, et deux fibrations semi-classiques P et P' seront équivalentes lorsqu'il existe un opérateur intégral de Fourier U tel que $U^{-1}P'U = P$.

Je rappelle enfin qu'un point $m \in M$ d'un feuilletage classique est dit *régulier* si le feuilletage au voisinage de m peut être défini par une application moment (fibration) de différentielle injective en m. Sinon le point m est singulier, et de façon générale on appelle rang de la singularité le rang maximum de la différentielle en m d'une fibration définissant localement le feuilletage.

2. – Le premier résultat bien connu sur le sujet est le suivant:

Théorème 0 (Darboux-Carathéodory) *Au voisinage d'un point régulier, les fibrations classiques sont toutes équivalentes.*

En effet, au voisinage d'un point régulier pour l'application moment $(p_1, \dots, p_n)$, les fonctions p_i peuvent être prises comme variables moments d'un carte symplectique. Le même énoncé pour les feuilletages en découle évidemment. Autrement dit, il n'y a pas d'invariants locaux pour un feuilletage régulier.

D'un grand intérêt est le résultat suivant, qui permet de rendre parfaitement transparentes les questions de "propagation des singularités":

Théorème $\hat{\mathbf{0}}$ *Au voisinage d'un point régulier, les fibrations semi-classiques sont toutes équivalentes .*

Le même énoncé vaut donc pour les feuilletages. On en déduit que $\mathscr{F}_h$ est, au voisinage d'un point régulier, équivalent au feuilletage des solutions microlocales de $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, qui est un module libre de rang 1. On en déduit que $\mathscr{F}_h$ est représentable près des points réguliers par un fibré plat, et une solution microlocale se propage donc de façon unique par le transport parallèle naturel de ce fibré.

Théorème 1 (Arnold-Liouville) *Au voisinage d'une feuille régulière, les feuilletages classiques sont tous équivalents .*

Un feuille régulière est une feuille invariante du feuilletage dont tous les points sont réguliers: c'est donc un tore de Liouville. Le théorème dit qu'il n'y a pas d'invariants semi-globaux pour ces tores. L'énoncé ne vaut bien sûr pas pour les fibrations, puisque celles-ci encodent les *périodes* des trajectoires périodiques, qui sont des invariants symplectiques. Deux fibrations diffèrent donc par la composition à gauche par un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$. On trouve une bonne preuve de ce théorème dans [7].

Théorème $\hat{\mathbf{1}}$ *Au voisinage d'une feuille régulière, les feuilletages semi-classiques sont tous équivalents. En revanche, les fibrations semi-classiques sont déterminées par la donnée d'une déformation formelle d'un difféomorphisme local de*

$\mathbb{R}^n$*:*

$$\alpha(E;h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^k \alpha_k(E),$$

où $\alpha_k \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ *et* α_0 *est un difféomorphisme local.*

Le théorème est énoncé et démontré, dans un cadre légèrement différent, dans [3]. Le modèle semi-global ("coordonnées actions-angles semi-classiques") est celui des opérateurs $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \alpha(E;h)$ sur le tore $\mathbb{T}^n$. $\alpha_0(E)$ est constitué des intégrales d'action sur le tore lagrangien Λ_E, et α_1 contient la donnée des symboles sous-principaux et des indices de Maslov sur Λ_E. L'équation $\alpha(E;h) \in 2\pi h\mathbb{Z} + O(h^\infty)$ est la condition de Bohr-Sommerfeld qui permet la description du spectre dans le domaine D (indépendant de h). Si on ne connaît que la série de Taylor de $\alpha(E;h)$, ces conditions sont pertinentes pour décrire les "états semi-excités" du spectre, c'est-à-dire pour des domaines de E admissibles de taille $O(h^\gamma)$, $0 < \gamma < 1$.

3. – Il reste à prendre en compte les singularités possibles du feuilletage. Comme pour la théorie des singularités des fonctions différentiables, il existe un hypothèse de *non-dégénérescence* (à la Morse-Bott) pour la singularité d'une application moment sous laquelle on sait bien ce qu'il se passe. En catégorie C^∞ les résultats se trouvent essentiellement dans [8] (voir aussi [14] pour d'autres références). Ces singularités, en rang 0, se réduisent essentiellement (au niveau du feuilletage) à des blocs symplectiques de dimension 2 de type elliptique ($p = x^2 + \xi^2$) ou hyperboliques ($p = x\xi$) et à des blocs de dimension 4 de type foyer-foyer (dits aussi loxodromiques) que j'étudie en détail en section suivante. On note m_e, m_h et m_f le nombre de blocs respectivement elliptiques, hyperboliques et foyer-foyer, de sorte que $m_e + m_h + 2m_f = n$.

Théorème 2 (Eliasson) *Au voisinage d'un point singulier non-dégénéré de type donné* (m_e, m_h, m_f)*, les feuilletages classiques sont tous équivalents.*

Il n'y a donc pas d'invariants locaux du feuilletage en ces points. Pour autant, ce n'est plus le cas des fibrations; dans le cas complètement elliptique, elles sont classées par les difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ (reparamétrisation de l'énergie E). En présence d'autres types de singularités, on peut se restreindre à la série de Taylor de ces difféomorphismes (voir [14] – et la section suivante pour le cas foyer-foyer).

L'énoncé suivant généralise un résultat de [4]:

Théorème $\hat{\mathbf{2}}$ ([14]) *Au voisinage d'un point singulier non-dégénéré de type donné* (m_e, m_h, m_f)*, les feuilletages semi-classiques sont tous équivalents.*

L'énoncé pour les fibrations est, à l'instar du cas classique, plus délicat à formuler en présence de singularités hyperboliques (voir par exemple [5, sec 2.4] pour une façon de résoudre le problème). Il se simplifie dans la catégorie analytique: là encore, les fibrations diffèrent l'une de l'autre par une déformation semi-classique d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ (reparamétrage semi-classique de l'énergie E). Le cas de singularités non-dégénérées de rang > 1 se traite de façon analogue, et les théorèmes **2** et $\hat{\mathbf{2}}$ sont encore valables. Il faut d'abord réduire par la partie localement libre de l'action du système complètement intégrale pour se ramener au cas d'un point fixe.

Remarque . Il n'est pas étonnant qu'un théorème de forme normale classique donne lieu à un résultat semi-classique analogue. La dérivation du résultat semi-classique, vu comme une déformation par le paramètre h du résultat classique, repose sur la résolution d'équations "de transport" ou "homologiques" qui sont automatiques lorsque l'énoncé classique est valide "à paramètre". $\triangle$

3 Le cas foyer-foyer

Je n'ai pas encore abordé le problème de la classification *semi-globale* de feuilletages à singularités. Au niveau classique, des invariants cohomologiques étendant ceux de Duistermaat (monodromie, classe de Chern) ont été proposés dans [11], mais la seule classification effective qui existait pour le moment était le cas de la dimension 1 traité par Toulet [6]. Je me propose d'expliquer ici la classification que je décris en détail dans [15] pour le cas foyer-foyer en dimension $n = 2$, et dont je pense qu'elle peut s'adapter à toutes les singularités non-dégénérées.

3.1 Conditions de Bohr-Sommerfeld

Pour une fois, le point de départ de cette classification a été pour moi de nature semi-classique; l'écriture des conditions de Bohr-Sommerfeld adaptées au problème des singularités de type foyer-foyer ($n = 2$). Voici ces conditions, pour un système (P_1, P_2) admettant une fibre foyer-foyer simple (avec un seul point critique) d'énergie $(p_1, p_2) = (0, 0)$:

Théorème BS ([13]) *Il existe un reparamétrage semi-classique de l'énergie:*

$$\mathbb{R}^2 \ni E \to \varepsilon(E;h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{(k)}(E)h^k \in \mathbb{R}^2$$

et une fonction

$$\lambda(E;h) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda_k(E)h^k \in \mathbb{R}$$

tels que le système $P_1u = E_1u$, $P_2u = E_2u$ ait une solution non triviale pour (E_1, E_2) dans un voisinage de l'origine si et seulement si

$$\varepsilon_2 \in h\mathbb{Z} + O(h^\infty) \tag{2}$$

et

$$\lambda + \frac{k\pi}{2} - \frac{\varepsilon_1}{h}\ln(2h) - 2\arg\Gamma\left(\frac{i\varepsilon_1/h + 1 + k}{2}\right) \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h^\infty). \tag{3}$$

On a noté $\lambda = \lambda(E;h)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sont les deux composantes de $\varepsilon(E;h)$. Enfin k est l'entier donné par la condition (2).

Dans cet énoncé, il faut voir $\varepsilon(E;h)$ comme l'*invariant semi-classique local de la fibration*. En réalité, bien qu'on puisse effectivement montrer que ε_2 est unique (à $h\mathbb{Z}$ près), on n'a que l'unicité du *jet d'ordre infini* (la série de Taylor) de ε_1. On verra qu'il est raisonnable de ne pas espérer davantage. Ceci étant, puisque le résultat net de ces conditions est la description du spectre conjoint de P_1, P_2, qui est de nature globale, il est tentant de voir $\lambda(E;h)$ comme l'invariant semi-classique *semi-global* de la fibration. A fortiori, il doit encoder les *invariants semi-globaux classiques* de la fibration classique associée.

Pour mettre cet énoncé en perspective, il est utile de le comparer aux conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles pour un tore régulier. Dans ce dernier cas, il n'y a pas d'invariant semi-global du feuilletage, mais deux invariants (deux fonctions indépendantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) pour la fibration, qui correspondent aux deux cycles générateurs de l'homologie du tore. Les conditions de Bohr-Sommerfeld s'expriment comme la "quantification" de ces invariants en deux entiers (nombres quantiques) indépendants. Pour le cas foyer-foyer, on a affaire à un tore pincé. J'appellerai le petit cercle celui qui dégénère en un point (cycle évanescent), et le grand cercle celui qui devient une orbite homocline. Je parlerai de "bifurcation" pour l'opération de pincement progressif du tore. Du point de vue quantique, c'est le petit cercle qui semble le moins perturbé par cette bifurcation; bien qu'il soit évanescent, la condition de Bohr-Sommerfeld associée persiste, sans voir la bifurcation: c'est la condition (2). En revanche, la bifurcation est cruciale pour le grand cercle. Puisque ce n'est plus une orbite périodique, l'invariant semi-global associé pour la fibration disparaît, ou plus précisément se scinde en deux morceaux: un invariant *local* pour la fibration (ε_1), et un invariant semi-global λ pour le *feuilletage*. L'apparition de la fonction Gamma est ce qu'appelleraient les physiciens un phénomène purement quantique, décrivant quelques niveaux d'énergie près de la bifurcation. Le semi-classique réapparaît dans l'*asymptotique de Stirling* qui redonne les conditions régulières [13].

3.2 Classification semi-globale du feuilletage

On se donne une variété symplectique M de dimension 4 munie d'une fibration complètement intégrable $F = (p_1, p_2)$. On suppose qu'il existe un point singulier m de type foyer-foyer: l'algèbre de Lie abélienne engendrée par les hessiennes $p_1''(m)$ et $p_2''(m)$ sur l'espace tangent T_mM admet la base suivante, dans des coordonnées canoniques (x, ξ, y, η):

$$q_1 = x\xi + y\eta, \qquad q_2 = x\eta - y\xi.$$

C'est une singularité générique pour les systèmes intégrables quadratiques (elle l'est probablement aussi dans la catégorie des systèmes intégrables C^∞... à éclaircir). Le théorème d'Eliasson (théorème **2**) assure que le système est *localement* linéarisable: il existe un symplectomorphisme φ d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^4$ dans un voisinage de m et un difféomorphisme local G de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tels que

$$F \circ \varphi = G(q_1, q_2).$$

Puisqu'on ne s'intéresse qu'au feuilletage, on peut supposer, quitte à composer par G^{-1}, que ce dernier est défini par un application moment F valant (q_1, q_2) dans la carte φ a voisinage du point singulier m. On notera $F = (H_1, H_2)$.

Une étude topologique standard (voir par exemple [10] ou [13]) montre que, sous l'hypothèse que m est le seul point singulier de la feuille $\Lambda_0 := \mathscr{F}^{-1}(0)$, cette feuille est un tore pincé, schématisé à la figure 1. Sur les feuilles avoisinantes, qui sont des tores de dimension 2, on définit classiquement les 1-formes dites "de périodes" de la façon suivante. Une 1-forme fermée $\tau := t_1 dc_1 + t_2 dc_2$ sur $\mathbb{R}^2$ (muni des coordonnées (c_1, c_2)) se relève par la fibration F via la dualité symplectique en un champ hamiltonien égal à $t_1 \mathscr{X}_1 + t_2 \mathscr{X}_2$ (on a noté $\mathscr{X}_i$ le champ hamiltonien de la fonction H_i). On note g_τ le flot au temps 1 de ce champ de vecteurs. L'association $\tau \to g_\tau$ est une action symplectique localement libre sur M des 1-formes fermées sur $\mathbb{R}^2$, qui commute avec F (c'est-à-dire que la restriction de τ à $T_c\mathbb{R}^2$ agit sur $\Lambda_c := F^{-1}(c)$). Le théorème d'Arnold-Liouville dit que cette action admet un stabilisateur global donné par un réseau de dimension 2 de 1-formes fermées, appelées "formes de périodes": celles pour lesquelles le flot du champ hamiltonien $t_1 \mathscr{X}_1 + t_2 \mathscr{X}_2$ est périodique de période 1.

Le réseau des 1-formes de périodes "explose" lorsque c tend vers la valeur critique $(0, 0)$. Plus exactement, on devine par la figure 1 qu'une des périodes est conservée (celle du "petit cercle" du tore pincé) alors que l'autre tend vers l'infini (celle de l'orbite homocline).

On définit une bonne régularisation des 1-formes de périodes à l'origine en soustrayant la partie divergente, de la façon suivante. Soit Ω un petit voisinage de m dans lequel est définie la carte φ. Fixons un point A_c sur $\Lambda_c \cap \Omega$, dépendant régulièrement de c pour c proche de 0 et notons $S^1(A)$ l'orbite de A sous l'action de q_2 (après avoir remarqué que le flot du champs hamiltonien de q_2 en dehors de m est périodique de période 2π...). Pour $c \neq 0$, soit $\tau_1(c) > 0$ le temps nécessaire au flot de $\mathscr{X}_1$ pour envoyer $S^1(A)$ sur elle-même pour la première fois ($\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$ commutent, donc τ_1 est le temps pour n'importe quel point de $S^1(A)$ de revenir pour la première fois sur $S^1(A)$). On note A' l'image de A par cette application, et

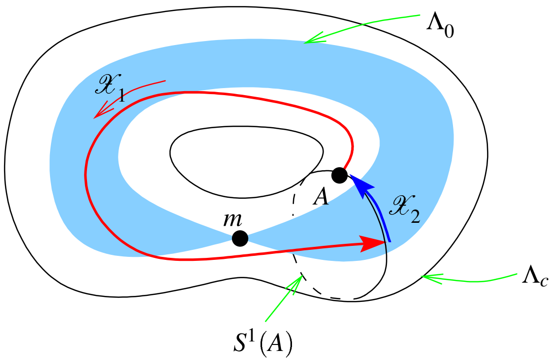

FIG. 1 – *Construction de l'invariant σ*

$\tau_2(c)$ le temps pour relier A' à A par le flot de $\mathscr{X}_2$. τ_1 et τ_2 ne dépendent pas du choix de A, et on définit la 1-forme de période suivante, sur un voisinage épointé de 0 dans $\mathbb{R}^2$:

$$\tau := \tau_1 dc_1 + \tau_2 dc_2.$$

Enfin, avec la détermination principale du logarithme complexe on définit

$$\sigma := (\tau_1(c) + \Re(\ln c))dc_1 + (\tau_2(c) - \Im(\ln c))dc_2.$$

Lemme ([15]) *σ s'étend en une 1-forme fermée C^∞ et univaluée au voisinage de l'origine.*

Théorème S ([15]) *Soit $S(c_1, c_2)$ la primitive de σ s'annulant à l'origine, et $(S)^\infty$ sa série de Taylor en 0. Alors $(S)^\infty$ est l'invariant du feuilletage, c'est-à-dire:*

1. *$(S)^\infty$ est un invariant symplectique: il ne dépend pas des choix dans la construction (ie du choix de la carte φ);*
2. *deux feuilletages complètement intégrables avec point singulier de type foyer-foyer simple (la feuille critique admet un seul point critique) ayant le même $(S)^\infty$ sont symplectiquement difféomorphes au voisinage de leur feuille critique.*

3. *toute série formelle à deux variable sans terme constant est l'invariant d'un feuilletage complètement intégrable avec point singulier de type foyer-foyer simple.*

La preuve du lemme réside dans l'expression explicite des flots de $\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$ dans la carte φ: dans les coordonnées (x, y, ξ, η) on note

$$c = c_1 + ic_2, \quad z_1 = x + iy, \quad z_2 = \xi + i\eta.$$

Alors l'application moment $F = (q_1, q_2)$ s'identifie localement à $\bar{z_1} z_2$. Le flot de q_1 est:

$$(z_1(t), z_2(t)) = (e^t z_1(0)), e^{-t} z_2(0),$$

et celui de q_2 s'écrit:

$$(z_1(t), z_2(t)) = e^{it}(z_1(0), z_2(0)).$$

La preuve du théorème procède en plusieurs lemmes intermédiaires que nous détaillons quelque peu dans la suite. Pour le moment on note que le théorème S répond exactement à notre question initiale, grâce à la proposition suivante :

Proposition *La série de Taylor du terme principal du λ des conditions de Bohr-Sommerfeld (théorème BS), tronquée de son terme constant, est égale à l'invariant classique $(S)^\infty$ du feuilletage classique associé.*

Remarque: le terme constant en question est l'intégrale d'action $\int_{\gamma_0} \alpha$, où γ_0 est l'orbite homocline du tore pincé, et α est le potentiel symplectique canonique (associé à la méthode de quantification; dans notre cas, c'est la 1-forme canonique du cotangent).

Même si la proposition n'est pas énoncée dans [13], sa preuve s'y trouve, compte tenu de la définition de $(S)^\infty$ que je donne ici. On peut donc en principe déterminer précisément le feuilletage (à équivalence symplectique près) par la donnée du spectre. Réciproquement, au vu de ce résultat, il semble raisonnable de conjecturer que la série de Taylor semi-classique complète de λ est l'invariant semi-classique du feuilletage.

3.3 Schéma de la preuve du théorème S

Pour démontrer le point 1) du théorème, il suffit de s'intéresser à l'unicité dans l'équivalence du feuilletage (théorème d'Eliasson). On trouve facilement le résultat suivant:

Lemme *Si ψ est un symplectomorphisme local de $(\mathbb{R}^4, 0)$ et Φ un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tels que*

$$(q_1, q_2) \circ \psi = \Phi(q_1, q_2),$$

et si on écrit $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$*, alors il existe des signes* $\varepsilon_j = \pm 1,\ j = 1,2$ *tels que*

$$\Phi_2(c_1, c_2) = \varepsilon_2 c_2 \tag{4}$$

et

$$\Phi_1(c_1, c_2) - \varepsilon_1 c_1 \textit{ est une fonction plate en } 0. \tag{5}$$

(plate: elle et toutes ses dérivées s'annulent en 0.) L'équation (4) découle du fait que ψ doit préserver l'action de S^1 engendrée par q_2; l'équation (5) provient de la conservation du flot de q_1 qui converge de façon C^∞ vers l'origine en temps logarithmique: impossible de changer le facteur devant le log.

Il reste à vérifier que le groupe discret correspondant aux choix des signes ε_j laisse invariant la 1-forme σ.

Pour montrer le point 2) du théorème, on procède en deux étapes: a) Si deux systèmes ont *exactement* le même σ, alors ils sont symplectiquement équivalents; b) Si les deux σ diffèrent par une 1-forme plate à l'origine, on se ramène au cas précédent en modifiant la carte d'Eliasson qui a servi à définir l'un des σ. Cette modification s'opère elle-même en deux étapes (ajustement des σ puis ajustement concomitant de la forme symplectique) au moyen de la méthode de déformation de Moser. Dans les deux cas l'hypothèse de platitude est utilisée de façon cruciale, puisqu'on doit définir des objets de type

$$\frac{f(c)}{g(c) + \ln|c|}, \qquad f, g \in C^\infty,$$

qui ne sont lisses en 0 que si f est plate.

Voici comment construire naturellement l'équivalence symplectique dans le cas a). Soient $\mathscr{F}$ et $\tilde{\mathscr{F}}$ les deux feuilletages concernés, m et $\tilde{m}$ les point foyer-foyer. On identifie les voisinages de m et $\tilde{m}$ au moyen des cartes locales qui ont servi à la construction des invariants σ et $\tilde{\sigma}$. Dans les coordonnées locales de $\mathbb{R}^4$ correspondantes, on définit une section de Poincaré Σ pour le flot conjoint sur la variété instable, de telle sorte que l'intersection $\Sigma \cap \Lambda_c$ soit égal à un point A_c dépendant de façon C^∞ de c.

L'équivalence symplectique est définie ainsi: un point x de $\mathscr{F}$ dans la feuille $\Lambda_c \setminus \{m\}$ est repéré par ses temps positifs minimaux nécessaire au flot conjoint de (H_1, H_2) pour l'atteindre à partir de A_c. On lui fait correspondre le point $\tilde{x} = \psi(x)$ de la feuille $\tilde{\Lambda}_c$ obtenu à partir de A_c au bout des mêmes temps, pour le flot conjoint de $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$). Ce ψ est bien défini grâce à l'hypothèse $\sigma = \tilde{\sigma}$ (qu'on utilise sous la forme $\tau = \tilde{\tau}$). Il s'étend en un difféomorphisme symplectique à l'origine, car il est égal à l'identité dans l'identification des voisinages de m et $\tilde{m}$, et on vérifie facilement qu'il est symplectique en dehors de l'origine.

Finalement, on peut obtenir le point 3) du théorème par la construction assez abstraite suivante (voir figure 2): partant du modèle local de singularité foyer-foyer

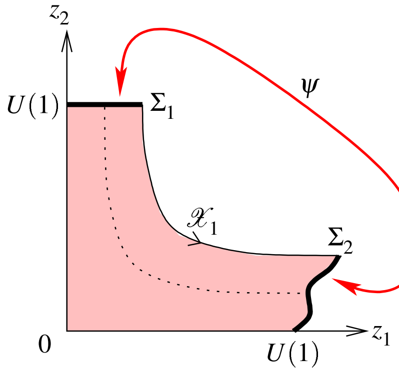

FIG. 2 – *Construction du feuilletage complètement intégrable admettant un invariant* $(S)^\infty$ *donné*

dans $\mathbb{R}^4$, on coupe les variétés stables et instable du flot de q_1 par deux sections de Poincaré comme précédemment, qu'on recolle par un symplectomorphisme choisi de telle sorte que les périodes soient celles voulues.

Il serait agréable de trouver une construction correspondant davantage à un problème de mécanique classique, où l'on n'aurait "qu'à" fixer certains paramètres pour obtenir les périodes voulues. Il semble malgré tout qu'un tel procédé, pour un système de type équation de Newton (Schrödinger), impliquerait nécessairement un relation de nature hyperelliptique entre les paramètres du problème et les périodes. L'avantage d'un tel exemple serait de permettre plus naturellement le traitement du cas semi-classique.

Références

[1] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*. Number 99 in Annals of Mathematics Studies. Princeton university press, 1981.

[2] L. Charles. *Aspects semi-classiques de la quantification géométrique*. PhD thesis, Université Paris IX - Dauphine, 2000.

[3] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II. *Math. Z.*, 171:51–73, 1980.

[4] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(9–10):1535–1563, 1994.

[5] Y. Colin de Verdière and S. Vũ Ngọc. Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2D integrable systems. Preprint Institut Fourier, 2000.

[6] J.-P. Dufour, P. Molino, and A. Toulet. Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de Fomenko. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318:949–952, 1994.

[7] J.J. Duistermaat. On global action-angle variables. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33:687–706, 1980.

[8] L.H. Eliasson. *Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals*. PhD thesis, University of Stockholm, 1984.

[9] L. Hörmander. *The analysis of Linear partial differential operators*, volume I–IV. Springer, 1983–90.

[10] Z. Nguyên Tiên. Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities. *Compositio Math.*, 101:179–215, 1996.

[11] Z. Nguyên Tiên. Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, II: characteristic classes. Preprint Univ. Montpellier, 2000.

[12] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1987.

[13] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(2):143–217, 2000.

[14] S. Vũ Ngọc. Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment. *Asymptotic Analysis*, 24(3,4):319–342, 2000.

[15] S. Vũ Ngọc. On semi-global invariants for focus-focus singularities. Preprint Institut Fourier, 2001.