

Exercice 1. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. ▽

a. $(1 + i)^2$

d. $\frac{1}{(2 - i)}$

f. $\frac{2 + i}{2 - i}$

b. $i(1 + 2i)(1 - i)$

c. $(\sqrt{3} - i\sqrt{2})(\sqrt{3} + i\sqrt{2})$

e. $(-2 + i)(1 - i)^4$

g. $\frac{-1 + i}{3 - i}$

Exercice 2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Déterminer, en fonction de x et y , la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants : ▽

a. $z^2 - 2z$

b. z^3

c. $\frac{1}{z}, z \neq 0$

d. $\frac{z + 1}{z - 1}, z \neq 1$.

Exercice 3. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire : ▽

a. -5

b. $3i$

c. $1 + i$

d. $1 - i\sqrt{2}$

e. $-\sqrt{3} + i$.

Exercice 4. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. : ▽

a. $e^{3i\pi}$

b. $e^{-i\pi}$

c. $6e^{i\pi/4}$

d. $e^{7i\pi/6}$

e. $e^{i\pi/5}$.

Exercice 5. Calculer en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$: ▽

a. $\sin 3\theta$,

b. $\cos 3\theta$,

Exercice 6. Calculer la somme ▽

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta.$$

Exercice 7. Déterminer et représenter graphiquement les racines ▽

a. $\sqrt[6]{1}$,

b. $\sqrt[2]{i}$,

c. $\sqrt[3]{-1}$,

d. $\sqrt[4]{-1}$,

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(1 + i)^n + (1 - i)^n$. ▽

Exercice 9. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes : ▽

a. $(1 + i)z + 3i = -3 - i$,

d. $z^2 + (1 - i)z - i = 0$,

b. $az + b\bar{z} + c = 0, a\bar{a} \neq b\bar{b}$.

e. $z^3 = \bar{z}^2$,

c. $\bar{z} = \frac{1}{z}$,

Exercice 10. Décrire géométriquement l'ensemble de solutions de : ▽

a. $|z| < 2$,

d. $az + \bar{a}\bar{z} + c = 0, c \in \mathbb{R}$.

b. $|\Re z| < 1$,

e. $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + c = 0, c \in \mathbb{R}$.

c. $\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = 1$,

Exercice 11. Exprimer en fonction de $x = (z + \bar{z})/2$ et $y = (z - \bar{z})/2i$ les expressions suivantes : ▽

a. $dzd\bar{z}$,

c. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$,

b. $\frac{dz}{z}$,

d. $\left(z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$.

Exercice 12. Exprimer en fonction de $z = re^{i\phi}$ et $\bar{z} = re^{-i\phi}$ les expressions suivantes : ▽

a. $\frac{\partial}{\partial \phi}$,

b. $d\phi$,

c. $r \frac{\partial}{\partial r}$.

d. $rdrd\phi$.

Exercice 13. ▽ Calculer les différentielles des formes suivantes :

a. $\frac{1}{1+z\bar{z}}$,

b. $x dy - y dx$,

c. $x dy + y dx$,

d. $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

Exercice 14. Soit $\gamma : t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$, $-1 \leq t \leq 1$ une courbe (cubique de Tschirnhausen). ▽

a. Tracer la courbe,

b. Calculer $\int_{\gamma} x dy - y dx$.

c. Calculer l'aire borné par la courbe.

Exercice 15. Calculer les intégrales : ▽

a. $\int_{C(0,r)} z^k dz$, où $C(0, r) = \{z \mid |z| = r\}$ est le cercle de rayon r orienté positivement.

b. $\int_{C(2,1)} z^k dz$, où $C(2, 1) = \{z \mid |z - 2| = 1\}$, $k \neq -1$.

c. $\int_{D(0,r)} z^k \bar{z}^k dz d\bar{z}$, où $D(0, r) = \{z \mid |z| \leq r\}$ est le disque de rayon r .

d. $\int_{D(0,r) \cap \{Im z \geq 0\}} z dz d\bar{z}$,

Exercice 16. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un segment réel. Calculer la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^b \frac{f(x) dx}{x - y - i\varepsilon} - \int_a^b \frac{f(x) dx}{x - y + i\varepsilon} \right)$$

pour $y \in \mathbb{R}$. ▽

Exercice 17. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

le long d'un chemin fermé γ disjoint de a en termes de l'indice de γ par rapport à a . ▽

Exercice 18. En faisant le minimum de calculs possible, déterminer les intégrales suivantes : ▽

a. $\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^n} dz, n \geq 1.$

b. $\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z} dz.$

c. $\int_{C(0,1)} \frac{\sin(z)}{z} dz.$

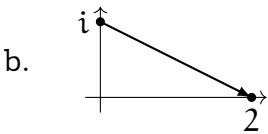
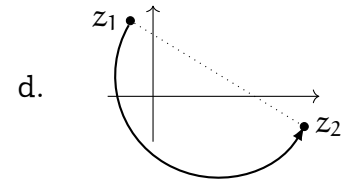
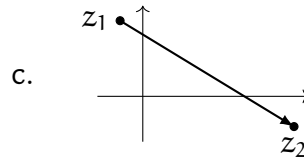
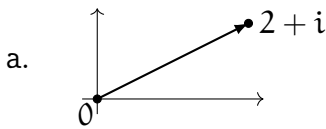
d. $\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z^2} dz,$

e. $\int_{C(i,1)} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz,$

f. $\int_{C(-i,1)} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz,$

g. $\int_{C(0,2)} \frac{z^2 + 2}{z^3 - z} dz,$

Exercice 19. Donner une paramétrisation pour chacun des chemins suivants : ▽



Exercice 20. Trouver les homographies qui envoient le triplet de points $(0, 1, \infty)$ sur les triplets : ▽

a. $(\infty, 0, 1),$

b. $(1, 0, \infty),$

c. $(-1, i, 1).$

Exercice 21. Pour une homographie

$$f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

trouver : ▽

a. L'homographie inverse,

b. Les points fixes,

c. L'image d'un cercle,

d. L'image d'une droite.

Exercice 22. Soit S la sphère unité dans $\mathbb{C} + \mathbb{R}$

$$S = \{(z, c) | z\bar{z} + c^2 = 1\}$$

trouver les coordonnées du point d'intersection entre la droite passant par $(0, 1)$ et $(z, 0)$ avec la sphère S . ▽

Exercice 23. Calculer le rayon de convergence des séries : ▽

a. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n,$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n, k \in \mathbb{R}.$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2},$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n,$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n,$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n,$

Exercice 24. Trouver les séries de Taylor des fonctions : ▽

- a. $\sin z$, c. $(1+z)^a$, e. $\ln(1-z)$, g. $\arcsin z$,
 b. $\cos z$, d. $(1-az)^{-1}$, f. $\operatorname{arctg} z$, h. $\frac{1}{1-z-z^2}$,

Exercice 25. Soit $\sum_{i=0}^{\infty} a_k z^k$ la série de Taylor de la fonction $f(z)$. Trouver les sommes : ▽

- a. $\sum_{i=0}^{\infty} a_{2k} z^k$, b. $\sum_{i=0}^{\infty} a_{2k+1} z^k$, c. $\sum_{i=0}^{\infty} a_{5k+2} z^k$

Exercice 26. Calculer les sommes des séries : ▽

- a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\alpha}{n}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{2n+1}$.

Exercice 27. Décrire, s'il en existe, toutes les fonctions holomorphes $f : D(1,1) \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfont, pour tout $n \geq 2$: ▽

- a. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, c. $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e^{-n}$,
 b. $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, d. $f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = f\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$,

Exercice 28. Trouver l'ordre des fonctions : ▽

- a. $\operatorname{Ord}_z \frac{z^6 - 1}{z^4 - 1}$, b. $\operatorname{Ord}_0 \left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \right)$, d. $\operatorname{Ord}_0 (z - \sqrt{2 - 2 \cos z})$.
 c. $\operatorname{Ord}_0 (e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z})$, e* $\operatorname{Ord}_0 (\operatorname{tg}(\sin z) - \sin(\operatorname{tg} z))$,

Exercice 29.

Pour la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Déterminer le développement en série de Laurent de f sur les anneaux : ▽

- a. $0 < |z| < 1$,
 b. $1 < |z| < 2$,
 c. $2 < |z|$.

Exercice 30.

Calculer les résidus : ▽

- a. $\operatorname{Res}_0 \frac{\sin z}{z^4} dz$ d. $\operatorname{Res}_0 \frac{dz}{z^3 \cos z}$,
 b. $\operatorname{Res}_{z_0} \frac{e^{az}}{1 - e^z} dz$, $z_0 = 2\pi i k$, e. $\operatorname{Res}_{\pi/3} \frac{\sin z dz}{1 - 2 \cos z}$.
 c. $\operatorname{Res}_{z_0} \frac{z+1}{z^2 - 9} dz$, $z_0 = -3, 3, \infty$. f.* $\operatorname{Res}_0 \frac{e^{az}}{\operatorname{sh}^k z} dz$. ▽

Exercice 31. Calculer les sommes : ▽

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},$

b. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2},$

c. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^4},$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$

Exercice 32. Calculer les intégrales définies : ▽

a. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx, a \in \mathbb{R}.$

c. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx,$

d. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx,$

e. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2},$

f. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{5+3 \sin t} dt,$

g. $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 t}{(3+2 \cos t)^2} dt,$

h. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t},$

i. $\int_{C(0,8)} \frac{1+z}{1-e^z} dz,$

j. $\int_{C(i,5)} \frac{z^2}{z^3 - z^2 - z + 1} dz,$

k. $\int_{C(0,2)} z^9 e^{1/z} dz,$

l. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{\operatorname{ch}(z)} dz,$

m. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz,$

n. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt,$

o. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2}.$

p. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n},$

q. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(1+x)}, 0 < p < 1,$

r. $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p dx}{(1+x)^3}, 0 < p < 1.$

▽

Exercice 33. Calculer l'intégrale double ▽ ▼

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(z-a)(z-b)(\bar{z}-\bar{c})(\bar{z}-\bar{g})} dz d\bar{z}$$

Exercice 34. Déterminer le nombre de solutions (comptés avec multiplicités) des équations suivantes dans le domaine indiqué : ▽

a. $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ dans $D(0, 1),$

c. $z^4 - 5z + 1$ dans $D(0, 1),$

b. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ dans $D(0, 1),$

d. $z^4 - 5z + 1$ dans $D(0, 2) \setminus D(0, 1).$

Exercice 35.

- a. Trouver la série de Laurent $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = 1$ de la fonction $\theta(z)$ satisfaisant l'équation

$$\theta(z) = q^{1/2} z \theta(qz),$$

où $0 < |q| < 1$. ▽

- b. Trouver le nombre de zéros de la fonction thêta $\theta(z)$ dans l'anneau $|q| < z \leq 1$.
 c. Trouver les zéros de la fonction thêta $\theta(z)$.

Exercice 36. Exprimer les intégrales en termes de la fonction gamma. ▽

a. $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx,$

b. $\int_0^{\infty} x^\alpha (1+x)^{\beta-\alpha} dx.$

Exercice 37. Trouver les séries de Taylor des fonctions réciproque au fonctions : ▽

a. $z - z^2,$

b. $ze^z,$

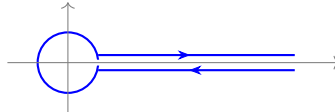
c. $ze^{z^2}.$

Exercice 38. Calculer l'intégrale ▽

$$\int_{\gamma} \frac{1}{e^x - 1} x^s \frac{dx}{x},$$

où

a. $\gamma = \mathbb{R}_{\geq 0}, \Re s > 1$ utilisant la série $\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$

b. $\gamma =$  (chemin de Hankel)

Exercice 39. Trouver les produits infinis ▽

a. $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}),$

c. $\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

e. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$

b. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} e^{1/n},$

d. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1},$

f. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$

Indication : Utiliser la constante d'Euler-Mascheroni $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$

Exercice 40. Trouver une fonction méromorphe G telle que $\text{Ord}_{-n} G(z) = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$ et holomorphe en tout autre point. ▽**Exercice 41.** Calculer les symboles ▽

- a. $\{f, g\}_{\partial\Omega}$, où f et g sont des polynômes tels que toutes racines de f appartiennent à Ω et celles de g sont disjoint de Ω .

b. $\left\{ \left(1 - \frac{a}{z}\right) e^{a/z}, \sin \pi z \right\}_x, x \in \mathbb{C}.$

c. $\left\{ \left(1 - \frac{a}{z}\right) e^{a/z}, \Gamma(z) \right\}_x, x \in \mathbb{C}.$

Réponses :

1 a : $2i$; b : $-1 + 3i$; c : 5 ; d : $\frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$; e : $8 - 4i$; f : $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$; g : $-\frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$.

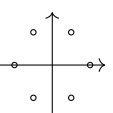
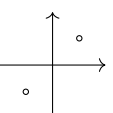
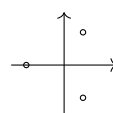
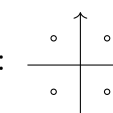
2 a : $x^2 - y^2 - 2x + i(2xy - 2y)$; b : $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$; c : $\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$; d : $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-2x+1} - i\frac{2y}{x^2+y^2-2x+1}$.

3 a : $5e^{i\pi}$; b : $3e^{i\pi/2}$; c : $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$; d : $\sqrt{3}e^{-i\arctg\sqrt{2}}$; e : $2e^{2\pi i/3}$.

4 a : -1 ; b : -1 ; c : $3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$; d : $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e : $\frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

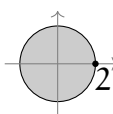
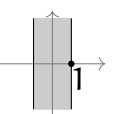
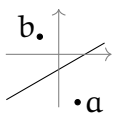
5 a : $3\sin\theta - 4\sin^3\theta$; b : $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

6 $\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$.

7 a :  ; b :  ; c :  ; d : 

8
$$\begin{cases} 2^{n/2+1} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{8} \\ -2^{n/2+1} & \text{if } n \equiv 4 \pmod{8} \\ 0 & \text{if } n \equiv \pm 2 \pmod{8} \\ 2^{(n+1)/2} & \text{if } n \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -2^{(n+1)/2} & \text{if } n \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases} .$$

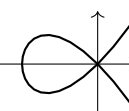
9 a : $-\frac{7}{2} - i\frac{1}{2}$; b : $\frac{b\bar{c}-\bar{a}c}{a\bar{a}-b\bar{b}}$; c : $\{e^{i\theta} | \theta \in [-\pi, \pi]\}$; d : $\{-1, i\}$; e : $\{0, 1, e^{\pm\pi i/5}, e^{\pm 2\pi i/5}\}$.

10 a :  ; b :  ; c :  médiatrice ; d : droite ; e : cercle.

11 a : $-2idxdy$; b : $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + i\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$; c : $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

12 a : $iz\frac{\partial}{\partial z} + i\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$; b : $\frac{1}{2i}\left(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right)$; c : $z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$; d : $\frac{1}{2i}d\bar{z}dz$.

13 a : $-\frac{z d\bar{z} - \bar{z} dz}{(1+z\bar{z})^2}$; b : $2dxdy$; c : 0 ; d : 0 .

14 a :  ; b : $\frac{16}{15}$; c : $\frac{8}{15}$.

15 a : $2\pi i$ si $k = -1, 0$ sinon ; b : 0 ; c : $\frac{2\pi i}{k+1}r^{2k+2}$; d : $\frac{4}{3}r^3$.

16 $2\pi i f(y)$.

17 $2\pi i \text{Ind}_a \gamma$

18 a : $\frac{2\pi i}{(n-1)!}$; b : $2\pi i$; c : 0 ; d : 0 ; e : -2π ; f : 2π ; g : $4\pi i$.

19 a : $(2+i)t$; b : $(2-1)t + 2$; c : $z_1(1-t) + z_2t$; d : $\frac{1}{2}(z_1 - z_2)e^{i\pi t} + \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$

20 a : $\frac{z-1}{z}$; b : $1-z$; c : $\frac{z+i}{z-i}$.

21 a : $\zeta \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$; b : $\frac{d-a \pm \sqrt{(d-a)^2 - 4bc}}{2c}$ si $c \neq 0$ et $\{\frac{b}{d-a}, \infty\}$ si $c = 0$; c=d : cercle ou droite.

22 $\left\{ \frac{2z}{1+z\bar{z}}, \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right\}$.

23 a : 0 ; b : ∞ ; c : 2 ; d : 1 ; e : 1 ; f : 0 .

24 a : $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$; b : $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$; c : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} z^k$; d : $\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k$; e : $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$; f : $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \frac{(2k)!}{(k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1}$; g : $\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ où f_k sont les nombres de Fibonacci.

25 a : $\frac{1}{2}(f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z}))$; b : $\frac{1}{2\sqrt{z}}(f(\sqrt{z}) - f(-\sqrt{z}))$; c : $\frac{z^{-2/5}}{5} \left(\sum_{k=0}^4 \zeta^{-2k} f(\zeta^k z^{1/5}) \right)$.

26 a : $-\ln|2\sin\alpha/2|$; b : $\alpha/2$; c : $\pi/4$.

27 a : $z^2 + \psi(z)\sin(\pi/z)$ où $\psi(z)$ est holomorphe sur $D(1,1)$; b : $(z-1)^2$; c,d : \emptyset .

28 a : $\text{Ord}_{\zeta} = \text{Ord}_{\zeta^2} = \text{Ord}_{-\zeta} = \text{Ord}_{-\zeta^2} = 1$, $\text{Ord}_i = \text{Ord}_{-i} = -1$ où $\zeta = e^{\pi i/3}$; b : 1; c : 3; d : 1 et 3; e : 7.

29 a : $\sum_{n=0}^{\infty} (1-2^{-n-1})z^n$; b : $-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}z^n$; c : $\sum_{n=-\infty}^{-1} (2^{-n-1}-1)z^n$;

30 a : $-1/6$; b : $-e^{2\pi i k a}$; c : $1/3, 2/3, -1$; d : $1/2$; e : $1/2$; f : $\frac{1}{(k-1)!} \prod_{\substack{-k < i < k \\ i \equiv k[2]}} (a-i)$.

31 a : $\pi^3/32$; b : $\pi^2 \sin^{-2}(\pi z)$; c : $\pi^4(6\sin^{-4}\pi z - 4\sin^{-2}\pi z)$.

32 a : π ; b : πe^{-a} ; c : $2\pi(e^{-2}/3 - e^{-1}/6)$; d : $2\pi\sqrt{2}$; e : $\pi/2$; f : $\frac{2\pi}{9}$; g : $\pi \frac{3\sqrt{5}-25}{100}$; h : $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; i : $-8\pi i$; j : $2\pi i$; k : $2\pi i/10!$; l : $\pi \text{ch}^{-1}\pi a/2$; m : πi ; n : $\sqrt{2\pi}(1+i)/2$; o : 0; p : $\frac{\pi}{\sin(\pi/n)}$; q : $\frac{\pi}{\sin p\pi}$; r : $\frac{\pi p(p-1)}{2\cos(\pi p/2)}$.

33 $\frac{-4\pi}{(a-b)(\bar{c}-\bar{g})} \Im \ln \frac{(a-c)(b-g)}{(a-g)(b-c)}$

34 a : 0; b : 4; c : 4; d : 3.

35 a : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} z^n$; b : 1; c : $-q^{n+1/2}$.

36 a : $\frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$; b : $B(\alpha+1, -\beta)$.

37 a : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} z^n$; b : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{(n-1)!} z^n$; c : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k+1)^{k-1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}$.

38 a : $\Gamma(s)\zeta(s)$; b : $(1 - e^{2\pi i s})\Gamma(s)\zeta(s)$

39 a : $\frac{1}{1-z}$; b : e^γ ; c : $\frac{e^{\gamma z}}{\Gamma(z+1)}$.

40 $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k \exp\left(-z + \frac{z^2}{k}\right)$.

41 a : resultant(f, g); b : $\begin{cases} \pi a & \text{si } x = 0 \\ \sin^{-1}(\pi a) & \text{si } x = a \\ \left(1 - \frac{a}{k}\right) e^{a/k} & \text{si } x = k \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ c : $\begin{cases} \frac{1}{a} e^{-\gamma a} & \text{si } x = 0 \\ \Gamma^{-1}(a) & \text{si } x = a \\ \left(1 - \frac{a}{k}\right) e^{a/k} & \text{si } x = k \in \mathbb{Z}_{< 0} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Corrections :

30 f : Soit $R_k = \text{Res} \frac{e^{az}}{\text{sh}^k z} dz$ et $S_k = \text{Res} \frac{e^{az} \text{ch} z}{\text{sh}^k z} dz$. On peut calculer directement que $R_1 = 1$ et $R_2 = a$.

Car $d \frac{e^{az}}{\text{sh}^k z} = \frac{ae^{az}}{\text{sh}^k z} dz - k \frac{e^{az} \text{ch} z}{\text{sh}^{k+1} z} dz$ et $d \frac{e^{az} \text{ch} z}{\text{sh}^k z} = \frac{ae^{az} \text{ch} z}{\text{sh}^k z} dz + \frac{e^{az} \text{sh} z}{\text{sh}^k z} dz - k \frac{e^{az} (1 + \text{sh}^2 z)}{\text{sh}^{k+1} z} dz$ on a $aR_k - kS_{k+1} = 0$ et $aS_k + R_{k-1} - kR_{k+1} - kR_{k-1}$. Donc $R_{k+2} = \frac{a^2 - k^2}{k(k+1)} R_k$ et alors $\prod_{\substack{-k < i < k \\ i \equiv k[2]}} (a - i)$

33 :

$$\begin{aligned} & \int \frac{dz d\bar{z}}{(z-a)(z-b)(\bar{z}-\bar{c})(\bar{z}-\bar{g})} = \\ &= \frac{1}{a-b} \int d \left(\ln \frac{z-a}{z-b} \frac{d\bar{z}}{(\bar{z}-\bar{c})(\bar{z}-\bar{g})} \right) = \\ &= \frac{1}{a-b} \int_{\partial\Omega} \ln \frac{z-a}{z-b} \frac{d\bar{z}}{(\bar{z}-\bar{c})(\bar{z}-\bar{g})} = \\ &= \frac{2\pi i}{a-b} \int_a^b \frac{d\bar{z}}{(\bar{z}-\bar{c})(\bar{z}-\bar{g})} - \frac{1}{a-b} \int_{[c] \cup [d]} \ln \frac{z-a}{z-b} \frac{d\bar{z}}{(\bar{z}-\bar{c})(\bar{z}-\bar{g})} = \\ &= \frac{2\pi i}{(a-b)(\bar{c}-\bar{g})} \left(\ln \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{g}} - \ln \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{g}} \right) + \frac{2\pi i}{(a-b)(\bar{c}-\bar{g})} \left(\ln \frac{c-a}{c-b} - \ln \frac{g-a}{g-b} \right) = \\ &= \frac{-4\pi}{(a-b)(\bar{c}-\bar{g})} \Im \ln \frac{(a-c)(b-g)}{(a-g)(b-c)} \end{aligned}$$