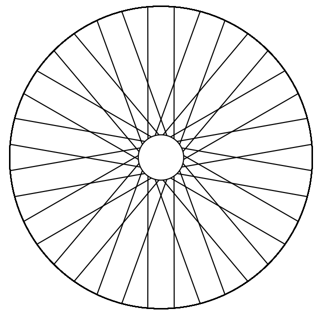
Année 2023-2024

Mathématiques L3 (S6). Géométrie. Mis à jour le 24 avril 2024.

Exercice 1. Soit ABC un triangle dans le plan, S_A, S_B et S_C — les symétries par rapport aux points A, B et C respectivement. Trouver la composition $S_C \circ S_B \circ S_A \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.

Exercice 2*. Soient r le rayon du moyeu et R le rayon de la jante d'une roue de vélo. Le nombre de rayons est $2N$ et le nombre de rayon intersectés par chaque rayon est k. Trouver la longueur des rayons.

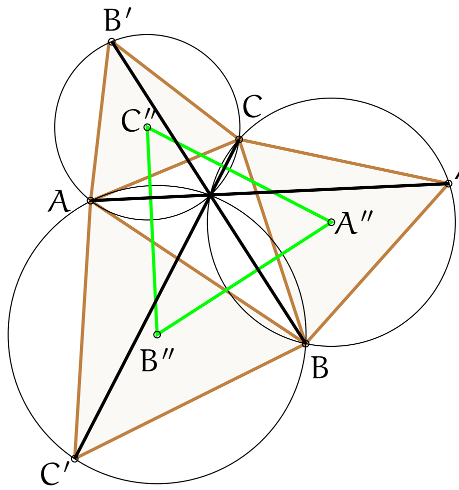


Exercice 3. Soit ABC, un triangle $A'BC$, $AB'C$ et ABC' triangles équilatérales disjoints de ABC.

a. *Théorème de Toricelli.* Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ de même longueur et de l'angle $\pi/3$ entre eux.

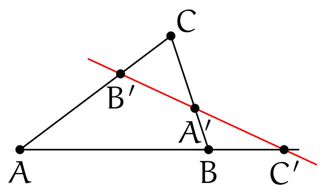
b. Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ et les cercles circonscrits des triangles équilatérals ont un point commun.

c. *Théorème de Napoleon.* Let A'', B'' et C'' sont les centres des triangles équilatérals respectifs. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est équilatéral.



Exercice 4. *Théorème de Ménélaüs.* Soit ABC un triangle et A', B' et C' sont des points sur les droites BC, CA et AB, respectivement. Montrer que les points A',B' et C' sont colinéaires si et seulement si

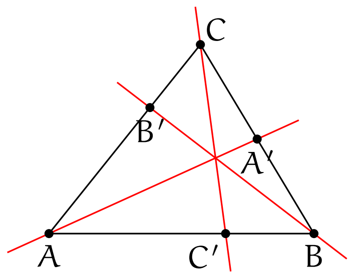
$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}}\frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}}\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} = 1$$



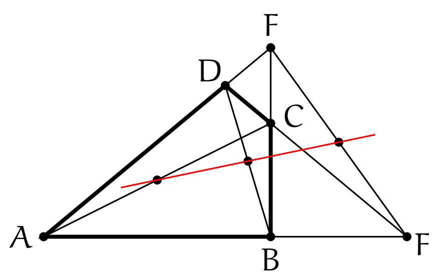
Exercice 5. *Théorème de Ceva.* Soit ABC un triangle et A', B' et C' sont des points sur les droites BC, CA et AB, respectivement. Montrer que les droites AA',BB' et CC' sont concourants si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}}\frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}}\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} = -1$$

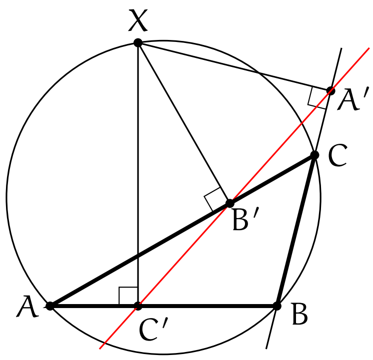
Indication : Calculer le barycentre de αA βB et γC ou α, β, γ sont trois poids arbitraires.



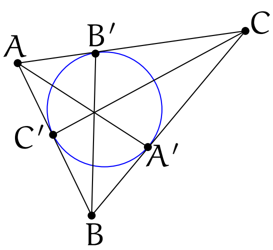
Exercice 6*. *Théorème de Gauss / droite de Newton.* Soient $ABCD$ un quadrilatère, $E = (AB) \cap (CD)$ et $F = (AD) \cap (BC)$ les intersections de ces côtés opposés. Montrer que les milieux des diagonales AC, BD et du segment EF sont alignés.



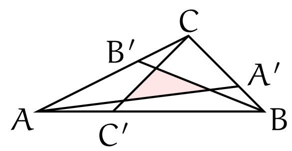
Exercice 7. *Droite de Simpson.* Soit ABC un triangle, X un point. Soient $A'B'C'$ sont des bases de droites perpendiculaire au côtés du triangle passant par X. Alors A',B', C' sont colinéaires si et seulement si X, A, B et C sont cocirculaires.



Exercice 8. Soit ABC un triangle et $A'B'C'$ sont les points d'intersection du cercle inscrit avec les cotés de ABC respectifs. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourants.



Exercice 9*. Soit ABC un triangle d'aire 1 et A', B', C' sont des points sur les cotés tels que $\frac{A'B}{A'C} = -x$, $\frac{B'C}{B'A} = -y$ et $\frac{C'A}{C'B} = -z$. Trouver l'aire du triangle délimité par les droites AA', BB' et CC' (Théorème de Routh).



Exercice 10. Soient l_1 et l_2 deux droites dans le plan qui s'intersectent en un point A et forment un angle α. Trouver la composition de symétries dans ces droites.

Exercice 11. Notons R^A_α la rotation du plan à l'angle α autour du point A. Soit ABC un triangle dans le plan. Trouver la composition des rotations

$$R^A_{2\angle CAB} \circ R^B_{2\angle ABC} \circ R^C_{2\angle BCA}$$

Exercice 12. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Existe-t-il un quadrilatère $A'B'C'D'$ circonscrit autour de $ABCD$ tel que les points A, B, C, D sont les milieux des côtés respectifs de $A'B'C'D'$? La même question pour un pentagone.

Exercice 13. Trouver le birapport de

a. $1, 2, 3, \infty$,

b. Les sommets d'un carré $0, 1, 1+i, i$,

c. Quatre sommets consécutifs d'un n-gone $1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, e^{\frac{6\pi i}{n}}$.

Exercice 14. Trouver l'équation du cercle passant par les points $0, 2, i$ dans les coordonnées complexes.

Exercice 15. Trouver l'image de par l'homographie $z \mapsto z^{-1}$ de

a. cercle $(z-1)(\bar{z}-1) - 1 = 0$

b. cercle $(z+1)(\bar{z}+1) - 1 = 0$

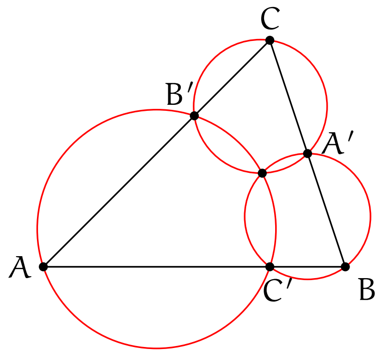
c. hyperbole $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

d. parabole $z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} = 1$.

Exercice 16. On dit qu'un quadruplet de points A, B, C, D de la droite projective est *harmonique* si le birapport $[A, B, C, D] = \frac{(A-D)(B-C)}{(A-B)(D-C)}$ vaut -1.

Soient c_1 et c_2 deux cercles orthogonaux, et soit l la droite passant par ces centres. Montrer que les points d'intersection entre et la droite l et les cercle forment un triplet harmonique.

Exercice 17. Soit ABC un triangle, $A'B'C'$ le points sur les côtés respectifs. Montrer que les cercles circonscrit autour des triangles $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$ ont un point commun. (Théorème de Miquel.)



Exercice 18. En combien de composants connexes trois droites en position générale partagent

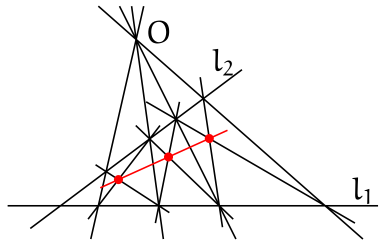
a. le plan affine.

b. le plan projectif réel.

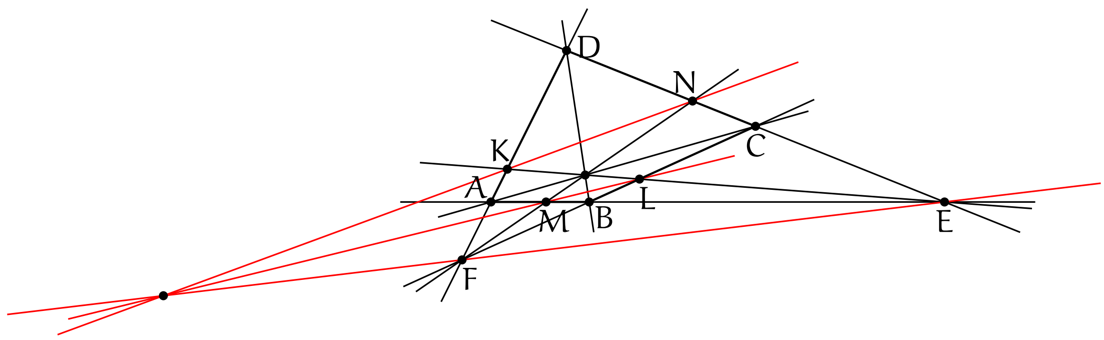
c. la droite projective complexe.

Exercice 19. Combien de points fixe peut avoir une transformation d'un plan projectif ?

Exercice 20. Soit l_1 et l_2 deux droites et O un point n'y appartenant pas. Monter que les points d'intersection des diagonales de quadrilatères dont deux cotés passent par O et deux appartiennent à l_1 et l_2 sont alignés.

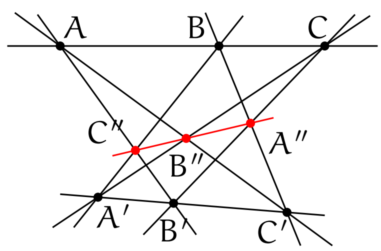


Exercice 21. Soit O l'intersection des diagonales d'un quadrilatère $ABCD$, E et F les points d'intersection des côtés opposés. K,L,M,N les points d'intersection entre les cotés de $ABCD$ avec les droites OE et OF. Montrer que les droites KM,LN et EF sont concourant.

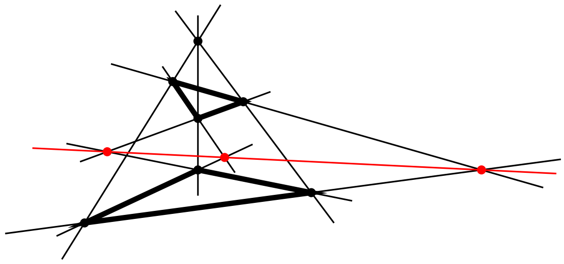


Exercice 22. Dans l'exercice 21, trouver le birapport $[F, A, K, D]$.

Exercice 23. *Théorème de Pappus.* Soient A,B,C et A',B',C' de triplets de points alignés. Alors les points d'intersection $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = CA' \cap C'A$ et $C'' = AB' \cap A'B$ sont aussi alignés.



Exercice 24. *Théorème de Desargues.* Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes. Alors les points d'intersections $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$ et $C'' = AB \cap A'B'$ sont alignés.

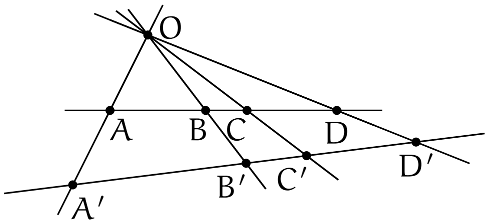


Exercice 25. Soit ABC un triangle et AX la médiane. Trouver la droite l passant par A telle que le birapport $[(AB), (AX), (AC), l] = -1$.

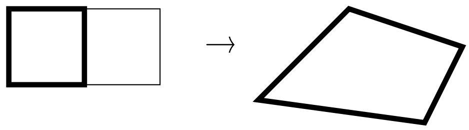
Exercice 26.

a. On considéré un quadruplet de droites dans le plan passant par un point O et encore deux droites disjointes de O. On notera A,B,C,D et A',B',C',D' les point d'intersection du quadruplet avec les deux autres droites respectives. Montrer que $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.

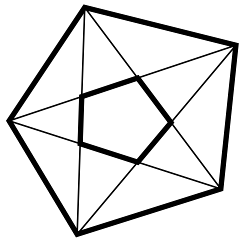
b. Soient l et l' deux droites, $A, B, C, D \in l$ quatre points distincts sur l et A', B', C' trois points distincts sur l'. Construire le point D' sur l' tel que les birapports $[A, B, C, D]$ et $[A', B', C', D']$ coïncident.



Exercice 27. Soit $ABCD$ un quadrilatérale et soit t une transformation projective qui envoie un carré standard sur ce quadrilatère. Construire l'image $DCEF$ du carré standard adjacent.



Exercice 28. Considérons un pentagone dans le plan. Montrer que le pentagone formé par ces diagonales est projectivement équivalent au pentagone initial.

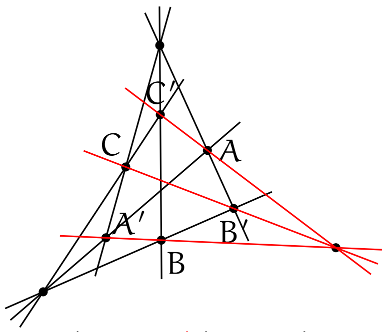


Exercice 29. Construire la droite entre deux points avec une règle courte.

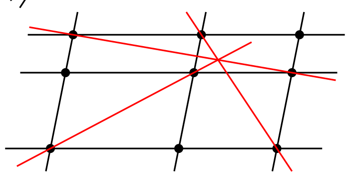
Exercice 30. Formuler le théorème dual au théorème de Pappus.

Exercice 31. Formuler le théorème dual au théorème de Desargues.

Exercice 32. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les droites AA', BB' et CC' sont concourants et les droites AB', BC' et CA' sont concourant. Montrer que AC', BA' et CB' sont aussi concourants.



Exercice 33. Soient l_1,l_2,l_3 et m_1,m_2,m_3 deux triplets de droites parallèles et soient $A_{ij} = l_i \cap l_j$. Montrer que les droites $A_{11}A_{22}$, $A_{13}A_{32}$ et $A_{31}A_{23}$ sont concourants.



Exercice 34. Tracer les configuration duale à

a. Ensemble de droites parallèles $\{y = n | n \in \mathbb{Z}\}$.

b. Quatre droite est six point d'intersections.

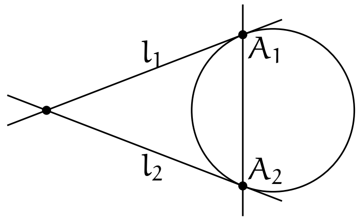
Exercice 35. Soit X un convexe dans un plan projectif.

a. Montrer que l'ensemble de droites disjointes avec X est dual à un convexe dans le plan projectif dual.

b. Trouver cet ensemble dans le cas ou X est un triangle.

Exercice 36. Soit Q une conique dans un plan projectif. Trouver la courbe formée par les tangents à Q dans le plan dual.

Exercice 37. Soit Q un cercle, l_1 et l_2 deux tangentes dans les points A_1 et A_2, respectivement. Tracer l'image de cette configuration par la transformation projective que envoie

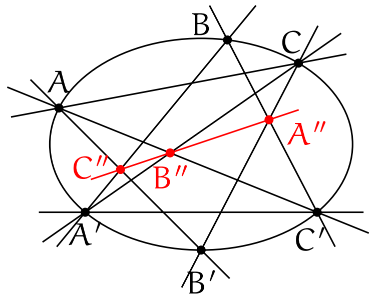


a. la droite l_1 à l'infini.

b. la droite A_1A_2 à l'infini.

Exercice 38. Soient A, B, $C_1, \dots C_4$ six points distincts sur une conique. Montrer que les birapports des droites AC_i et BC_i sont égaux.

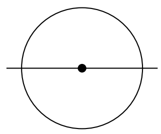
Exercice 39. *Théorème de Pascal.* Soient A,B,C et A',B',C' de triplets de points sur une conique. Alors les points d'intersection $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = CA' \cap C'A$ et $C'' = AB' \cap A'B$ sont alignés.



Exercice 40. *Théorème de Brianchon.* Formuler le théorème dual au théorème de Pascal.

Exercice 41.*

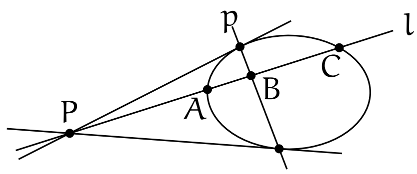
a. Soit A un point à l'intérieur d'une conique q et l une droite passant par a. Montrer qu'il existe une transformation projective qui envoi q vers le cercle unité, A vers l'origine et l vers l'axe des abscisses.



b. Soit h est une homographie d'une conique Q. Montrer qu'il existe une extension unique de h au plan projectif.

c. Trouver les homographies du plan projectif préservant le cercle unité correspondant au homographies du cercle unité $z \to z + 1$, $z \to 1/z$ et $z \to xz$.

Exercice 42. Soient Q une conique, P un point disjoint de Q et p sa polaire par rapport à Q. Soit l une droite passant par P et soient A, C et B les points d'intersection de l avec Q et p, respectivement. Trouver le birapport $[P, A, B, C]$.



Exercice 43. Trouver la polaire d'un point par rapport à une conique dégénérée.

Exercice 44. *Théorème de Lamé.* Montrer que les polaires d'un point par rapport a un faisceau de coniques sont concourants.

Exercice 45. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans une conique q. Soient $l_A, \dots, l_D$ les tangents à la conique dans les poins respectifs. Montrer que les poins $(AB) \cap (CD)$, $(BC) \cap (DA)$, $l_A \cap l_C$ et $l_B \cap l_D$ sont alignés.

Exercice 46.

a. Écrire l'équation du faisceau des coniques passant pas les points $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$. Combien de coniques de ce faisceau sont dégénérées. Traces les.

b. La même question pour les points $(-1,0)$,$(0,-1)$,$(1,0)$,$(0,\infty)$.

Exercice 47. Soit $ABCDE$ cinq points dans le plan. Construire la tangente en A à la conique passant par $ABCDE$.

Exercice 48. On donne quatre droites en position générale dans un plan affine. Montrer qu'il existe une et une seule parabole tangente à ces quatre droites.

Exercice 49. Trouver la limite du théorème de Brianchon quand l'hexagone se dégenre en quadrilatère.

Exercice 50. Construire les points de tangence d'une pentagone avec la conique inscrite.

Corrections :

1. $S_C \circ S_B = 2\vec{BC}$, $S_A \circ S_C = 2\vec{CA}$, $S_B \circ S_A = 2\vec{AB}$ alors $S_C \circ S_B \circ S_A \circ S_C \circ S_B \circ S_A = 2\vec{BC} + 2\vec{CA} 2\vec{AB} = id$

3a : $R_A^{\pi/3}(C') = B$, $R_A^{\pi/3}(C) = B'$ alors $|CC'| = |BB'|$ et $\angle(BB', CC') = \pi/3$.

3b : Soit $O = BB' \cap CC'$. Les points A, C', B, O sont cocirculaires car les angles opposés du quadrilatère $AC'BO$ sont complémentaires. De même A,O,C, B' sont cocirculaires. Alors A',C,O,B sont cocirculaires. Alors les cercles circonscrits autour des trois triangles passent par O. De même ils passent par les points d'intersection $CC' \cap AA'$ et $CC' \cap AA'$. alors ces points d'intersections coïncident.

3c : $R_{A''}^{2\pi/3}(C) = B$, $R_{B''}^{2\pi/3}(B) = A$, $R_{C''}^{2\pi/3}(A) = C$ alors $R_{C''}^{2\pi/3} R_{B''}^{2\pi/3} R_{A''}^{2\pi/3}(C) = C$. Car la somme des angles de rotation est 2π et il y a un point fixe, la composition $R_{C''}^{2\pi/3} R_{B''}^{2\pi/3} R_{A''}^{2\pi/3}$ est l'identité. Alors le triangle $A''B''C''$ est equilateral.

9. $\dfrac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}$;

25. Soit $Y = l \cap (BC)$. Introduisons le coordonnée z sur la droite BC telles que $z(B) = -1$, $z(X) = 0$ et $z(C) = 1$. La condition sur le birapport implique que $-1 = [B, X, C, Y] = [-1, 0, 1, z(Y)] = \frac{(z(Y)+1)(0-1)}{(z(Y)-1)(0+1)}$ et alors que $z(Y) = \infty$. Cela signifie que le point Y est à l'infini et que la droite l est parallèle à la droite BC.

26a. Les triangles YDC et CBX sont similaires. Alors $|DY|/|BC| = |DC|/|BX|$. Car $|DY| = y - d$, $|BC| = d$, $|DC| = b$ et $|BX| = x - b$ on à $(y-d)/b = d/(x-b)$. D'où $y = \frac{dx}{(x-b)}$.

26b. La projection centrale de la droite l_1 sur la droite l_2 est donnée par la formule de l'exercice 26a et c'est une homographie.

26c. La projection centrale est une homographie, alors elle préserve les birapports.

26d. Traçons d'abord les points $Y = AB' \cap A'B$ et $Z = BC' \cap B'C$. Puis le point $W = A'D \cup YZ$. Puis le point $D' = CW \cap l'$. Soit $X = AA' \cup YZ$. Alors $[A, B, C, D] = [X, Y, Z, W]$ car un quadruplet est une projection centrale de l'autre. De même $[X, Y, Z, W] = [A', B', C', D']$.

28. Soit $ABCDE$ le grand pentagone et $A'B'C'D'E'$ le petit. Soit h une transformation projective telle que $h(ABCD) = A'B'C'D'$. Elle existe et est unique car une transformation projective est uniquement déterminé par l'image de quatre points. Il faut montrer que $X := h(E) = E'$. On a des identités des birapports :

$$[D'C', D'B', D'A', D'E'] = [D'E, D'B', D'A', D'C] = [DE, DB', DA', DC] =$$

$$= [DE, DA, DB, DC] = [D'X, D'A', D'B', D'C'] = [D'C', D'B', D'A', D'X]$$

la dernière égalité est la conséquence de la symétrie de birapport : $[X, Y, Z, W] = [W, Z, Y, X]$. Alors $D'X = D'E'$. De même $A'X = A'E'$, d'où $X = E'$.