Université de Strasbourg
Mathématiques

Feuille 5

L3 Math
Analyse complexe
2023-2024

Exercice 1 –Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. On suppose que $\Re e(f)$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$. Montrer que f est constante (*Indic:* on pourra considérer e^f). Même question si $\Im m(f)$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$.

Exercice 2 –Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $D(0, R)$, et posons

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R.$$

Montrer que $M : [0, R[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et croissante. Montrer que si f n'est pas constante, la croissance est stricte.

Exercice 3 –Soit $r > 1$, et $f : D(0, r) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $C = C(0, 1)$ le cercle unité. On suppose que f prend des valeurs réelles en restriction à C.

1. Que peut-on dire de $|e^{if(z)}|$ et $|e^{-if(z)}|$ sur le disque $D(0, 1)$?
2. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 4 –*Le lemme de Schwarz*
Soit D le disque unité ouvert, et soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $f(D) \subset D$ et $f(0) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que sous ces hypothèses, on a $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$.

1. Soit $g : D \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \frac{f(z)}{z}$. Montrer que g s'étend en une fonction holomorphe (renotée g) sur D (on pourra se rappeler – voir exo 1 feuille 4– qu'une application continue, holomorphe partout sauf en un point est holomorphe).
2. Montrer que pour tout $0 < r < 1$, on a $\max_{z \in \overline{D}(0,r)} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$. En déduire que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$.
3. Déduire de la question précédente que $|f'(0)| \leq 1$.
4. On suppose qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'alors, il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$.
5. Montrer qu'on aboutit à la même conclusion si l'on suppose au départ que $f : D \to D$ est holomorphe et que $|f'(0)| = 1$.

Exercice 5 –*Biholomorphismes du disque*
On désigne toujours par D le disque unité ouvert. On appelle *biholomorphisme* de D une application $f : D \to D$ qui est bijective, holomorphe, et dont la bijection réciproque $f^{-1} : D \to D$ est également holomorphe. L'objectif de l'exercice est de déterminer *tous* les biholomorphismes de D.

1. Soit $\alpha \in D$. On pose, $\varphi_\alpha : z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$. Montrer que φ_α est un biholomorphisme de D (on explicitera la bijection réciproque).
2. Montrer que si $\psi : D \to D$ est un biholomorphisme tel que $\psi(0) = 0$, alors $|\psi'(0)| = 1$. En utilisant l'exercice précédent, décrire tous les biholomorphismes de D qui fixent 0.

3. Soit $f : D \to D$ un biholomorphisme. Montrer qu'il existe $\alpha \in D$ tel que $\psi := \varphi_\alpha \circ f$ fixe 0.
4. Démontrer que les biholomorphismes de D sont exactement les transformations $z \mapsto \lambda \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, où $|\lambda| = 1$ et $\alpha \in D$.

Exercice 6 –

1. Développer en série de Laurent sur $\mathbb{C}^*$ la fonction $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.
2. Développer la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)^2}$ en série de Laurent sur un disque épointé $\dot{D}(0,r)$. Donner le r maximal pour lequel ce développement est correct. Même question au voisinage de $z = 2$.

Exercice 7 –On considère la fonction

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

1. Déterminer un développement en série de Laurent de $z \mapsto \frac{1}{z-2}$ sur les domaines $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ et $\{z \in \mathbb{C} \ : |z| > 2\}$, ainsi que sur $D(0,2)$.
2. Déterminer un développement en série de Laurent de f sur les anneaux:

$$\{z \in \mathbb{C}^* \ : \ |z| < 1\}, \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 < |z| < 2\} \text{ et } \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 2\}.$$

Exercice 8 –

1. Donner un développement en série de Laurent de $z \mapsto \sin(\frac{1}{z})$ sur $\mathbb{C}^*$, et en déduire, pour tout $r > 0$, la valeur de l'intégrale $\int_{|z|=r} \sin(\frac{1}{z})\, dz$.
2. Calculer de même $\int_{|z|=r} \sin^2(\frac{1}{z})\, dz$.

Exercice 9 –Soient $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, et f une fonction holomorphe sur l'anneau

$$A(0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}.$$

On écrit le développement en série de Laurent de f comme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

Montrer que f admet une primitive holomorphe sur $A(0, r_1, r_2)$ si et seulement si $a_{-1} = 0$.

Exercice 10 –(*) Soit $f(z) := \sum_{n \geq 0} a_n z_n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in C(0,R)$ (le cercle centré en 0 et de rayon R). On dit que z_0 est *régulier* s'il existe $\epsilon > 0$ tel que f s'étende en une fonction holomorphe sur $D(0,R) \cup D(z_0, \epsilon)$. Montrer qu'il existe nécessairement des points de $C(0,R)$ qui ne sont pas réguliers.

Exercice 11 –(*) Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. Nous allons montrer qu'il est impossible d'avoir:

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = +\infty \ (*)$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'une telle fonction existe.

1. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans D, que l'on note $z_1, \ldots, z_n$.
2. Construire, à partir de f, une fonction h holomorphe et sans zéros dans D qui vérifie encore $(*)$ (on pourra regarder des expressions de la forme $\frac{f}{(z-z_1)^{m_1} \ldots (z-z_n)^{m_n}}$).
3. Montrer que $|h|$ atteint forcément un minimum local dans D. Aboutir à une contradiction.