Autour du théorème de Ferrand-Obata

Charles FRANCES et Cédric TARQUINI

May 20, 2008

Résumé

Le but de cet article est de donner une nouvelle démonstration du théorème de Ferrand Obata dans le cas d'une variété compacte en utilisant des méthodes dynamiques. Celles-ci nous permettront de généraliser ce théorème aux cas des feuilletages transversalement conformes de codimension supérieure à trois et ayant pour seules fonctions basiques les fonctions constantes.

Abstract

The aim of this article is to give a new dynamical proof of the Ferrand Obata theorem when the manifold is compact. This will give us a generalisation of this theorem to transversally conformal foliations of codimension greater than three and constant basic functions.

1 Introduction.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. On sait qu'alors son groupe d'isométries est également compact. Qu'en est-il de son groupe conforme? Le cas de la sphère nous montre que celui-ci peut ne pas être compact. En fait, on montre que lorsque Conf(M) est compact, il agit comme groupe d'isométries pour une métrique de la classe conforme de g. On dit dans ce cas qu'il est inessentiel. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le groupe conforme ne peut s'inclure dans le groupe d'isométries d'une métrique de la classe conforme de g, on dit qu'il est essentiel. Notons bien que pour une variété compacte, le groupe conforme est essentiel si et seulement si il est non compact. La question de savoir quelles variétés ont un groupe conforme essentiel, connue sous le nom de "conjecture de Lichnerowicz", a suscité de nombreux travaux aboutissant à des résultats partiels (Obata a traité le cas de la composante neutre Conf$_0(M)$ du groupe conforme d'une variété compacte. Voir [KP] p 93–103 pour une démonstration simplifiée de ce cas due à Lafontaine). La réponse complète à cette conjecture nous est donnée par le

Théorème 1 *([Fe1] [Fe2]) Soit (M, g) une variété de dimension $n \geqslant 2$. Le groupe Conf(M) est essentiel si et seulement si M est conformément équivalente à $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{R}^n$.*

On doit à Jacqueline Ferrand la preuve complète de ce théorème (une preuve avait été proposée auparavant par Alekseevskii mais elle s'est avérée inexacte). Sa démonstration nécessite toutefois la construction d'invariants conformes globaux, même dans le cas compact. Dans cet article, nous nous proposons de redémontrer de manière simple ce théorème dans le cas compact par des méthodes exclusivement dynamiques. Une partie de ces méthodes nous permettra également d'obtenir un analogue du théorème 1 pour certains feuilletages sous la forme du

Théorème 2 *Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété compacte munie d'un feuilletage transversalement conforme et de codimention supérieure à 3. Si toutes les fonctions basiques de $\mathcal{F}$ sont constantes, alors:*

- *soit $\mathcal{F}$ est riemannien,*
- *soit $\mathcal{F}$ est transversalement Möbius.*

Ce théorème est une première réponse à la question plus générale:

Question : Si un feuilletage transversalement conforme n'est pas riemannien, alors il est transversalement Möbius.

2 Préliminaires

Dans cet article toutes les variétés sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes, un difféomorphisme conforme local de (M,g) dans (N,h) est un difféomorphisme f d'un ouvert U de M dans un ouvert V de N vérifiant $f^\star h = e^\sigma g$ où σ est une application définie sur U à valeurs réelles.

Dans la suite nous fixerons une variété riemannienne (M,g) et nous nous intéresserons à l'ensemble des difféomorphismes conformes locaux. Nous le noterons $\mathrm{Conf}(M,g)_{loc}$ ou $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur g.

La classe conforme d'une métrique g est l'ensemble des métriques de la forme $e^\sigma g$ où σ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(M)$, nous la noterons $\mathcal{C}(g)$. Ainsi le groupe des difféomorphismes conformes de (M,g), qui sont les éléments de $\mathrm{Conf}(M,g)_{loc}$ définis sur M tout entier, sont encore les difféomorphismes f qui préservent $\mathcal{C}(g)$ i.e. tels que $f^\star g$ appartient à $\mathcal{C}(g)$.

Définition 1 *La variété (M^n,g) est conformément plate si en tout point de M il existe un voisinage ouvert U conformément équivalent à un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ munie de la métrique euclidienne, c'est à dire s'il existe un difféomorphisme conforme de (U,g) sur $(V,eucl)$.*

Exemples

- Toutes les variétés de dimension 2 sont conformément plates.
- Pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ et $\mathbb{S}^n$ munies de leur métriques standards sont conformément plates.

Désormais les variétés seront de dimension supérieure à 3, car sous cette condition il existe un tenseur qui mesure la platitude conforme. En dimension supérieure à 4 ce tenseur est appelé le tenseur de Weyl (noté W) , il satisfait aux propriétés suivantes (voir [GHL] section 3 p156–157 ou [KP] p65–75):

1. En dimension 3, W est identiquement nul, la platitude est mesurée par un $(2,1)$ tenseur, le tenseur de Schouten S.
2. En dimension supérieure à 4, tout ouvert sur lequel W s'annule est conformément plat.
3. Le tenseur W est invariant par $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$, i.e. si f est un élément de $\mathrm{Conf}(M)_{loc}$ nous avons $f^\star W = W$ là où f est définie.

3 Le point de vue local

Définition 2 *Nous appellerons métrique singulière sur une variété M une métrique de la forme λg où g est une métrique riemannienne de classe C^∞ sur M et λ une fonction C^∞ de M à valeurs dans $\mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$. Nous appellerons support de cette métrique l'ouvert sur lequel λ ne s'annule pas.*

Nos démonstrations des théorèmes 1 et 2 vont s'appuyer toutes deux sur la propriété fondamentale suivante:

Proposition 1 *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension supérieure ou égale à trois qui ne soit pas conformément plate. Alors il existe sur M une métrique riemannienne singulière non triviale (c'est-à-dire de support non vide) préservée par le pseudogroupe Conf$(M)_{loc}$.*

Preuve : On traite d'abord le cas où la dimension est strictement supérieure à 3. Notons W le tenseur de Weyl associé à g. On définit $\|W\|_g(x)$ comme le supremum des valeurs de $\|W_x(u,v)w\|_g$ lorsque u, v, w parcourent la boule unité de l'espace tangent en x. C'est une fonction C^∞ là où elle ne s'annule pas. Si ϕ est un élément de Conf$(M)_{loc}$ et que $\phi^\star g = e^{2\sigma} g$ alors $\|W\|_g(\phi(x)) = e^{-2\sigma}\|W\|_g(x)$. On en déduit que la métrique singulière $h = \|W\|_g g$ est préservée par Conf$(M)_{loc}$. Cette métrique n'est pas triviale puisqu'on a supposé M non conformément plate. $\square$

Remarque 1 *Dans le cas où la dimension de M est 3, Conf$(M)_{loc}$ préserve la métrique singulière $h = \|S\|_g^{\frac{2}{3}} g$ (où S est le tenseur de Schouten).*

4 Application à la démontration du théorème 1

Pour commencer, rappelons deux résultats classiques concernant les actions essentielles (voir [Fe1] théorème A2).

Proposition 2 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Alors il y a équivalence entre:*
(i)Conf(M) est essentiel.
(ii)Conf(M) n'est pas compact.

Proposition 3 *Soit (M, g) une variété riemannienne. Alors il y a équivalence entre:*
(i) Conf(M) est essentiel.
(ii) Conf(M) n'agit pas proprement sur M.

La proposition 1 va nous permettre d'obtenir une version locale du théorème 1.

Proposition 4 *Si (M, g) est une variété riemannienne compacte non conformément plate, alors le groupe Conf(M) est compact.*

Preuve : La variété M étant par hypothèse non conformément plate, l'ouvert $U(W)$ où le tenseur de Weyl ne s'annule pas est non vide. S'il est égal à M, la métrique h est une vraie métrique riemannienne. Comme le groupe Conf(M) préserve cette métrique, il est compact.

Sinon, appelons $K(W)$ le compact de M sur lequel le tenseur de Weyl s'annule. On considère les ensembles $K_\epsilon = \{x \in U(W)\ \mathrm{d}_h(x, K(W)) \geqslant \epsilon\}$ où d_h désigne la pseudo-distance définie par h sur M. Ces ensembles $(K_\epsilon, \mathrm{d}_h)$ sont des espaces métriques compacts, d'intérieur non vide pour ϵ assez petit. Le groupe Conf(M) agit dessus par isométrie. L'ouvert $(\mathring{K}_\epsilon, h)$ est muni d'une structure de variété riemannienne. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Conf(M), il existe alors une sous-suite

$(f_{\varphi(i)})$ convergeant uniformément sur K_ϵ vers une isométrie f_∞ de $(K_\epsilon, \mathrm{d}_\epsilon)$. De plus, f_∞ est un difféomorphisme sur $\overset{\circ}{K}_\epsilon$ et la convergence est en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overset{\circ}{K}_\epsilon$. La suite $(f_{\varphi(i)})$ de Conf(M) converge de façon $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\overset{\circ}{K}_\epsilon$ vers un difféomorphisme de $\overset{\circ}{K}_\epsilon$. On peut alors affirmer que $f_{\varphi(i)}$ converge dans Conf(M) grâce au lemme standard suivant:

Lemme 1 *Soit (M, g) une variété et (f_i) une suite d'éléments de Conf(M). Supposons qu'il existe un ouvert U de M sur lequel la suite (f_i) converge de manière C^∞ vers un difféomorphisme défini sur U, alors la suite (f_i) converge dans Conf(M).*

Preuve : C'est une conséquence de la rigidité à l'ordre 2 des applications conformes en dimension supérieure ou égale à 3. Si les 2-jets d'une suite d'applications conformes convergent, c'est que la suite elle-même converge. □

□

Comme conséquence directe des propositions 2 et 4, on a le

Corollaire 1 *Une variété riemannienne compacte dont le groupe conforme est essentiel est conformément plate.*

Remarque 2 *Pour prouver la proposition 4, nous avons montré que sur une variété M compacte de dimension supérieure à 3, une suite (f_i) d'applications conformes préservant une métrique singulière agissait proprement. On peut se demander si c'est encore le cas lorsque M n' est pas compacte (notre démonstration du théorème 1 serait alors valable dans le cas non compact). Plus généralement, on peut d'ailleurs se poser la*

Question *: Une suite d'applications rigides à l'ordre r qui préservent une métrique singulière sur une variété M agit-elle proprement sur cette variété?*

(Lorsque l'on dit qu'une suite d'applications (f_i) est rigide à l'ordre r, cela signifie que (f_i) agit proprement sur le fibré des r-jets d'applications de M dans M).

5 Le passage du local au global : fin de la preuve du théorème 1

Cette partie de la preuve est essentiellement basée sur l'utilisation des propriétés dynamiques des suites de Conf$(\mathbb{S}^n)$ tendant vers l'infini. Nous résumons les caractéristiques de cette dynamique dans les deux lemmes suivants :

Lemme 2 Dynamique "Nord-Sud"
Soit (ϕ_i) une suite de Conf$(\mathbb{S}^n)$ tendant vers l'infini. Il existe alors une sous-suite, renotée (ϕ_i), et deux points a et r (éventuellement confondus) tels que :

- *pour tout point x de $\mathbb{S}^n \setminus \{r\}$ la suite $(\phi_i(x))$ tend vers a et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{S}^n \setminus \{r\}$.*
- *pour tout point x de $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$ la suite $(\phi_i^{-1}(x))$ tend vers r et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$.*

Les points a et r seront appelés pôles de la suite (ϕ_i).

Lemme 3 *Soit (ϕ_i) une suite de Conf($\mathbb{S}^n$) de pôles a et r. Pour tout ouvert U contenant a (resp r), quitte à considérer une suite extraite de (ϕ_i), il existe une suite U_i d'ouverts de U tels que $\overline{\phi_i{}^{-1}(U_i)} \subset \phi_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$ (resp $\overline{\phi_i(U_i)} \subset \phi_{i+1}(U_{i+1})$) et $\mathbb{S}^n \backslash \{a\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \phi_i{}^{-1}(U_i)$ (resp $\mathbb{S}^n \backslash \{r\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(U_i)$).*

Grâce au corollaire 1, nous savons que la variété M est conformément plate. Nous notons δ l'application développante de son revêtement universel $\tilde{M}$ dans $\mathbb{S}^n$. Dans toute la suite, nous utiliserons l'équivalence énoncée dans le théorème 3 et prendrons pour hypothèse que Conf(M) n'agit pas proprement sur M. Nous avons alors la

Proposition 5 *Soit (M, g) une variété riemannienne dont le groupe conforme n'agit pas proprement, alors l'application développante δ est injective.*

Preuve : On remarque d'abord que si Conf(M) n'agit pas proprement sur M, alors Conf($\tilde{M}$) n'agit pas proprement sur $\tilde{M}$. Il existe donc une suite (x_i) de $\tilde{M}$ qui converge vers x_∞ dans $\tilde{M}$ et une suite (f_i) d'éléments de Conf($\tilde{M}$) tendant vers l'infini tels que $f_i(x_i)$ converge vers y_∞ dans $\tilde{M}$. Par une propriété classique de l'application développante, $\delta \circ f_i = \phi_i \circ \delta$ où ϕ_i est une suite d'éléments de Conf($\mathbb{S}^n$). Du fait que δ est un difféomorphisme local et grâce au lemme 1, on voit que (ϕ_i) tend elle aussi vers l'infini. Quitte à considérer des sous-suites, (ϕ_i) admet une dynamique de pôles a et r. D'autre part $\delta \circ f_i(x_i)$ converge vers $\delta(y_\infty)$. En faisant tendre i vers l'infini, on a d'après le lemme 2 que $\delta(x_\infty) = r$ ou bien $\delta(y_\infty) = a$. Quitte à considérer $(f_i{}^{-1})$ au lieu de (f_i) et à inverser les rôles de (x_i) et (y_i), nous supposerons désormais $\delta(x_\infty) = r$.

Soient maintenant Ω et Ω' deux ouverts contenant respectivement x_∞ et y_∞ tels que δ soit injective sur Ω et $\overline{\Omega'}$ (on suppose de plus $\delta(\Omega') \neq \mathbb{S}^n$ et Ω' homéomorphe à une boule euclidienne.) D'après le lemme 3, il existe une suite U_i d'ouverts de Ω tels que: $\overline{\phi_i(\delta(U_i))} \subsetneq \phi_{i+1}(\delta(U_{i+1}))$. On note $\Omega_i = f_i(U_i)$. Alors $\overline{\delta(\Omega_i)} \subsetneq \delta(\Omega_{i+1})$ et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \delta(\Omega_i) = \mathbb{S}^n \backslash \{a\}$. Nous énonçons à présent deux lemmes qui vont nous être utiles pour la suite.

Lemme 4 *Soit V un ouvert de $\tilde{M}$ (différent de $\tilde{M}$) sur lequel δ est injective et $\delta(V) \subsetneq S^n$. Alors δ envoie la frontière de V dans la frontière de $\delta(V)$.*

Notation 1 *Si V est une partie d'un espace topologique X, la frontière de V, c'est-à-dire l'adhérence de V privée de l'intérieur de V, sera notée $Fr(V)$.*

Preuve : Soit (v_n) une suite de V qui tend vers $v \in Fr(V)$. Supposons que $y = \delta(v)$ soit dans $\delta(V)$. On note δ^{-1} l'application de $\delta(V)$ dans V qui inverse δ sur ce domaine. Alors $\delta^{-1}(y) \in V$ et donc $\delta^{-1}(y) \neq v$. D'autre part, $\delta^{-1}(\delta(v_n))$ est une suite de V qui tend vers $\delta^{-1}(y)$ donc pour n assez grand, $\delta^{-1}(\delta(v_n)) \neq v_n$ ce qui contredit l'injectivité de δ sur V. $\square$

Lemme 5 *Soient U et V deux ouverts de $\tilde{M}$ sur lesquels δ est injective et tels que $U \cap V \neq \emptyset$ et $\overline{\delta(U)} \subsetneq \delta(V)$. Alors $U \subsetneq V$.*

Preuve : Supposons que $U \not\subset V$. Dans ce cas, il existe x dans $Fr(V) \cap U$. Mais alors d'après le lemme 4, $\delta(x)$ appartient à la fois à $Fr(\delta(V))$ et à $\delta(U)$. Or l'intersection de ces ensembles est vide par l'hypothèse $\overline{\delta(U)} \subsetneq \delta(V)$. $\square$

Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant:

Lemme 6 *Il existe une suite (i_n) telle que $\Omega_{i_n} \cap \Omega_{i_{n+1}} \neq \emptyset$.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que puisque $f_i(x_i)$ tend vers y_∞, $\Omega_i \cap \Omega' \neq \emptyset$ pour i suffisamment grand. Deux cas sont alors à envisager:

S'il existe une suite (i_n) pour laquelle $\underline{\Omega_{i_n}} \subset \Omega'$, alors du fait que δ est un difféomorphisme de Ω' sur son image et grâce à l'inclusion $\overline{\delta(\Omega_{i_n})} \subset \delta(\Omega_{i_{n+1}})$, on conclut que $\Omega_{i_n} \subset \Omega_{i_{n+1}}$ et en particulier $\Omega_{i_n} \cap \Omega_{i_{n+1}} \neq \emptyset$.

Dans le cas contraire, pour i grand, on a $\Omega_i \cap Fr(\Omega') \neq \emptyset$ et nous allons montrer qu'en fait Ω_i contient $Fr(\Omega')$, ce qui impliquera le résultat souhaité.

Par le lemme 4, on obtient $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')) \subset Fr(\delta(\Omega'))$. Nous allons tout d'abord montrer qu'il y a en fait égalité lorsque i est grand. Soit $y \in Fr(\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$. Alors $y \in Fr(\delta(\Omega'))$ et comme pour i suffisamment grand $Fr(\delta(\Omega')) \subset \delta(\Omega_i)$, on obtient $y \in \delta(\Omega_i)$. Soit $z \in \Omega_i$ tel que $\delta(z) = y$. Si l'on avait $z \in \Omega_i \backslash Fr(\Omega')$, il existerait un ouvert V contenant z et tel que $\delta(V) \cap \delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')) = \emptyset$ ce qui est absurde car $\delta(V)$ est un ouvert contenant y et $y \in Fr(\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')))$. Par conséquent $z \in \Omega_i \cap Fr(\Omega')$ et donc $y \in \delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$. Ceci prouve que $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$ est fermé dans $Fr(\delta(\Omega'))$. D'autre part, comme δ est injective sur $\overline{\Omega'}$, $Fr(\delta(\Omega')) = \delta(Fr(\Omega'))$ et $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega'))$ est ouvert dans $Fr(\delta(\Omega'))$. Enfin, $Fr(\delta(\Omega'))$ est connexe car on a pris Ω' difféomorphe à une boule euclidienne. L'égalité recherchée en découle. De l'injectivité de δ sur $\overline{\Omega'}$ et de $\delta(\Omega_i \cap Fr(\Omega')) = \delta(Fr(\Omega'))$, on déduit $\Omega_i \cap Fr(\Omega') = Fr(\Omega')$ ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Le résultat du lemme et l'inclusion $\overline{\delta(\Omega_{i_n})} \subsetneq \delta(\Omega_{i_{n+1}})$ permettent d'appliquer le lemme 5 et d'obtenir $\Omega_{i_n} \subsetneq \Omega_{i_{n+1}}$. Posons alors $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{i_n}$. L'application δ est injective sur W puisqu'elle l'est sur chaque Ω_i et $\delta(W) = \mathbb{S}^n \backslash \{a\}$. Si W est fermé, $W = \tilde{M}$ et la proposition est démontrée. Sinon, par le lemme 4, un point de $Fr(W)$ doit avoir pour image a. Comme δ est un difféomorphisme local, cela signifie que $Fr(W)$ est discrète. Mais si $Fr(W)$ contient deux points distincts u et v, on peut trouver deux ouverts U, V de $\tilde{M}$ disjoints et un ouvert Z de $\mathbb{S}^n$ contenant a tels que :

- $U \backslash \{u\} \subset W$ et $V \backslash \{v\} \subset W$.
- δ est un difféomorphisme de U sur Z.
- δ est un difféomorphisme de V sur Z.

Ceci est incompatible avec l'injectivité de δ sur W. On conclut alors que $Fr(W) = \{w\}$; $\tilde{M} = W \cup \{w\}$ et δ est injective sur $\tilde{M}$ puisque $\delta(w) = a$ et $\delta(W) = \mathbb{S}^n \backslash \{a\}$. $\square$

Grâce à la proposition 5 il ne nous reste plus qu'à prouver le théorème dans le cas des variétés obtenues comme quotients d'ouverts de $\mathbb{S}^n$. Soit donc U un ouvert de $\mathbb{S}^n$ et Γ un groupe discret de $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^n)$ agissant proprement discontinuement sans point fixe sur U. Nous notons M la variété U/Γ et π l'application de revêtement de U sur M. Nous concluons grâce à la

Proposition 6 *Si Conf(M) n'agit pas proprement sur M, alors M est conformément équivalente à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. En particulier, si M est compacte, elle est conformément équivalente à $\mathbb{S}^n$.*

Notons $\widetilde{\mathrm{Conf}(U)}$ le normalisateur de Γ dans $\mathrm{Conf}(U)$. Alors $\widetilde{\mathrm{Conf}(U)}$ n'agit pas proprement sur U. Il existe par conséquent une suite (ϕ_i) de $\widetilde{\mathrm{Conf}(U)}$ tendant vers l'infini dont l'un des pôles est dans U. On peut supposer qu'il s'agit de r. Soit Ω un domaine d'injectivité de π autour de r. Le lemme 2 assure alors l'existence d'une suite d'ouverts Ω_i inclus dans Ω tels que $\phi_i(\Omega_i)$ soit croissante et $\mathbb{S}^n \backslash \{a\} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {\phi_i}^{-1}(U_i) \subset U$. Mais comme les ϕ_i normalisent Γ, $\pi|_{\phi_i(\Gamma_i)}$ est injective pour tout $i \in \mathbb{N}$. D'où π est injective sur $\mathbb{S}^n \backslash \{a\}$. Ceci implique d'une part que $\Gamma = \{Id\}$, et d'autre part que $U = \mathbb{S}^n$ ou $U = \mathbb{S}^n \backslash \{a\}$, qui est conformément équivalent à $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3 *Notons que cette partie de la preuve n'utilise pas la compacité de M.*

6 Application aux feuilletages

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée compacte, (U_i) un recouvrement de M par des ouverts feuilletés trivialement, i.e. difféomorphes à $V_i \times T_i$, où V_i est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (p dimension des feuilles) et T_i un ouvert de $\mathbb{R}^q$ (q la codimension). Nous noterons $f_i : U_i \to \mathbb{R}^q$ les projections, $T = \cup_i T_i$ la transversale et $(\gamma_{i,j})_{i,j}$ le cocycle associé à ce recouvrement ($\forall i, j \quad f_i = \gamma_{i,j} \circ f_j \quad \text{sur} \quad U_i \cap U_j$). Le pseudogroupe Γ engendré par les $\gamma_{i,j}$ est le pseudogroupe d'holonomie du feuilletage associé à la transversale T.

Nous dirons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement conforme si la transversale T possède une métrique riemannienne g pour laquelle les $\gamma_{i,j}$ sont des difféomorphismes conformes locaux.

Rappelons que les fonctions basiques de $\mathcal{F}$ sont les fonctions constantes le long des feuilles.

Exemples

- Tout feuilletage riemannien est tranversalement conforme.
- En codimension deux, tout feuilletage transversalement holomorphe est transversalement conforme.
- Un feuilletage transversalement Möbius est transversalement conforme. Si la codimension est supérieure à 3, le théorème de Liouville nous dit que ce sont les feuilletages transversalement conformément plats.

Cette partie est dédiée à la démonstration du théorème 2 qui rappelons-le est une version transverse à un feuilletage du théorème 1. Une motivation de la question posée dans l'introduction est qu'elle admet une réponse positive pour des feuilletages crées par suspension d'un difféomorphisme. Cela découle immédiatement du théorème de Ferrand.

En effet, soient B et F deux variétés (où F est de dimension $q \geqslant 3$). Posons M la variété donnée par la suspension d'une représentation $\varphi : \pi_1(B) \to Diff^\infty(F)$. Alors le feuilletage suspension $\mathcal{F}$, transverse aux fibres de la projection $M \to B$, est transversalement conforme si et seulement si la variété F possède une métrique g pour laquelle $\varphi(\pi_1(B)) \subset \mathrm{Conf}(F, g)$. En appliquant le théorème 1, soit $\mathrm{Conf}(F)$ est essentiel, dans ce cas (F, g) est conformément équivalent à $\mathbb{S}^q$ ou $\mathbb{R}^q$ et le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement Möbius, soit il est un groupe d'isométrie pour une métrique dans $\mathcal{C}(g)$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors riemannien. $\square$

Proposition 7 *Tout feuilletage transversalement conforme non riemannien sur une variété (compacte ou non), donné par une suspension de $\varphi : \pi_1(B) \to Diff^\infty(F)$ (où F est de dimension $q \geqslant 3$) est un feuilletage transversalement Möbius.*

Une dernière remarque avant de commencer la démonstration, l'hypothèse du théorème 2 est en particulier vérifiée si le feuilletage admet une feuille dense. Et grâce au corollaire B énoncé par Asuke [As], nous déduisons du théoème 2 le corollaire suivant:

Corollaire 2 *Un flot transversalement conforme (au sens des feuilletages) sur une variété compacte de dimension supérieure à 4 dont toutes les orbites sont denses est riemannien.*

En effet la codimension est supérieure à 3, le flot est d'après la théorème ci-dessus soit riemannien soit transversalement conformément plat. Et dans la cas où le flot est transversalement conformément plat le corollaire B d'Asuke [As] nous assure qu'il est riemannien. $\square$

Revenons au théorème 2, de la proposition fondamentale 1 nous déduisons la suivante:

Proposition 8 *Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage transversalement conforme de codimension supérieure à 3. Alors soit $\mathcal{F}$ est transversalement Möbius, soit il existe un ouvert saturé non vide sur lequel le feuilletage est riemannien.*

Preuve : Par définition le feuilletage possède une transversale T munie d'une métrique g pour laquelle le pseudogroupe d'holonomie Γ est un sous-pseudogroupe de $\mathrm{Conf}(T, g)_{loc}$. Si le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas transversalement conformément plat, i.e si (T, g) n'est pas conformément plate alors d'après la proposition 1, T possède une métrique singulière non triviale préservée par $\mathrm{Conf}(T, g)_{loc}$ et donc par Γ. Appelons-la h. En restriction au support de h, le pseudogroupe Γ est un pseudogroupe d'isométrie. Le feuilletage F est riemannien sur l'ouvert saturé de M qui se projète sur le support de h.

Reste le cas où (T, g) est conformément plate, c'est à dire localement conformément difféomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^q$. En vertu du théorème de Liouville et quitte à rétrécir les ouverts $(U_i)_i$, les $\gamma_{i,j}$ sont des restrictions d'applications de Möbius. Le feuilletage est donc transversalement Möbius. Ceci démontre la proposition. □

Pour montrer le théorème 2, il suffit de montrer que si le support $U(h)$ de la métrique singulière h est non vide et distinct de T, alors il existe des fonctions basiques non constantes.

Nous supposons donc que l'ouvert $U(h)$ est un sous ensemble propre et non vide de T. La métrique singulière h construite au paragraphe précédent peut être remontée en une métrique singulière sur M, quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$, et qui en restriction à l'espace tangent aux feuilles, est une forme définie positive. Cela est possible grâce à l'invariance de h par le pseudogroupe d'holonomie.

Notons $\bar{h}$ la métrique ainsi construite et $U(\bar{h})$ l'ouvert saturé qui se projette sur $U(h)$. Le fermé K complémentaire de $U(\bar{h})$ est l'ensemble sur lequel $\bar{h}$ est singulière. Nous pouvons construire $\mathrm{d}\colon M \times M \to \mathbb{R}^+$ la métrique singulière induite par $\bar{h}$:

$$\mathrm{d}(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma) \qquad \text{où} \quad l(\gamma) = \int \sqrt{\bar{h}_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\mathrm{d}t$$

et où l'infimum est pris sur l'ensemble des chemins γ $\mathcal{C}^1$ par morceaux reliant x à y. Posons $\mathrm{d}_K : M \to \mathbb{R}_+$ l'écart d'un point x de M à K : $\mathrm{d}_K(x) = \inf_{\{z \in K\}} \mathrm{d}(x, z)$.

Nous pouvons remarquer que $\mathrm{d}_K(x)$ est nul si et seulement si x est dans K. Le lemme suivant est dû à M. H. Rigal (voir le lemme 1 de [Ri]) :

Lemme 7 *Pour tout point x de $U(\bar{h})$ il existe un chemin C^1 $\gamma : [0, 1] \to M$ vérifiant : $\gamma(0) = x$, $\gamma|_{[0,1[}$ est contenu dans $U(\bar{h})$ et est une géodésique de longueur $d_K(x)$ perpendiculaire à $\mathcal{F}$ pour $\bar{h}$ qui s'accumule sur K.*

La démonstration de ce lemme peut se faire en construisant le chemin par récurrence.

Preuve : Si x est fixé dans l'ouvert $U(\bar{h})$, pour tout entier $n \geq 1$ il existe un chemin $\gamma_n : [0, 1] \to M$ vérifiant:

$$\gamma_n(0) = x, \quad \gamma_n(1) = z_n \in Fr(U(\bar{h})), \quad \gamma_n([0, 1[) \subset U(\bar{h}) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_K(x) \leq l(\gamma_n) \leq \mathrm{d}_K(x) + \frac{1}{n}$$

Notons y_n le milieu de γ_n, ce point satisfait :

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}_K(x) \leq \mathrm{d}(x, y_n) = \mathrm{d}(y_n, z_n) \leq \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}_K(x) + \frac{1}{n}\right)$$

Comme la variété est compacte il existe y point d'accumulation de (y_n) et z de (z_n). Le point y est dans l'ouvert $U(\bar{h})$ car par continuité de d : $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}_K(x)/2$. De même nous avons $\mathrm{d}(y,z) = \mathrm{d}_K(x)/2$ et $\mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}_K(x)$. Le chemin γ sur $[0,1/2]$ est donné par une géodésique reliant x à $y = \gamma(1/2)$. Il faut ensuite recommencer le processus entre y et z pour construire γ sur $[1/2,3/4]$. En appliquant l'inégalité triangulaire nous obtenons : $\mathrm{d}_K(x) = \mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,\gamma(3/4)) + \mathrm{d}(\gamma(3/4),z)$ or $\mathrm{d}(\gamma(3/4),z) = \mathrm{d}_K(x)/4$, donc

$$\frac{3}{4}\mathrm{d}_K(x) \leq \mathrm{d}(x,\gamma(\tfrac{3}{4})) \leq \mathrm{d}(x,\gamma(\tfrac{1}{2})) + \mathrm{d}(\gamma(\tfrac{1}{2}),\gamma(\tfrac{3}{4})) = \frac{3}{4}\mathrm{d}_K(x)$$

Le chemin γ réalise la distance minimale entre x et $\gamma(3/4)$, c'est une géodésique donc automatiquement $\mathcal{C}^1$. En poursuivant, nous obtenons une géodésique de $(U(\bar{h}),\bar{h})$ qui admet z comme point adhérent.

Par un argument de Reinhart, comme la métrique singulière $\bar{h}$ est quasi-fibrée, il suffit de montrer que cette géodésique est orthogonale à une feuille en un point pour montrer qu'elle l'est partout. Or une courbe non orthogonale aux feuilles ne pourrait être de longueur minimale. $\square$

Comme d_K est localement constante le long des feuilles de $\mathcal{F}$, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3 *La fonction d_K est basique et non constante.*

Ce qui démontre le théorème et nous permet de compléter la proposition 8 par :

Proposition 9 *Dans le cas où la codimension est supérieure à 3, soit le feuilletage est transversalement Möbius, soit il existe un ouvert saturé non vide sur lequel le feuilletage est riemannien et dont la distance au bord est invariante par le pseudogroupe d'holonomie.*

Remerciements
Nous tenons à remercier Gaël Meigniez et Abdelghani Zeghib pour le soutien qu'ils ont apporté à ce travail ainsi que l'Université Autonome de Barcelone pour son accueil.

References

[A] D.V. ALEKSEEVSKII : *Groups of transformations of riemannian spaces*, Mat. Sbornik **89** (131) 1972 $n^o 2$ et Math. USSR Sbornik **18** (1972) $n^o 2$ 285–301.

[As] T. ASUKE : *On transversaly flat conformal foliations with good measures II*, Hiroshima Math. J. **28** (1998) 523–525.

[Be] A.BESSE : *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer Verlag. Berlin 1986.

[Fe1] J. FERRAND : *The action of conformal transformations on a Riemannian manifold*, Math. Ann. **304** (1996), 277–291.

[Fe2] J. FERRAND : *Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes: application à la démonstration d'une conjecture de A. Lichnerowicz*, C.R.Acad.Sci. Paris, Série A, **269** (1969), 583-586.

[GHL] GALLOT HULIN LAFONTAINE : *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987, 1990.

[KP] S.KULKARNI,U.PINKALL : *Conformal Geometry*, Aspects of Mathematics, Max Planck Institut fur Mathematik. Vieweg (1988). Voir en particulier les sections *Conformal geometry from the riemannian viewpoint* et *The theorem of Lelong-Ferrand and Obata*.

[Ob] M. OBATA : *The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **6** (1971) 247–258.

[Ri] M. H. RIGAL : *Rigidité des feuilletages transversalement conformément parallélisables*, Tôhoku Math. J. **50** (1998) 407–418.

[Sp] M.SPIVAK : *A comprehensive introduction to differential geometry*, volume **5**, Publish or Perish,Inc.

Charles FRANCES
UMPA, École Normale de Lyon
46 allée d'Italie
69 364 Lyon Cedex 07
Courriel : cfrances@umpa.ens-lyon.fr

Cédric TARQUINI
LMAM
Université de Bretagne-Sud
Campus de Tohannic
BP 573- 56000 Vannes
Courriel : tarquini@univ-ubs.fr