



Schémas « asymptotic preserving » sur maillages non structurés.

Application au transport linéaire et aux systèmes de Friedrichs

Emmanuel Franck

Directeurs de thèse: Christophe Buet (CEA), Bruno Després (UPMC)

CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France - UPMC/LJLL

19/09/2012

- 1 Introduction
- 2 Schémas AP en 1D et difficultés en 2D
- 3 Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique en 2D
- 4 Schémas AP pour les approximations angulaires
- 5 Discrétisation du modèle non linéaire  $M_1$
- 6 Résultats numériques
- 7 Conclusions et perspectives



- **Équation de transport linéaire** : soit  $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \geq 0$  la fonction de distribution des particules (photons ou neutrons) localisées en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  et de direction  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \in \mathbb{S}^{d-1}$ . On considère l'équation de transport

$$\partial_t f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \int_S \left( f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}') - f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \right) d\boldsymbol{\Omega}'.$$

avec  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et  $\sigma > 0$ .

- **Limite de diffusion** : pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'équation de transport tend vers l'équation de diffusion

$$\partial_t E - \operatorname{div} \left( \frac{1}{3\sigma} \nabla E \right) = 0,$$

avec  $E = \int_{S^{d-1}} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{F} = \int_{S^{d-1}} \boldsymbol{\Omega} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}$  et  $S^{d-1} = \{\|\boldsymbol{\Omega}\| = 1, \boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^d\}$ .

- **Équation de transport linéaire** : soit  $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \geq 0$  la fonction de distribution des particules (photons ou neutrons) localisées en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  et de direction  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \in \mathbb{S}^{d-1}$ . On considère l'équation de transport

$$\partial_t f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \int_S \left( f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}') - f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \right) d\boldsymbol{\Omega}'.$$

avec  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et  $\sigma > 0$ .

- **Limite de diffusion** : pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'équation de transport tend vers l'équation de diffusion

$$\partial_t E - \operatorname{div} \left( \frac{1}{3\sigma} \nabla E \right) = 0,$$

avec  $E = \int_{S^{d-1}} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{F} = \int_{S^{d-1}} \boldsymbol{\Omega} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}$  et  $S^{d-1} = \{\|\boldsymbol{\Omega}\| = 1, \boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^d\}$ .

- **Le coût de calcul** étant trop important on résout des modèles approximant l'équation de transport.

- Modèles hyperboliques, dépendant uniquement de  $\mathbf{x}$  et  $t$ .
- Modèles simplifiés :
  - Modèles  $P_n$  : développement de l'équation de transport sur une base d'harmoniques sphériques.
  - Modèles  $S_n$  : approximation de l'opérateur intégrale à l'aide d'une formule de quadrature.
  - Modèles  $M_n$  : extensions non linéaires des modèles  $P_n$ .

Modèle  $P_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}. \end{array} \right.$$

- Modèles hyperboliques, dépendant uniquement de  $\mathbf{x}$  et  $t$ .
- Modèles simplifiés :
  - Modèles  $P_n$  : développement de l'équation de transport sur une base d'harmoniques sphériques.
  - Modèles  $S_n$  : approximation de l'opérateur intégrale à l'aide d'une formule de quadrature.
  - Modèles  $M_n$  : extensions non linéaires des modèles  $P_n$ .

Modèle  $P_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}. \end{array} \right.$$

- Méthodes numériques adaptées : schémas de volumes finis « asymptotic preserving » (AP) capturant la limite de diffusion.

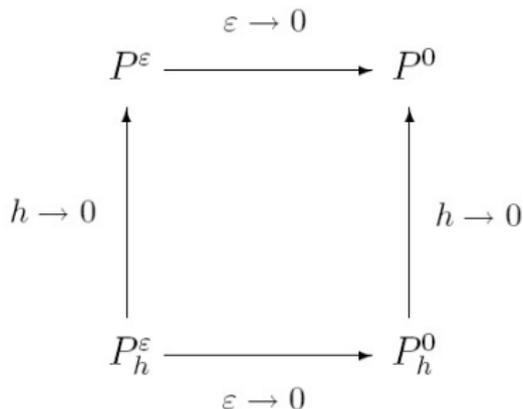
## Objectif :

Construction de schémas de type volumes finis pour les modèles simplifiés capturant la limite de diffusion sur maillages non structurés.



## Schémas « asymptotic preserving »

- Un schéma  $(P_h^\varepsilon)$  est dit « **asymptotic preserving** » lorsqu'il tend vers un schéma limite  $(P_h^0)$  consistant avec le modèle limite  $(P^0)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro avec  $h > 0$  le paramètre de discrétisation fixé.
- Un schéma est dit **uniformément « asymptotic preserving »** si l'estimation d'erreur et la condition CFL associées sont indépendantes de  $\varepsilon$ .



## Schémas « asymptotic preserving »

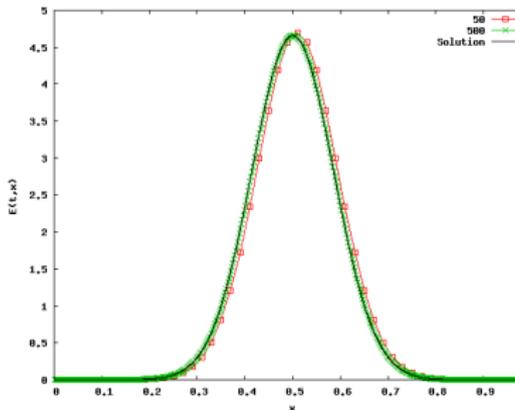
- Un schéma ( $P_h^\varepsilon$ ) est dit « **asymptotic preserving** » lorsqu'il tend vers un schéma limite ( $P_h^0$ ) consistant avec le modèle limite ( $P^0$ ) quand  $\varepsilon$  tend vers zéro avec  $h > 0$  le paramètre de discrétisation fixé.
- Un schéma est dit **uniformément « asymptotic preserving »** si l'estimation d'erreur et la condition CFL associées sont indépendantes de  $\varepsilon$ .

## Contraintes

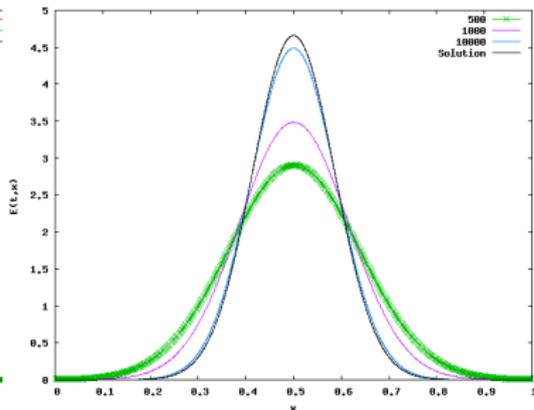
- Schémas « asymptotic preserving » basés sur le schéma de Godunov ou upwind (bonnes propriétés en régime de transport).
- Schémas centrés aux mailles (pour compatibilité avec les schémas hydrodynamiques).

- **Test de validation des schémas AP** : les données sont  $E(0, x) = G(x)$  avec  $G(x)$  une Gaussienne,  $F(0, x) = 0$  et  $\sigma = 1$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

### Schéma AP



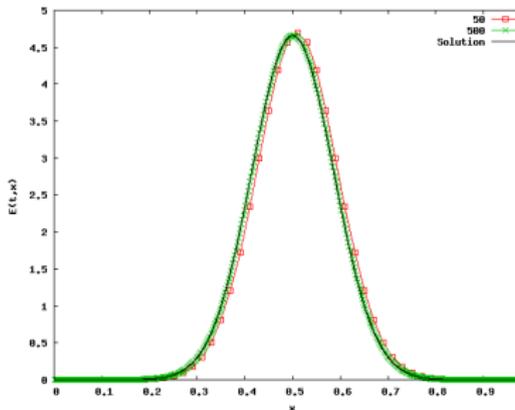
### Schéma Godunov



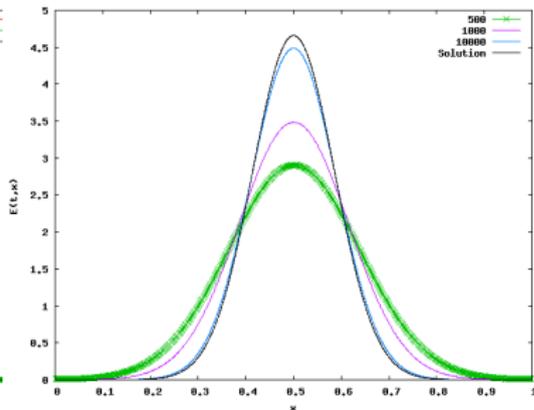
| Schéma                 | Erreur $L^1$ | temps      |
|------------------------|--------------|------------|
| Godunov, 10000 mailles | 0.0366       | 1485m4.26s |
| Godunov, 500 mailles   | 0.445        | 0m24.317s  |
| AP, 500 mailles        | 0.0001       | 0m15.22s   |
| AP, 50 mailles         | 0.0065       | 0m0.054s   |

- **Test de validation des schémas AP** : les données sont  $E(0, x) = G(x)$  avec  $G(x)$  une Gaussienne,  $F(0, x) = 0$  et  $\sigma = 1$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

### Schéma AP



### Schéma Godunov



| Schéma                 | Erreur $L^1$ | temps      |
|------------------------|--------------|------------|
| Godunov, 10000 mailles | 0.0366       | 1485m4.26s |
| Godunov, 500 mailles   | 0.445        | 0m24.317s  |
| AP, 500 mailles        | 0.0001       | 0m15.22s   |
| AP, 50 mailles         | 0.0065       | 0m0.054s   |

- Le schéma AP est bien plus précis que le schéma de Godunov.

- Équation de chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left( \frac{1}{\sigma} \right) \partial_x E = 0. \quad (1)$$

- Consistance du schéma de **Godunov** pour le modèle (1)

- première équation :  $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$ ,
- seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .

- Condition CFL :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .

- Équation de chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left( \frac{1}{\sigma} \right) \partial_x E = 0. \quad (1)$$

- Consistance du schéma de **Godunov** pour le modèle (1)

- première équation :  $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$ ,
- seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .

- Condition CFL :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .

## Schéma de Jin-Levermore

- **Principe** : introduction de l'état stationnaire  $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

- Équation de chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left( \frac{1}{\sigma} \right) \partial_x E = 0. \quad (1)$$

- Consistance du schéma de **Godunov** pour le modèle (1)

- première équation :  $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$ ,
- seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .

- Condition CFL :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .

## Schéma de Jin-Levermore

- **Principe** : introduction de l'état stationnaire  $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

- Équation de chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left( \frac{1}{\sigma} \right) \partial_x E = 0. \quad (1)$$

- Consistance du schéma de **Godunov** pour le modèle (1)

- première équation :  $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$ ,
- seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .

- Condition CFL :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .

## Schéma de Jin-Levermore

- **Principe** : introduction de l'état stationnaire  $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

On couple ces relations avec les flux

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Équation de chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left( \frac{1}{\sigma} \right) \partial_x E = 0. \quad (1)$$

- Consistance du schéma de **Godunov** pour le modèle (1)

- première équation :  $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$ ,
- seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .

- Condition CFL :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .

## Schéma de Jin-Levermore

- **Principe** : introduction de l'état stationnaire  $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- Équation de chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left( \frac{1}{\sigma} \right) \partial_x E = 0. \quad (1)$$

- Consistance du schéma de **Godunov** pour le modèle (1)

- première équation :  $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$ ,
- seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .

- Condition CFL :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .

## Schéma de Jin-Levermore

- Principe : introduction de l'état stationnaire  $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux.

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

- Le schéma de Jin-Levermore est

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{cases} \quad (2)$$

avec  $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$ .

- Erreur de consistance du schéma de **Jin-Levermore** :
  - première équation :  $O(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t)$ ,
  - seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .
- Condition CFL du schéma explicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .
- Condition CFL du schéma semi-implicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$ .

- Erreur de consistance du schéma de **Jin-Levermore** :
    - première équation :  $O(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t)$ ,
    - seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .
  - Condition CFL du schéma explicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .
  - Condition CFL du schéma semi-implicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$ .
- Schéma de Gosse-Toscani**
- **Principe** : Le schéma de Jin-levermore (2) avec la discrétisation du terme source  $\frac{1}{2}(F_{j+\frac{1}{2}} + F_{j-\frac{1}{2}})$  est égal au schéma de Gosse-Toscani.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

avec  $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$ .

- Erreur de consistance du schéma de **Jin-Levermore** :
  - première équation :  $O(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t)$ ,
  - seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$ .
- Condition CFL du schéma explicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$ .
- Condition CFL du schéma semi-implicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$ .

## Schéma de Gosse-Toscani

- **Principe** : Le schéma de Jin-levermore (2) avec la discrétisation du terme source  $\frac{1}{2}(F_{j+\frac{1}{2}} + F_{j-\frac{1}{2}})$  est égal au schéma de Gosse-Toscani.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

avec  $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$ .

- Erreur de consistance du schéma de **Gosse-Toscani** :  $O(\Delta x + \Delta t)$ .
- Condition CFL du schéma explicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$ .
- Condition CFL du schéma semi-implicite :  $\Delta t \left( \frac{1}{\Delta x \varepsilon + \sigma^{-1} \Delta x^2} \right) \leq 1$ .

- On suppose que  $\|\partial_{t^a, x^b} E\| \leq C_{a,b}$  et  $\|\partial_{t^a, x^b} F\| \leq \varepsilon C_{a,b}$ .
- L'équation modifiée associée au schéma de **Godunov** est

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (4)$$

- On suppose que  $\|\partial_{t^a, x^b} E\| \leq C_{a,b}$  et  $\|\partial_{t^a, x^b} F\| \leq \varepsilon C_{a,b}$ .
- L'équation modifiée associée au schéma de **Godunov** est

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (4)$$

- on incorpore  $\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -\sigma F$  dans la 1ère équation de (4) pour obtenir la limite de diffusion

$$\partial_t E - \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0.$$

- On suppose que  $\|\partial_{t^a, x^b} E\| \leq C_{a,b}$  et  $\|\partial_{t^a, x^b} F\| \leq \varepsilon C_{a,b}$ .
- L'équation modifiée associée au schéma de **Godunov** est

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (4)$$

- on incorpore  $\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -\sigma F$  dans la 1ère équation de (4) pour obtenir la limite de diffusion
- Sur grille fine  $\frac{\Delta x}{\varepsilon} \ll 1$ , la limite est

$$\partial_t E - \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} E = 0.$$

- On suppose que  $\|\partial_{t^a, x^b} E\| \leq C_{a,b}$  et  $\|\partial_{t^a, x^b} F\| \leq \varepsilon C_{a,b}$ .
- L'équation modifiée associée au schéma de **Godunov** est

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (4)$$

- on incorpore  $\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -\sigma F$  dans la 1ère équation de (4) pour obtenir la limite de diffusion
- Sur grille grossière  $\frac{\Delta x}{\varepsilon} \gg 1$ , la limite est

$$\partial_t E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0.$$

- On suppose que  $\|\partial_{t^a, x^b} E\| \leq C_{a,b}$  et  $\|\partial_{t^a, x^b} F\| \leq \varepsilon C_{a,b}$ .
- L'équation modifiée associée au schéma de **Godunov** est

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (4)$$

- on incorpore  $\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -\sigma F$  dans la 1ère équation de (4) pour obtenir la limite de diffusion

$$\partial_t E - \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0.$$

- **Le schéma ne capture pas la limite de diffusion.**
- L'équation modifiée associée au schéma de **Gosse-Toscani** est

$$\begin{cases} \partial_t E + M \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - M \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + M \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - M \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (5)$$

- On suppose que  $\|\partial_{t^a, x^b} E\| \leq C_{a,b}$  et  $\|\partial_{t^a, x^b} F\| \leq \varepsilon C_{a,b}$ .
- L'équation modifiée associée au schéma de **Godunov** est

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (4)$$

- on incorpore  $\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -\sigma F$  dans la 1ère équation de (4) pour obtenir la limite de diffusion

$$\partial_t E - \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0.$$

- **Le schéma ne capture pas la limite de diffusion.**
- L'équation modifiée associée au schéma de **Gosse-Toscani** est

$$\begin{cases} \partial_t E + M \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - M \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + M \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - M \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (5)$$

- on incorpore  $M\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -M\sigma F$  dans la 2ème équation de (5)

$$\partial_t E - \frac{M}{\sigma} \partial_{xx} E - \frac{1-M}{\sigma} \partial_{xx} E = 0$$

- On suppose que  $\|\partial_{t^a, x^b} E\| \leq C_{a,b}$  et  $\|\partial_{t^a, x^b} F\| \leq \varepsilon C_{a,b}$ .
- L'équation modifiée associée au schéma de **Godunov** est

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (4)$$

- on incorpore  $\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -\sigma F$  dans la 1ère équation de (4) pour obtenir la limite de diffusion

$$\partial_t E - \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} E - \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0.$$

- Le schéma ne capture pas la limite de diffusion.
- L'équation modifiée associée au schéma de **Gosse-Toscani** est

$$\begin{cases} \partial_t E + M \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F - M \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} E = 0, \\ \partial_t F + M \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E - M \frac{\Delta x}{2\varepsilon} \partial_{xx} F = -M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad (5)$$

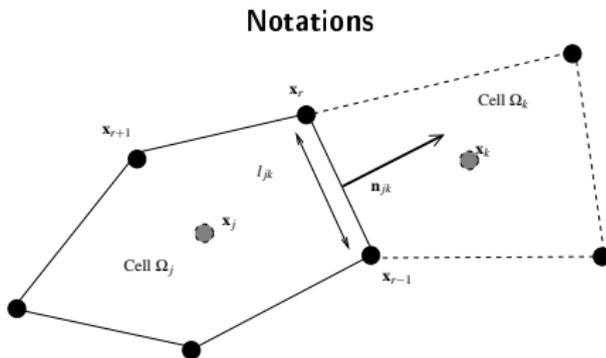
- on incorpore  $M\varepsilon \partial_x E + O(\varepsilon^2) = -M\sigma F$  dans la 2ème équation de (5)

$$\partial_t E - \frac{M}{\sigma} \partial_{xx} E - \frac{1-M}{\sigma} \partial_{xx} E = 0$$

- Le schéma capture la limite de diffusion  $\forall \varepsilon$  (idem pour Jin-Levermore).

- Extension du schéma de Jin-Levermore en 2D
- Notations pour la formulation de volumes finis aux arêtes.

- Extension du schéma de Jin-Levermore en 2D
- Notations pour la formulation de volumes finis aux arêtes.



- $l_{jk}$  et  $\mathbf{n}_{jk}$  sont la longueur et la normale associées à l'arête  $\partial\Omega_{jk}$ .
- $\sum_k l_{jk} \mathbf{n}_{jk} = \mathbf{0}$ .
- $(\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk})$  et  $E_{jk}$  sont les flux associés à l'arête  $\partial\Omega_{jk}$ .

- **Méthode de Jin-Levermore** : modifier les flux upwind en introduisant les états stationnaires. L'approximation du 1er ordre de Taylor donne

$$\begin{cases} E(\mathbf{x}_j) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}, \nabla E(\mathbf{x}_{jk})), \\ E(\mathbf{x}_k) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}, \nabla E(\mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

- **Méthode de Jin-Levermore** : modifier les flux upwind en introduisant les états stationnaires. L'approximation du 1er ordre de Taylor donne

$$\begin{cases} E(\mathbf{x}_j) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) - \frac{\sigma}{\varepsilon}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}, \mathbf{F}(\mathbf{x}_{jk})), \\ E(\mathbf{x}_k) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) - \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}, \mathbf{F}(\mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

- **Méthode de Jin-Levermore** : modifier les flux upwind en introduisant les états stationnaires. L'approximation du 1er ordre de Taylor

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

- **Méthode de Jin-Levermore** : modifier les flux upwind en introduisant les états stationnaires. L'approximation du 1er ordre de Taylor

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

En incorporant ces relations dans les flux :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j, \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk}, \\ (\mathbf{F}_k, \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk}. \end{cases}$$

- **Méthode de Jin-Levermore** : modifier les flux upwind en introduisant les états stationnaires. L'approximation du 1er ordre de Taylor

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

En incorporant ces relations dans les flux on obtient :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j, \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk})), \\ (\mathbf{F}_k, \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk} + \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

- **Méthode de Jin-Levermore** : modifier les flux upwind en introduisant les états stationnaires. L'approximation du 1er ordre de Taylor

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

En incorporant ces relations dans les flux on obtient :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j, \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk} - \frac{\sigma}{|\mathbf{n}_{jk}| \varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk})), \\ (\mathbf{F}_k, \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk} + \frac{\sigma}{|\mathbf{n}_{jk}| \varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

- Hypothèse géométrique pour obtenir les flux.
- **Hypothèse** : Le maillage satisfait l'hypothèse de Delaunay, donc :

$$(\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_j) = d_{jk} \mathbf{n}_{jk} \text{ et } (\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_k) = -d_{kj} \mathbf{n}_{jk}.$$

- **Méthode de Jin-Levermore** : modifier les flux upwind en introduisant les états stationnaires. L'approximation du 1er ordre de Taylor

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

En incorporant ces relations dans les flux on obtient :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j, \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk})), \\ (\mathbf{F}_k, \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk}, \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk} + \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk}, (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

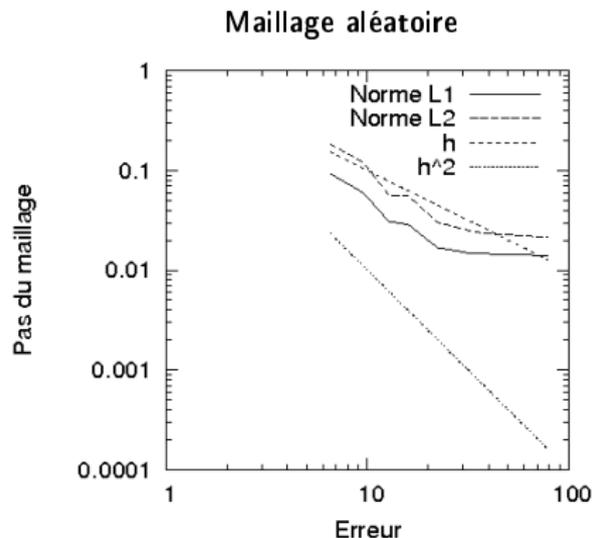
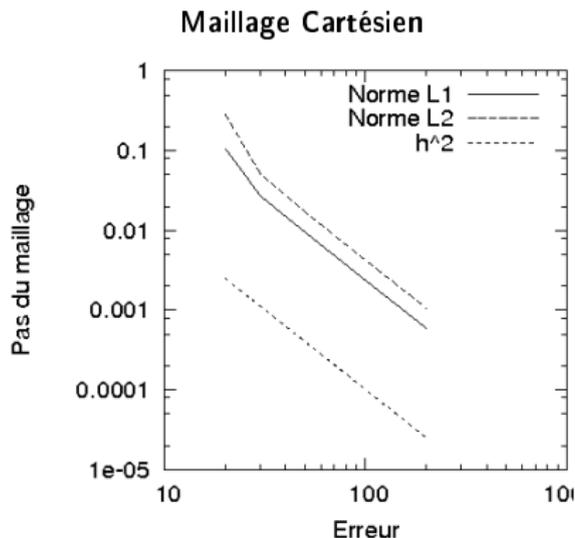
- Hypothèse géométrique pour obtenir les flux.
- **Hypothèse** : Le maillage satisfait l'hypothèse de Delaunay, donc :

$$(\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_j) = d_{jk} \mathbf{n}_{jk} \text{ et } (\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_k) = -d_{kj} \mathbf{n}_{jk}.$$

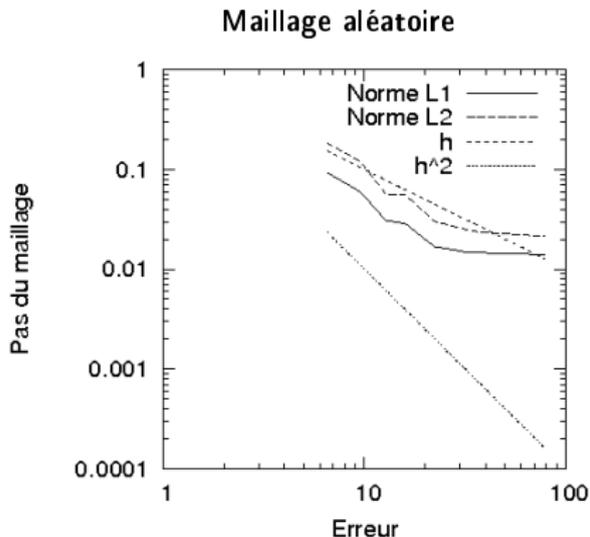
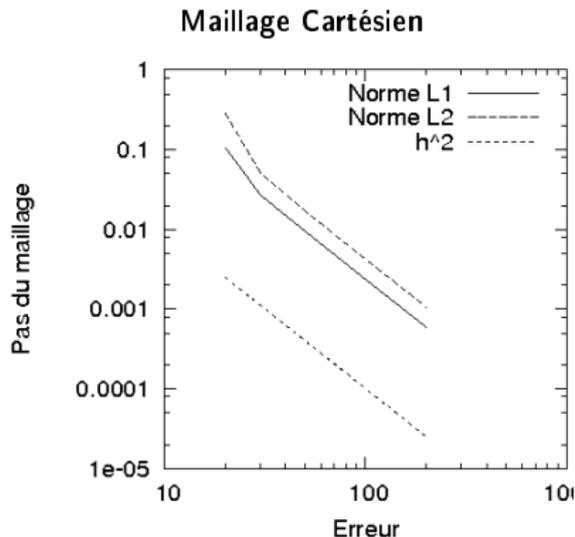
Limite asymptotique du schéma Jin-Levermore : schéma trèfle

$$|\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \frac{1}{\sigma} \sum_k l_{jk} \frac{E_k - E_j}{d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)} = 0.$$

- Le schéma trèfle ne converge pas sur maillages vraiment déformés  
Cas test :  $E(t, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  avec  $G$  une Gaussienne, temps final  $t_f=0.010$ .
- Résultats de convergence sur maillages Cartésien et aléatoire.



- Le schéma trèfle ne converge pas sur maillages vraiment déformés  
Cas test :  $E(t, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  avec  $G$  une Gaussienne, temps final  $t_f=0.010$ .
- Résultats de convergence sur maillages Cartésien et aléatoire.



- Le schéma de Jin-Levermore 2D n'est pas convergent en régime de diffusion.
- À notre connaissance il n'existe pas de schéma AP convergent sur maillages non structurés.



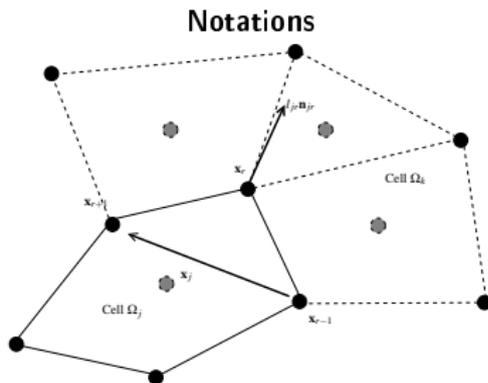
Idée :

Utiliser une formulation **aux noeuds** des méthodes de volumes finis introduite en hydrodynamique Lagrangienne, discrétiser l'équation des ondes et coupler avec la méthode de Jin-Levermore.

## Idée :

Utiliser une formulation **aux noeuds** des méthodes de volumes finis introduite en hydrodynamique Lagrangienne, discrétiser l'équation des ondes et coupler avec la méthode de Jin-Levermore.

- Notations associées aux volumes finis aux noeuds



- $l_{jr} \mathbf{n}_{jr} = \begin{pmatrix} -y_{r-1} + y_{r+1} \\ x_{r-1} - x_{r+1} \end{pmatrix}$ .
- $\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}$ .
- $\mathbf{F}_r$  et  $\mathbf{E} \mathbf{n}_{jr}$  sont les flux associés aux noeuds  $\mathbf{X}_r$ .
- $V_r$  volume de contrôle autour du noeud  $\mathbf{X}_r$ .

## Schémas AP aux noeuds

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{S}_j. \end{array} \right.$$

- Solveur nodal classique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

with  $\hat{\alpha}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$ .

## Schémas AP aux noeuds

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{S}_j. \end{cases}$$

- Solveur nodal classique :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

with  $\hat{\alpha}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$ .

- Solveur nodal modifié en incorporant  $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{cases}$$

## Schémas AP aux noeuds

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{S}_j. \end{cases}$$

- Solveur nodal classique :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

with  $\hat{\alpha}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$ .

- Solveur nodal modifié en incorporant  $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j, \end{cases}$$

avec  $\hat{\beta}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$ .

## Schémas AP aux noeuds

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr}(\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{S}_j. \end{cases}$$

- Solveur nodal classique :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

with  $\hat{\alpha}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$ .

- Solveur nodal modifié en incorporant  $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$  dans les flux :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j, \end{cases}$$

avec  $\hat{\beta}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$ .

- Terme source : (1)  $\mathbf{S}_j = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} |\Omega_j| \mathbf{F}_j$ , (2)  $\mathbf{S}_j = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r$

- En 1D, le schéma avec le terme source (1) est égal au schéma Jin-Levermore,
- le schéma avec le terme source (2) est égal au schéma Gosse-Toscani.

- En 1D, le schéma avec le terme source (1) est égal au schéma Jin-Levermore,
- le schéma avec le terme source (2) est égal au schéma Gosse-Toscani.
- Reformulation du schéma avec le terme source (2) et implicitation du terme source :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (M_r \mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j^{n+1}. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

$$M_r = \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right).$$

- En 1D, le schéma avec le terme source (1) est égal au schéma Jin-Levermore,
- le schéma avec le terme source (2) est égal au schéma Gosse-Toscani.
- Reformulation du schéma avec le terme source (2) et implicitation du terme source :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (M_r \mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j^{n+1}. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

$$M_r = \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right).$$

- La matrice  $M_r$  généralise le coefficient  $M$  introduit en 1D.

- En 1D, le schéma avec le terme source (1) est égal au schéma Jin-Levermore,
- le schéma avec le terme source (2) est égal au schéma Gosse-Toscani.
- Reformulation du schéma avec le terme source (2) et implicitation du terme source :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (M_r \mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j^{n+1}. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

$$M_r = \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left( \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right).$$

- La matrice  $M_r$  généralise le coefficient  $M$  introduit en 1D.
- Le schéma semi-implicite est stable sous condition CFL indépendante de  $\varepsilon$  (numériquement).
- Le schéma implicite est inconditionnellement stable.

## Schéma limite de diffusion :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}, \quad A_r = - \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{array} \right.$$

- $A_r$  inversible sous condition de maillages. Condition suffisante pour des maillages triangulaires : **tous les angles  $> 12^\circ$** .
- On définit les erreurs numériques :

## Schéma limite de diffusion :

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r l_{jr}(\mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}, \quad A_r = - \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{cases}$$

- $A_r$  inversible sous condition de maillages. Condition suffisante pour des maillages triangulaires : **tous les angles  $> 12^\circ$** .
- On définit les erreurs numériques :

$$\| e(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_j |\Omega_j| (E_j(t) - E(\mathbf{x}_j, t))^2.$$

$$\| \mathbf{f}(t) \|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 = \int_0^t \sum_r |V_r| (\mathbf{F}_r(t) - \nabla E(\mathbf{x}_r, t))^2.$$

## Théorème

Si  $E(t) \in W^{3,\infty}$  et la matrice  $A_r^S$  satisfait  $A_r^S \geq \alpha V_r$  avec  $\alpha$  une constante alors le schéma semi-discret de diffusion est convergent  $\forall T > 0$  avec l'estimation :

$$\| e(t) \|_{L^2(\Omega)} + \| \mathbf{f}(t) \|_{L^2([0,t] \times \Omega)} \leq C(T)h.$$

- On définit les erreurs de consistance

$$\begin{cases} a_j(t) = \partial_t E(t, \mathbf{x}_j) - \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_r l_{jr} (\nabla E(t, \mathbf{x}_r), \mathbf{n}_{jr}), \\ \mathbf{b}_r(t) = \frac{1}{V_r} \left( A_r \nabla E(t, \mathbf{x}_r) - \sum_j l_{jr} E(t, \mathbf{x}_j) \mathbf{n}_{jr} \right). \end{cases} \quad (6)$$

- On définit les erreurs de consistance

$$\begin{cases} a_j(t) = \partial_t E(t, \mathbf{x}_j) - \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_r l_{jr} (\nabla E(t, \mathbf{x}_r), \mathbf{n}_{jr}), \\ \mathbf{b}_r(t) = \frac{1}{V_r} (A_r \nabla E(t, \mathbf{x}_r) - \sum_j l_{jr} E(t, \mathbf{x}_j) \mathbf{n}_{jr}). \end{cases} \quad (6)$$

## Résultat intermédiaire

Il existe une constante  $C > 0$  telle que les estimations suivantes soit vérifiées

$$|a_j| \leq Ch \quad \text{pour tout } j, \text{ et } \|\mathbf{b}_r\| \leq Ch, \quad \text{pour tout } r. \quad (7)$$

- On définit les erreurs de consistance

$$\begin{cases} a_j(t) = \partial_t E(t, \mathbf{x}_j) - \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_r l_{jr} (\nabla E(t, \mathbf{x}_r), \mathbf{n}_{jr}), \\ \mathbf{b}_r(t) = \frac{1}{V_r} \left( A_r \nabla E(t, \mathbf{x}_r) - \sum_j l_{jr} E(t, \mathbf{x}_j) \mathbf{n}_{jr} \right). \end{cases} \quad (6)$$

## Résultat intermédiaire

Il existe une constante  $C > 0$  telle que les estimations suivantes soit vérifiées

$$|a_j| \leq Ch \quad \text{pour tout } j, \text{ et } \|\mathbf{b}_r\| \leq Ch, \quad \text{pour tout } r. \quad (7)$$

- Pour estimer  $a_j(t)$  : décomposition de  $\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr}$  en fonction des normales et longueurs aux arêtes et formule de trapèze.
- Pour estimer  $\mathbf{b}_r(t)$  : développement de Taylor (possible pour notre choix de  $A_r$ ).

- On définit les erreurs de consistance

$$\begin{cases} a_j(t) = \partial_t E(t, \mathbf{x}_j) - \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_r l_{jr} (\nabla E(t, \mathbf{x}_r), \mathbf{n}_{jr}), \\ \mathbf{b}_r(t) = \frac{1}{V_r} \left( A_r \nabla E(t, \mathbf{x}_r) - \sum_j l_{jr} E(t, \mathbf{x}_j) \mathbf{n}_{jr} \right). \end{cases} \quad (6)$$

## Résultat intermédiaire

Il existe une constante  $C > 0$  telle que les estimations suivantes soit vérifiées

$$|a_j| \leq Ch \quad \text{pour tout } j, \text{ et } \|\mathbf{b}_r\| \leq Ch, \quad \text{pour tout } r. \quad (7)$$

- Pour estimer  $a_j(t)$  : décomposition de  ${}_j r \mathbf{n}_{jr}$  en fonction des normales et longueurs aux arêtes et formule de trapèze.
  - Pour estimer  $\mathbf{b}_r(t)$  : développement de Taylor (possible pour notre choix de  $A_r$ ).
- En utilisant l'équation satisfaite par  $e_j(t)$  et  $\mathbf{f}_r(t)$  ainsi qu'une inégalité de Young on obtient

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|a(t)\|^2 + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{b}(t)\|^2 \quad (8)$$

- On conclut à l'aide du Lemme de Grönwall.

- On définit les erreurs de consistance

$$\begin{cases} a_j(t) = \partial_t E(t, \mathbf{x}_j) - \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_r l_{jr} (\nabla E(t, \mathbf{x}_r), \mathbf{n}_{jr}), \\ \mathbf{b}_r(t) = \frac{1}{V_r} \left( A_r \nabla E(t, \mathbf{x}_r) - \sum_j l_{jr} E(t, \mathbf{x}_j) \mathbf{n}_{jr} \right). \end{cases} \quad (6)$$

## Résultat intermédiaire

Il existe une constante  $C > 0$  telle que les estimations suivantes soit vérifiées

$$|a_j| \leq Ch \quad \text{pour tout } j, \quad \text{et } \|\mathbf{b}_r\| \leq Ch, \quad \text{pour tout } r. \quad (7)$$

- Pour estimer  $a_j(t)$  : décomposition de  $\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr}$  en fonction des normales et longueurs aux arêtes et formule de trapèze.
- Pour estimer  $\mathbf{b}_r(t)$  : développement de Taylor (possible pour notre choix de  $A_r$ ).
- En utilisant l'équation satisfaite par  $e_j(t)$  et  $\mathbf{f}_r(t)$  ainsi qu'une inégalité de Young on obtient

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + Ch^2, \quad (8)$$

- On conclut à l'aide du Lemme de Grönwall.
- L'hypothèse  $\|A_r\| > \alpha V_r$  se ramène à une hypothèse sur le maillage.



- Systèmes de Friedrichs avec termes sources

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

- $A, B, R$  matrices symétriques et  $R$  symétrique positive.

■ Systèmes de Friedrichs avec termes sources

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

■  $A, B, R$  matrices symétriques et  $R$  symétrique positive.

## Théorème

On note  $\mathbf{E}_i$  les vecteurs propres de  $R$  avec  $\text{Ker } R = \text{vect}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_p)$ . On suppose qu'il existe deux vecteurs particuliers indépendants associés aux valeurs propres  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}$  de  $R$  satisfaisant

$$\begin{cases} A\mathbf{E}_i = \gamma_i \mathbf{E}_{p+1}, \quad \forall i \in \{1..p\}, \\ B\mathbf{E}_i = \delta_i \mathbf{E}_{p+2}, \quad \forall i \in \{1..p\}, \end{cases} \quad (H_1)$$

alors  $((\mathbf{U}, \mathbf{E}_1), \dots, (\mathbf{U}, \mathbf{E}_p))$  tend vers  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^p$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro avec

$$\partial_t \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_{p+1}\sigma} K_1 \partial_{xx} \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_{p+2}\sigma} K_2 \partial_{yy} \mathbf{V} = \mathbf{0},$$

et  $K_1, K_2$  des matrices symétriques définies positives.

- **Modèles  $S_n$**  : (méthode des ordonnées discrètes) obtenus par approximation de l'opérateur intégrale à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés du modèles  $S_n$**  :  $A, B$  matrices diagonales,  $\dim \text{Ker } R = 1$  et  $R$  symétrique positive

- **Modèles  $S_n$**  : (méthode des ordonnées discrètes) obtenus par approximation de l'opérateur intégrale à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés du modèles  $S_n$**  :  $A, B$  matrices diagonales,  $\dim \text{Ker } R = 1$  et  $R$  symétrique positive
- **Modèles  $P_n$**  : obtenus par projection de l'équation de transport sur les harmoniques sphériques.
- **Propriétés du modèles  $P_n$**  : système symétrisable,  $R$  matrice diagonale définie par  $R_{11} = 0$  et  $R_{ii} = 1$  ( $i \neq 0$ ).

- **Modèles  $S_n$**  : (méthode des ordonnées discrètes) obtenus par approximation de l'opérateur intégrale à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés du modèles  $S_n$**  :  $A, B$  matrices diagonales,  $\dim \text{Ker } R = 1$  et  $R$  symétrique positive
- **Modèles  $P_n$**  : obtenus par projection de l'équation de transport sur les harmoniques sphériques.
- **Propriétés du modèles  $P_n$**  : système symétrisable,  $R$  matrice diagonale définie par  $R_{11} = 0$  et  $R_{ii} = 1$  ( $i \neq 0$ ).

## Proposition

Les modèles  $P_n$  et  $S_n$  satisfont l'hypothèse de structure  $(H_1)$ .

## Proposition

Lorsqu'on écrit les modèles  $P_n$  ou  $S_n$  dans la base des vecteurs propres de  $R$ , on obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V} \quad (9)$$

avec  $D$  diagonale, définie par  $D_{11} = 0$  et  $D_{ii} = 1$  ( $i \neq 0$ ). Si l'hypothèse ( $H_1$ ) est satisfaite

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec  $A''_{0,j} = 0$ ,  $A''_{i,0} = 0$ ,  $B''_{0,j} = 0$ ,  $B''_{i,0} = 0$ .

- Les matrices  $P_{1,x}$ ,  $P_{1,y}$  sont les matrices associées au modèle  $P_1$ .

## Proposition

Lorsqu'on écrit les modèles  $P_n$  ou  $S_n$  dans la base des vecteurs propres de  $R$ , on obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V} \quad (9)$$

avec  $D$  diagonale, définie par  $D_{11} = 0$  et  $D_{ii} = 1$  ( $i \neq 0$ ). Si l'hypothèse ( $H_1$ ) est satisfaite

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec  $A''_{0,j} = 0$ ,  $A''_{i,0} = 0$ ,  $B''_{0,j} = 0$ ,  $B''_{i,0} = 0$ .

- Les matrices  $P_{1,x}$ ,  $P_{1,y}$  sont les matrices associées au modèle  $P_1$ .
- **Conclusion** : Les modèles  $P_n$  et  $S_n$  peuvent être décomposés entre le modèle  $P_1$  et un système qui n'intervient pas en régime de diffusion.
- **Méthode numérique (micro-macro décomposition ?)** : Diagonalisation du système, décomposition du système, discrétisation du modèle  $P_1$  avec un schéma AP et l'autre système avec un schéma classique.

- On considère le système :  $\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}$ .

■ On considère le système :  $\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}$ .

■ **Étape 1** : On écrit le système dans la base de  $R$  pour obtenir

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_1 \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_2 \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V}, \quad (10)$$

avec  $\mathbf{V} = Q^t \mathbf{U}$ ,  $A'_1 = Q^t A_1 Q$  et  $A'_2 = Q^t A_2 Q$ .

■ On considère le système :  $\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}$ .

■ **Étape 1** : On écrit le système dans la base de  $R$  pour obtenir

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_1 \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_2 \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V}, \quad (10)$$

avec  $\mathbf{V} = Q^t \mathbf{U}$ ,  $A'_1 = Q^t A_1 Q$  et  $A'_2 = Q^t A_2 Q$ .

■ **Étape 2** : On décompose le système diagonalisé (10). On obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{V} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{V}) + \frac{1}{\varepsilon} (A''_1 \partial_x \mathbf{V} + A''_2 \partial_y \mathbf{V}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}. \quad (11)$$

■ On considère le système :  $\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}$ .

■ **Étape 1** : On écrit le système dans la base de  $R$  pour obtenir

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_1 \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_2 \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V}, \quad (10)$$

avec  $\mathbf{V} = Q^t \mathbf{U}$ ,  $A'_1 = Q^t A_1 Q$  et  $A'_2 = Q^t A_2 Q$ .

■ **Étape 2** : On décompose le système diagonalisé (10). On obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{V} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{V}) + \frac{1}{\varepsilon} (A''_1 \partial_x \mathbf{V} + A''_2 \partial_y \mathbf{V}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}. \quad (11)$$

■ **Étape 3** : Le système (12) est discrétisé avec un schéma AP :

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{V} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{V}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D' \mathbf{V}, \quad (12)$$

avec  $D'$  définie par  $D'_{22} = D'_{33} = 1$  et  $D'_{ii \neq 22, ii \neq 33} = 0$ .

■ On considère le système :  $\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}$ .

■ **Étape 1** : On écrit le système dans la base de  $R$  pour obtenir

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_1 \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A'_2 \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V}, \quad (10)$$

avec  $\mathbf{V} = Q^t \mathbf{U}$ ,  $A'_1 = Q^t A_1 Q$  et  $A'_2 = Q^t A_2 Q$ .

■ **Étape 2** : On décompose le système diagonalisé (10). On obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{V} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{V}) + \frac{1}{\varepsilon} (A''_1 \partial_x \mathbf{V} + A''_2 \partial_y \mathbf{V}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}. \quad (11)$$

■ **Étape 3** : Le système (12) est discrétisé avec un schéma AP :

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{V} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{V}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D' \mathbf{V}, \quad (12)$$

avec  $D'$  définie par  $D'_{22} = D'_{33} = 1$  et  $D'_{ii \neq 22, ii \neq 33} = 0$ .

■ **Étape 4** : Le système (13) est discrétisé avec un schéma classique (upwind, Rusanov) :

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} (A''_1 \partial_x \mathbf{V} + A''_2 \partial_y \mathbf{V}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D'' \mathbf{V}, \quad (13)$$

avec  $D''$  définie par  $D''_{11} = D''_{22} = D''_{33} = 0$  et  $D''_{ii} = 1 \ i \geq 4$ .



- Le modèle à deux moments non linéaire  $M_1$  est :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\epsilon} \nabla(\hat{P}) = -\frac{\sigma}{\epsilon^2} \mathbf{F}, \end{cases} \quad (14)$$

avec  $E$  l'énergie,  $\mathbf{F}$  le flux et

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \left( (1 - \chi(\mathbf{f})) \hat{I}_d + (3\chi(\mathbf{f}) - 1) \frac{\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|^2} \right) \quad E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

la pression. On définit  $\mathbf{f} = \frac{\|\mathbf{F}\|}{E}$  et  $\chi(\mathbf{f}) = \frac{3 + 4\mathbf{f}^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3\mathbf{f}^2}}$ .

- Le modèle à deux moments non linéaire  $M_1$  est :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\hat{P}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \end{cases} \quad (14)$$

avec  $E$  l'énergie,  $\mathbf{F}$  le flux et

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \left( (1 - \chi(\mathbf{f})) \hat{I}_d + (3\chi(\mathbf{f}) - 1) \frac{\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|^2} \right) \quad E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

la pression. On définit  $\mathbf{f} = \frac{\|\mathbf{F}\|}{E}$  et  $\chi(\mathbf{f}) = \frac{3 + 4\mathbf{f}^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3\mathbf{f}^2}}$ .

Le modèle  $M_1$  satisfait :

- la diffusion limite,  $\varepsilon \rightarrow 0$  :  $\partial_t E - \operatorname{div}(\frac{1}{3\sigma} \nabla E) = 0$ , **1er outil : schéma AP**
- la propriété d'entropie :  $\partial_t S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{Q}) \geq 0$ , **2ème outil : Reformulation**
- le principe du maximum :  $E > 0$ ,  $\|\mathbf{f}\| < 1$ , **comme un système de la dynamique des gaz**

avec  $TdS = dE - (\mathbf{U}, \mathbf{F})$  et

$$S = \frac{E^{3/4}(1 - \|\mathbf{u}\|^2)}{(3 + \|\mathbf{u}\|^2)^2}, \quad \mathbf{u} = \frac{(3\chi - 1)\mathbf{f}}{2\|\mathbf{f}\|^2}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{u}S$$

- pour utiliser un schéma aux noeuds Lagrange+projection nécessaire pour obtenir un schéma limite consistant,
- pour préserver le principe du maximum à l'aide de l'inégalité d'entropie.

- pour utiliser un schéma aux noeuds Lagrange+projection nécessaire pour obtenir un schéma limite consistant,
- pour préserver le principe du maximum à l'aide de l'inégalité d'entropie.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{F}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \\ \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(E\mathbf{u} + q\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u}S) \geq 0, \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho\mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rho\mathbf{v}, \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}e + q\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho s + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}s) \geq 0, \end{array} \right.$$

avec

$\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$  le flux,  $E = \rho e$  l'énergie et  $S = \rho s$  l'entropie.

- $q = \frac{1-\chi}{2} E$ ,  $\mathbf{u} = \frac{3\chi-1}{2} \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|^2}$  avec  $\mathbf{f} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{e}$

- Le modèle  $M_1$  est indépendant de la densité.

- $\mathbf{F} = \mathbf{u}E + q\mathbf{u}$        $\hat{P} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{F} + q\hat{I}_d$ .

- On utilise un schéma Lagrangien aux noeuds et un schéma d'advection aux noeuds

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) \mathbf{F}_{jr} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{G}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r k_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r, \\ |\Omega_j| \partial_t E_j + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) E_{jr} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r (\mathbf{u}_r, \mathbf{G}_{jr}) = 0. \end{array} \right.$$

Les flux Lagrangiens

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_{jr} = l_{jr} q_j \mathbf{n}_{jr} + r_{jr} \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} k_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r, \\ \left( \sum_j r_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} k_r \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{u}_r = \sum_j l_{jr} q_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j r_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{u}_j. \end{array} \right.$$

- On utilise un schéma Lagrangien aux noeuds et un schéma d'advection aux noeuds

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) \mathbf{F}_{jr} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{G}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r k_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r, \\ |\Omega_j| \partial_t E_j + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) E_{jr} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r (\mathbf{u}_r, \mathbf{G}_{jr}) = 0. \end{array} \right.$$

Les flux Lagrangiens

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_{jr} = l_{jr} q_j \mathbf{n}_{jr} + r_{jr} \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} k_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r, \\ \left( \sum_j r_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} k_r \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{u}_r = \sum_j l_{jr} q_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j r_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{u}_j. \end{array} \right.$$

- Les flux d'advection sont  $E_{jr} = 1_{((\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) > 0)} E_j + 1_{((\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) < 0)} \frac{\sum_j l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) E_j}{\sum_j l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr})}$  (idem pour  $\mathbf{F}_{jr}$ ).
- Les coefficients sont  $k_r = \frac{2E_r \|\mathbf{f}_r\|^2}{(3\chi - 1)}$  et  $r_{jr} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{E_j}{3 + \|\mathbf{u}_j\|^2}$ .

- La formulation comme un système de la dynamique des gaz donne **une équation non linéaire sur  $E$** .
- On obtient un schéma limite **positif, non linéaire, d'ordre un**.
- **Schéma positif d'ordre deux** : ajout d'une procédure MUSCL dans les flux d'advection.

- La formulation comme un système de la dynamique des gaz donne **une équation non linéaire sur  $E$** .
- On obtient un schéma limite **positif, non linéaire, d'ordre un**.
- **Schéma positif d'ordre deux** : ajout d'une procédure MUSCL dans les flux d'advection.

## Lemme

On suppose  $E_j(t=0), \mathbf{F}_j(t=0) \in \Omega = \{E > 0, \|\mathbf{f}\| < 1\}$  alors le schéma semi-discret est entropique :

$$\partial_t S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) S_{jr} \right) \geq 0 \quad (15)$$

et préserve le principe du maximum  $\forall t > 0$ .

- La formulation comme un système de la dynamique des gaz donne **une équation non linéaire sur  $E$** .
- On obtient un schéma limite **positif, non linéaire, d'ordre un**.
- **Schéma positif d'ordre deux** : ajout d'une procédure MUSCL dans les flux d'advection.

## Lemme

On suppose  $E_j(t=0), \mathbf{F}_j(t=0) \in \Omega = \{E > 0, \|\mathbf{f}\| < 1\}$  alors le schéma semi-discret est entropique :

$$\partial_t S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) S_{jr} \right) \geq 0 \quad (15)$$

et préserve le principe du maximum  $\forall t > 0$ .

- **Principe de preuve** :
  - On commence par montrer que le schéma est entropique si  $\widehat{\beta}_{jr}$  est positif.

- La formulation comme un système de la dynamique des gaz donne **une équation non linéaire sur  $E$** .
- On obtient un schéma limite **positif, non linéaire, d'ordre un**.
- **Schéma positif d'ordre deux** : ajout d'une procédure MUSCL dans les flux d'advection.

## Lemme

On suppose  $E_j(t=0), \mathbf{F}_j(t=0) \in \Omega = \{E > 0, \|\mathbf{f}\| < 1\}$  alors le schéma semi-discret est entropique :

$$\partial_t S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) S_{jr} \right) \geq 0 \quad (15)$$

et préserve le principe du maximum  $\forall t > 0$ .

- **Principe de preuve** :
  - On commence par montrer que le schéma est entropique si  $\widehat{\beta}_{jr}$  est positif.
  - En montrant que  $\mathbf{u}_r$  est bornée et  $S = \frac{E^{3/4}(1-\|\mathbf{u}\|^2)}{(3+\|\mathbf{u}\|^2)^2}$  est minoré sur  $[0, T[$ , on obtient que  $E$  et  $(1 - \|\mathbf{u}\|^2)$  sont positifs et bornés sur  $[0, T[$ .

- La formulation comme un système de la dynamique des gaz donne **une équation non linéaire sur  $E$** .
- On obtient un schéma limite **positif, non linéaire, d'ordre un**.
- **Schéma positif d'ordre deux** : ajout d'une procédure MUSCL dans les flux d'advection.

## Lemme

On suppose  $E_j(t=0), \mathbf{F}_j(t=0) \in \Omega = \{E > 0, \|\mathbf{f}\| < 1\}$  alors le schéma semi-discret est entropique :

$$\partial_t S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) S_{jr} \right) \geq 0 \quad (15)$$

et préserve le principe du maximum  $\forall t > 0$ .

### ■ Principe de preuve :

- On commence par montrer que le schéma est entropique si  $\widehat{\beta}_{jr}$  est positif.
- En montrant que  $\mathbf{u}_r$  est bornée et  $S = \frac{E^{3/4}(1-\|\mathbf{u}\|^2)}{(3+\|\mathbf{u}\|^2)^2}$  est minoré sur  $[0, T[$ , on obtient que  $E$  et  $(1 - \|\mathbf{u}\|^2)$  sont positifs et bornés sur  $[0, T[$ .
- En utilisant des résultats classiques des systèmes dynamiques on obtient le résultat  $\forall T > 0$ .

- La formulation comme un système de la dynamique des gaz donne **une équation non linéaire sur  $E$** .
- On obtient un schéma limite **positif, non linéaire, d'ordre un**.
- **Schéma positif d'ordre deux** : ajout d'une procédure MUSCL dans les flux d'advection.

## Lemme

On suppose  $E_j(t=0), \mathbf{F}_j(t=0) \in \Omega = \{E > 0, \|\mathbf{f}\| < 1\}$  alors le schéma semi-discret est entropique :

$$\partial_t S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) S_{jr} \right) \geq 0 \quad (15)$$

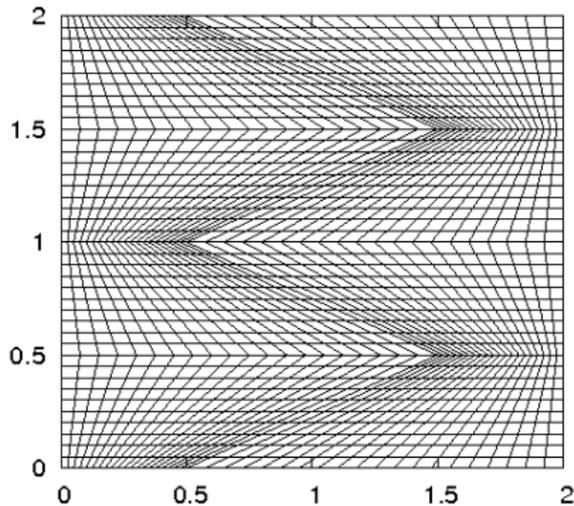
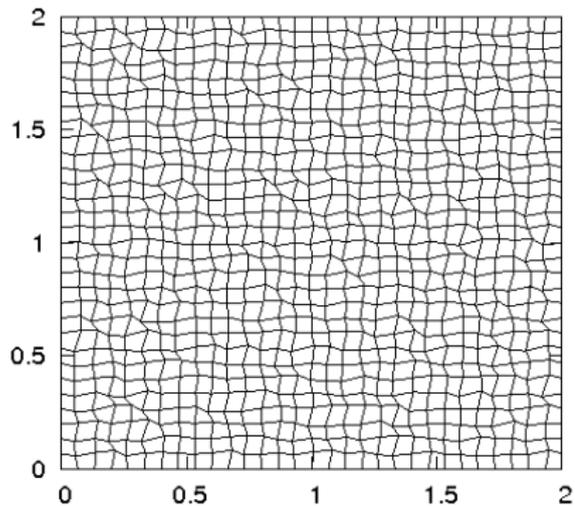
et préverse le principe du maximum  $\forall t > 0$ .

### ■ Principe de preuve :

- On commence par montrer que le schéma est entropique si  $\widehat{\beta}_{jr}$  est positif.
- En montrant que  $\mathbf{u}_r$  est bornée et  $S = \frac{E^{3/4}(1-\|\mathbf{u}\|^2)}{(3+\|\mathbf{u}\|^2)^2}$  est minoré sur  $[0, T[$ , on obtient que  $E$  et  $(1 - \|\mathbf{u}\|^2)$  sont positifs et bornés sur  $[0, T[$ .
- En utilisant des résultats classiques des systèmes dynamiques on obtient le résultat  $\forall T > 0$ .

■ **Remarque** : On a défini un tenseur  $\widehat{\beta}_{jr}$  positif sur les maillages testés.





- En régime de transport ( $\varepsilon = 1$  et  $\sigma = O(1)$ ), le schéma converge avec le premier ordre.

- En régime de transport ( $\varepsilon = 1$  et  $\sigma = O(1)$ ), le schéma converge avec le premier ordre.
- **Régime de diffusion** : les données sont  $E(0, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  avec  $G(\mathbf{x})$  une Gaussienne,  $F(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$  et  $\sigma = 1$ .

| Maillages/ $\varepsilon$    | $\varepsilon = 10^{-3}$ | $\varepsilon = 10^{-4}$ | $\varepsilon = 10^{-6}$ | $\varepsilon = 10^{-7}$ |
|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Cartésien 60-120 mailles    | 1.8                     | 2                       | 2.                      | 2.                      |
| Cartésien 80-160 mailles    | 1.75                    | 1.97                    | 2                       | 2                       |
| Cartésien 120-240 mailles   | 1.7                     | 1.95                    | 2                       | 2                       |
| Aléa. quad. 60-120 mailles  | 1.83                    | 2.                      | 2                       | 2                       |
| Aléa. quad. 80-160 mailles  | 1.96                    | 2.2                     | 2.2                     | 2.2                     |
| Aléa. quad. 120-240 mailles | 1.73                    | 1.92                    | 2                       | 2                       |
| Kershaw 60-120 mailles      | 2                       | 2.1                     | 2.1                     | 2.1                     |
| Kershaw 80-160 mailles      | 1.87                    | 1.97                    | 2                       | 2                       |
| Kershaw 120-240 mailles     | 1.83                    | 1.97                    | 2                       | 2                       |

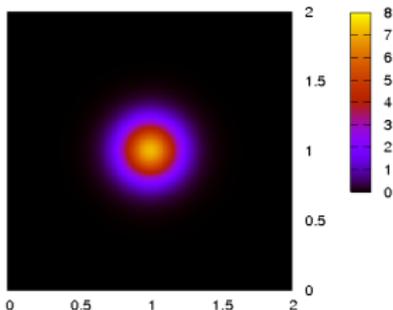
- En régime de transport ( $\varepsilon = 1$  et  $\sigma = O(1)$ ), le schéma converge avec le premier ordre.
- **Régime de diffusion** : les données sont  $E(0, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  avec  $G(\mathbf{x})$  une Gaussienne,  $F(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$  et  $\sigma = 1$ .

| Maillages/ $\varepsilon$    | $\varepsilon = 10^{-3}$ | $\varepsilon = 10^{-4}$ | $\varepsilon = 10^{-6}$ | $\varepsilon = 10^{-7}$ |
|-----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Cartésien 60-120 mailles    | 1.8                     | 2                       | 2.                      | 2.                      |
| Cartésien 80-160 mailles    | 1.75                    | 1.97                    | 2                       | 2                       |
| Cartésien 120-240 mailles   | 1.7                     | 1.95                    | 2                       | 2                       |
| Aléa. quad. 60-120 mailles  | 1.83                    | 2.                      | 2                       | 2                       |
| Aléa. quad. 80-160 mailles  | 1.96                    | 2.2                     | 2.2                     | 2.2                     |
| Aléa. quad. 120-240 mailles | 1.73                    | 1.92                    | 2                       | 2                       |
| Kershaw 60-120 mailles      | 2                       | 2.1                     | 2.1                     | 2.1                     |
| Kershaw 80-160 mailles      | 1.87                    | 1.97                    | 2                       | 2                       |
| Kershaw 120-240 mailles     | 1.83                    | 1.97                    | 2                       | 2                       |

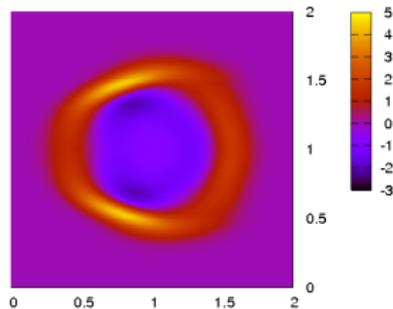
- Le schéma converge aussi sur maillages triangulaires avec un ordre entre 1 et 2.
- L'erreur entre la solution de diffusion et la solution du modèle  $P_1$  est homogène à  $O(\varepsilon)$ .
- Pour  $\frac{\Delta x}{\varepsilon} = O(1)$  l'ordre décroît. On compare la solution numérique du modèle  $P_1$  et la solution exacte de diffusion.

- On utilise le précédent cas test avec  $\varepsilon = 0.001$ . Les résultats des schémas hyperboliques sont calculés sur maillage de Kershaw.

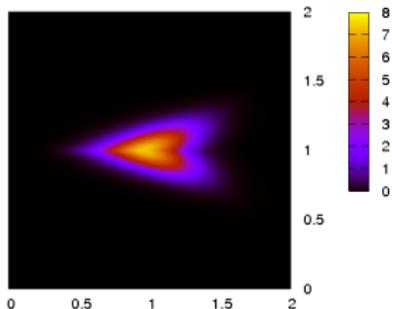
**Solution de diffusion**



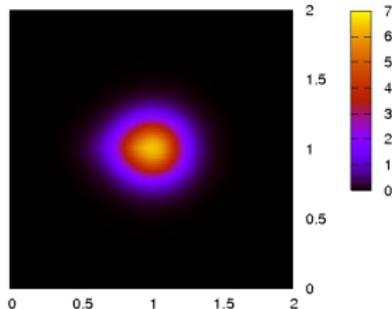
**Schéma non-AP**



**Schéma AP aux arêtes**



**Schéma aux noeuds**



■ Régime de diffusion : cas test précédent.

| Maillages/ $\varepsilon$ | $\varepsilon = 10^{-3}$ | $\varepsilon = 10^{-4}$ |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Cartésien                | 1.8                     | 1.95                    |
| Aléa. quad.              | 1.85                    | 2                       |
| Triang. reg.             | 1.9                     | 2                       |
| Aléa. triang.            | 1.35                    | 1.35                    |
| Kershaw                  | 1.85                    | 1.95                    |

TABLE: Ordre de convergence. Modèle  $P_3$

| Maillages/ $\varepsilon$ | $\varepsilon = 10^{-3}$ | $\varepsilon = 10^{-4}$ |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Cartésien                | 1.80                    | 1.95                    |
| Aléa. quad.              | 1.85                    | 2                       |
| Triang. reg.             | 1.9                     | 2                       |
| Aléa. triang.            | 1.35                    | 1.35                    |
| Kershaw                  | 1.85                    | 1.95                    |

TABLE: Ordre de convergence. Modèle  $S_2$

■ Régime de diffusion : cas test précédent.

| Maillages/ $\varepsilon$ | $\varepsilon = 10^{-3}$ | $\varepsilon = 10^{-4}$ |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Cartésien                | 1.8                     | 1.95                    |
| Aléa. quad.              | 1.85                    | 2                       |
| Triang. reg.             | 1.9                     | 2                       |
| Aléa. triang.            | 1.35                    | 1.35                    |
| Kershaw                  | 1.85                    | 1.95                    |

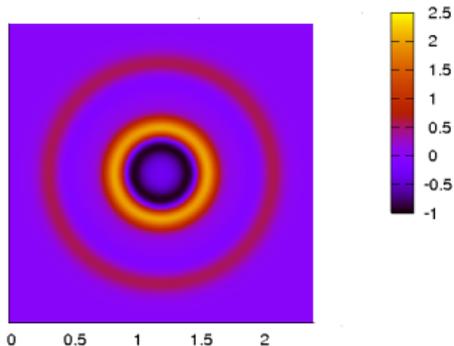
| Maillages/ $\varepsilon$ | $\varepsilon = 10^{-3}$ | $\varepsilon = 10^{-4}$ |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Cartésien                | 1.80                    | 1.95                    |
| Aléa. quad.              | 1.85                    | 2                       |
| Triang. reg.             | 1.9                     | 2                       |
| Aléa. triang.            | 1.35                    | 1.35                    |
| Kershaw                  | 1.85                    | 1.95                    |

TABLE: Ordre de convergence. Modèle  $P_3$

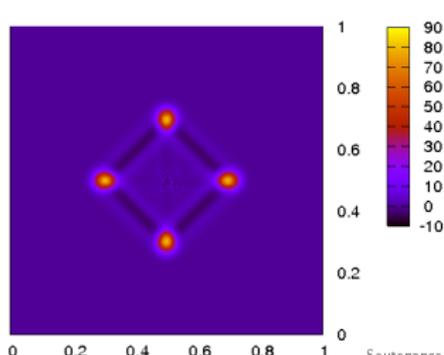
TABLE: Ordre de convergence. Modèle  $S_2$

■ Cas test de transport : solution fondamentale

Solution fondamentale du modèle  $P_3$



Solution fondamentale du modèle  $S_2$



- **Cas test de diffusion** : les données sont  $E(0, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  avec  $G(\mathbf{x})$  une Gaussienne et  $\sigma = 1$ . Le temps final est  $T_f = 0.011$ .

| Schémas    | NL    |           | Trèfle |           | Linéaire |           | $M_1$ |           |
|------------|-------|-----------|--------|-----------|----------|-----------|-------|-----------|
|            | ordre | $E_j > 0$ | ordre  | $E_j > 0$ | ordre    | $E_j > 0$ | ordre | $E_j > 0$ |
| Maillages  | ordre | $E_j > 0$ | ordre  | $E_j > 0$ | ordre    | $E_j > 0$ | ordre | $E_j > 0$ |
| Cartésien  | 1.92  | oui       | 2      | oui       | 2        | oui       | 1.98  | oui       |
| Aléa. quad | 1.9   | oui       | 0.31   | oui       | 1.98     | non       | 2.    | oui       |
| Régu. tri. | 2.23  | oui       | 2      | oui       | 2.       | oui       | 2.05  | oui       |
| Aléa. tri. | 2.16  | oui       | 0.96   | oui       | 1.32     | non       | 1.94  | oui       |
| Kershaw    | 1.93  | oui       | 0      | oui       | 2        | non       | 1.9   | oui       |

**TABLE:** Ordre de convergence. NL correspond au schéma limite du schéma  $M_1$ .  $M_1$  correspond au schéma aux noeuds pour  $M_1$  avec  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

- **Cas test de diffusion** : les données sont  $E(0, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  avec  $G(\mathbf{x})$  une Gaussienne et  $\sigma = 1$ . Le temps final est  $T_f = 0.011$ .

| Schémas    | NL    |           | Trèfle |           | Linéaire |           | $M_1$ |           |
|------------|-------|-----------|--------|-----------|----------|-----------|-------|-----------|
|            | ordre | $E_j > 0$ | ordre  | $E_j > 0$ | ordre    | $E_j > 0$ | ordre | $E_j > 0$ |
| Maillages  | ordre | $E_j > 0$ | ordre  | $E_j > 0$ | ordre    | $E_j > 0$ | ordre | $E_j > 0$ |
| Cartésien  | 1.92  | oui       | 2      | oui       | 2        | oui       | 1.98  | oui       |
| Aléa. quad | 1.9   | oui       | 0.31   | oui       | 1.98     | non       | 2.    | oui       |
| Régu. tri. | 2.23  | oui       | 2      | oui       | 2.       | oui       | 2.05  | oui       |
| Aléa. tri. | 2.16  | oui       | 0.96   | oui       | 1.32     | non       | 1.94  | oui       |
| Kershaw    | 1.93  | oui       | 0      | oui       | 2        | non       | 1.9   | oui       |

**TABLE:** Ordre de convergence. NL correspond au schéma limite du schéma  $M_1$ .  $M_1$  correspond au schéma aux noeuds pour  $M_1$  avec  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

- **Principe du maximum discret** : les données sont  $\sigma = 0$ ,  $E(0, \mathbf{x}) = F_x(0, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{[0.4:0.6]^2}$  et  $F_y(0, \mathbf{x}) = 0$ . La solution est  $E(t, \mathbf{x}) = F_x(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{[0.4+t:0.6+t]^2}$  et  $F_y(t, \mathbf{x}) = 0$ .

| Maillages  | ordre | $E_j > 0$ | $\  \mathbf{f}_j \  < 1$ |
|------------|-------|-----------|--------------------------|
| Cartésien  | 0.5   | oui       | oui                      |
| Aléa. quad | 0.5   | oui       | oui                      |
| Kershaw    | 0.49  | oui       | oui                      |

**TABLE:** Ordre approximatif de convergence.



## Principales contributions :

- Construction et analyse numérique (convergence, stabilité) de schémas AP pour le modèle  $P_1$ , valides sur maillages non structurés [1]-[2].
- Construction de discrétisations AP pour les modèles  $S_n$  et  $P_n$  [3].
- Construction d'un schéma AP, entropique et préservant le principe du maximum pour le modèle  $M_1$  basé sur un schéma Lagrange+projection [4].
- Validation à l'aide de cas test classiques sur maillages non structurés divers.

## Publications

- 1 C. Buet, B. Després, E. Franck *Design of asymptotic preserving schemes for hyperbolic heat equation on unstructured meshes*. Numerish Mathematik, En ligne.
- 2 E. Franck, P. Hoch, G. Samba, P. Navarro *An asymptotic preserving scheme for  $P_1$  model using classical diffusion schemes on unstructured polygonal meshes*. ESAIM : Proceedings.
- 3 C. Buet, B. Després, E. Franck *AP schemes for Friedrichs systems with stiff relaxation on unstructured meshes. Applications to the angular discretization in transport*. En rédaction.
- 4 C. Buet, B. Després, E. Franck *An asymptotic preserving scheme with the maximum principle for the  $M_1$  model on distorted meshes*. Note Cras 2012.

## Travaux en cours

- Construction de schémas AP positif pour les modèles  $S_n$  sur maillages non structurés en couplant une formulation pair-impair avec un schéma de diffusion non linéaire.
- La discrétisation sur grilles 1D non uniformes est finie. Reste l'extension 2D.
- Schémas AP, well-balanced et positifs pour les équations d'Euler et de Saint Venant avec friction et gravité en utilisant une approche Lagrange+projection.

## Travaux en cours

- Construction de schémas AP positif pour les modèles  $S_n$  sur maillages non structurés en couplant une formulation pair-impair avec un schéma de diffusion non linéaire.
- La discrétisation sur grilles 1D non uniformes est finie. Reste l'extension 2D.
- Schémas AP, well-balanced et positifs pour les équations d'Euler et de Saint Venant avec friction et gravité en utilisant une approche Lagrange+projection.

## Perspectives

- Preuve de convergence uniforme en  $\varepsilon$  du schéma aux noeuds pour le modèle  $P_1$  (avec C. Buet, B. Després).
- Extension des schémas AP aux noeuds sur maillages coniques (P. Hoch, G. Samba).
- Extension aux modèles multi-groupes (C. Buet, B. Després, T. Leroy).

