

Schémas « asymptotic preserving » pour des systèmes hyperboliques sur maillages non structurés

Emmanuel Franck

CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France - UPMC/LJLL

Séminaire LRC-Manon, 24 janvier 2012

avec : Christophe Buet, Bruno Després

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- 1 Introduction
- 2 Schémas AP en 1D, difficultés en 2D
- 3 Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique
- 4 Schémas AP pour des modèles linéaires issus du transport
- 5 Résultats numériques
- 6 Équations d'Euler avec friction et gravité
- 7 Conclusion

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Introduction



énergie atomique • énergies alternatives

- **Fusion par Confinement Inertiel** : porter un mélange gazeux aux conditions d'allumage thermonucléaire en utilisant un ensemble de faisceaux laser.
- **Hydrodynamique Radiative** : interaction entre les équations d'Euler bi-températures et une équation de transport pour le rayonnement.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Fusion par Confinement Inertiel** : porter un mélange gazeux aux conditions d'allumage thermonucléaire en utilisant un ensemble de faisceaux laser.
- **Hydrodynamique Radiative** : interaction entre les équations d'Euler bi-températures et une équation de transport pour le rayonnement.
- **Équation de transport mono-groupe** : Soit $f(\mathbf{x}, \Omega, t) \geq 0$ la fonction de distribution associée aux particules (photons ou neutrons) situées en \mathbf{x} , de direction Ω . On considère une équation de la forme :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \Omega, t) + \Omega \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \Omega, t) = \sigma \int_{S^2} (f(\mathbf{x}, \Omega', t) - f(\mathbf{x}, \Omega, t)) d\Omega'.$$

- Pour $t \gg 1$ et $\sigma \gg 1$, cette équation, tend vers une équation de diffusion sur le premier moment de f

$$\partial_t E(t, \mathbf{x}) - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sigma} \nabla E(t, \mathbf{x}) \right) = 0,$$

$$\text{avec } E(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}, \Omega) d\Omega \text{ et } \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Omega f(t, \mathbf{x}, \Omega) d\Omega.$$



- Modèles simplifiés : de type hyperbolique admettant la même limite de diffusion et dépendant que des variables spatiales.
- **Modèles simplifiés :**
 - modèles P_n : développement de l'équation de transport sur une base d'harmoniques sphériques.
 - modèles S_n : on discrétise en vitesse l'équation (ordonnées discrètes).
 - modèles M_n : modèles P_n non linéaire, fermés en minimisant l'entropie radiative.

Écriture du modèle P_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}. \end{array} \right.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- Modèles simplifiés : de type hyperbolique admettant la même limite de diffusion et dépendant que des variables spatiales.
- **Modèles simplifiés :**
 - modèles P_n : développement de l'équation de transport sur une base d'harmoniques sphériques.
 - modèles S_n : on discrétise en vitesse l'équation (ordonnées discrètes).
 - modèles M_n : modèles P_n non linéaire, fermés en minimisant l'entropie radiative.

Écriture du modèle P_1 :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}. \end{cases}$$

- **Méthodes numériques adaptées** : schémas "asymptotic preserving" de type volumes finis pour capturer la limite de diffusion.

Objectif :

construction de schémas "asymptotic preserving" pour différents modèles simplifiés sur maillages généraux issus de l'hydrodynamique Lagrangienne.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Schémas AP en 1D, difficultés en 2D



énergie atomique - énergies alternatives

Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad \rightarrow \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind**
 - pour la première équation : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$,
 - pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad \rightarrow \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind**

- pour la première équation : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$,
- pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.

- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.

Schéma de Jin-Levermore

- Principe de construction : on introduit l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ du système dans les flux Upwind.
- On écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$



énergie atomique - énergies alternatives

Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind**
 - pour la première équation : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$,
 - pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.

Schéma de Jin-Levermore

- Principe de construction : on introduit l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ du système dans les flux Upwind.
- On écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind**

- pour la première équation : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$,
- pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.

- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.

Schéma de Jin-Levermore

- Principe de construction : on introduit l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ du système dans les flux Upwind.
- On écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

On injecte l'équivalent discret de ces relations dans les flux upwind

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$



Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind**
 - pour la première équation : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$,
 - pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.

Schéma de Jin-Levermore

- Principe de construction : on introduit l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ du système dans les flux Upwind.
- On écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\varepsilon} F_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Équation de la chaleur hyperbolique :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F. \end{cases} \quad \rightarrow \partial_t E - \partial_x \frac{1}{\sigma} \partial_x E = 0$$

- Erreur de consistance du schéma **Upwind**

- pour la première équation : $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$,
- pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.

- Condition CFL de stabilité : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\right) \leq 1$.

Schéma de Jin-Levermore

- Principe de construction : on introduit l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ du système dans les flux Upwind.

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} E_{j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{E_j + E_{j+1}}{2} + \frac{F_j - F_{j+1}}{2} \right), \\ F_{j+\frac{1}{2}} = M \left(\frac{F_j + F_{j+1}}{2} + \frac{E_j - E_{j+1}}{2} \right). \end{cases}$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Le schéma de Jin-Levermore s'écrit

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Le schéma de Jin-Levermore s'écrit

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Erreur de consistance du schéma de Jin-Levermore :
 - pour la première équation : $O(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t)$,
 - pour la seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.
- Condition CFL de stabilité du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$.
- Condition CFL de stabilité du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.

Schéma de Gosse-Toscani

- Principe du construction : localisation des termes sources aux interfaces ce qui induit une onde stationnaire, résolution du problème de Riemann.

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



Schéma de Gosse-Toscani

- Principe du construction : localisation des termes sources aux interfaces ce qui induit une onde stationnaire, résolution du problème de Riemann.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Erreur de consistance du schéma de **Gosse-Toscani** :
 - pour la première équation : $O(\varepsilon \Delta x + \Delta x^2 + \Delta t)$,
 - pour la seconde équation : $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \frac{\Delta x^2}{\sigma}} \right) \leq 1$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2DSchémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperboliqueSchémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transportRésultats
numériquesTravaux en
cours :



Schéma de Gosse-Toscani

- Principe du construction : localisation des termes sources aux interfaces ce qui induit une onde stationnaire, résolution du problème de Riemann.

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Erreur de consistance du schéma de **Gosse-Toscani** :
 - pour la première équation : $O(\varepsilon \Delta x + \Delta x^2 + \Delta t)$,
 - pour la seconde équation : $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \frac{\Delta x^2}{\sigma}} \right) \leq 1$.
- Remarque** : Le schéma de Jin-Levermore (1) avec la discrétisation du terme source $\frac{1}{2}(F_{j+1/2} + F_{j-1/2})$ est égal au schéma de Gosse-Toscani.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2DSchémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperboliqueSchémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transportRésultats
numériquesTravaux en
cours :



Schéma de Gosse-Toscani

- Principe du construction : localisation des termes sources aux interfaces ce qui induit une onde stationnaire, résolution du problème de Riemann.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

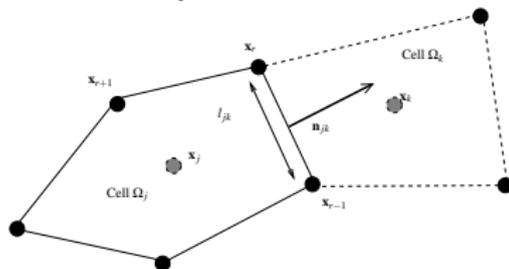
- Erreur de consistance du schéma de **Gosse-Toscani** :
 - pour la première équation : $O(\varepsilon \Delta x + \Delta x^2 + \Delta t)$,
 - pour la seconde équation : $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \frac{\Delta x^2}{\sigma}} \right) \leq 1$.
- Remarque** : Le schéma de Jin-Levermore (1) avec la discrétisation du terme source $\frac{1}{2}(F_{j+1/2} + F_{j-1/2})$ est égal au schéma de Gosse-Toscani.
- Remarque** : pour les deux schémas, la viscosité numérique donne le schéma limite sur maillage grossier ($\frac{\Delta x}{\varepsilon} \gg 1$).

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2DSchémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperboliqueSchémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transportRésultats
numériquesTravaux en
cours :

- On définit les notations pour les formulations volumes finis aux arêtes.

Notations pour les VF aux arêtes



$\Rightarrow \mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}$ et E_{jk} les flux associés à l'arête $\partial\Omega_{jk}$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On utilise les formules de Taylor :

$$\begin{cases} E(\mathbf{x}_j) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}, \nabla E(\mathbf{x}_{jk})), \\ E(\mathbf{x}_k) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}, \nabla E(\mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



énergie atomique - énergies alternatives

- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On utilise les formules de Taylor :

$$\begin{cases} E(\mathbf{x}_j) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) - \frac{\sigma}{v} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_{jk}), \\ E(\mathbf{x}_k) \simeq E(\mathbf{x}_{jk}) - \frac{\sigma}{v} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On utilise les formules de Taylor :

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On utilise les formules de Taylor :

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

On couple ces relations au solveur acoustique classique :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk}, \\ (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk}. \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On utilise les formules de Taylor :

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

On couple ces relations au solveur acoustique classique :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk} - (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk})), \\ (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk} + (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On utilise les formules de Taylor :

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

On couple ces relations au solveur acoustique classique :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk} - (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk})), \\ (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk} + (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

- Système sous dimensionné dans le cas générale. Pour le résoudre on fait une hypothèse géométrique.
- **Hypothèse** : Le maillage satisfait la condition de Delaunay. Alors :

$$(\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_j) = d_{jk} \mathbf{n}_{jk} \text{ et } (\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_k) = -d_{kj} \mathbf{n}_{jk}.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Principe de Jin-Levermore** : modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système. On utilise les formules de Taylor :

Équivalent discret

$$\begin{cases} E_j \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk}), \\ E_k \simeq E_{jk} - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk}). \end{cases}$$

On couple ces relations au solveur acoustique classique :

$$\begin{cases} (\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_j = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) + E_{jk} - (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{jk})), \\ (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_k = (\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk}) - E_{jk} + (\sigma/\varepsilon)(\mathbf{F}_{jk} \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{jk})). \end{cases}$$

- Système sous dimensionné dans le cas générale. Pour le résoudre on fait une hypothèse géométrique.
- **Hypothèse** : Le maillage satisfait la condition de Delaunay. Alors :

$$(\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_j) = d_{jk} \mathbf{n}_{jk} \text{ et } (\mathbf{x}_{jk} - \mathbf{x}_k) = -d_{kj} \mathbf{n}_{jk}.$$

Limite asymptotique du schéma de Jin-Levermore : schéma VF4

$$|\Omega_j| \left| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{\sigma} \sum_k l_{jk} \frac{E_k^n - E_j^n}{d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)} \right| = 0.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Non convergence du schéma VF4



énergie atomique - énergies alternatives

- Le schéma limite VF4 du schéma de Jin-Levermore ne converge pas sur maillages tordus.
Cas test pour le schéma VF4 : on choisit comme condition initiale la solution fondamentale de la chaleur au temps initial $t=0.001$, temps final $t_f=0.010$
- Résultats de convergence sur maillages Cartésien et aléatoire.

Introduction

Schémas AP en 1D, difficultés en 2D

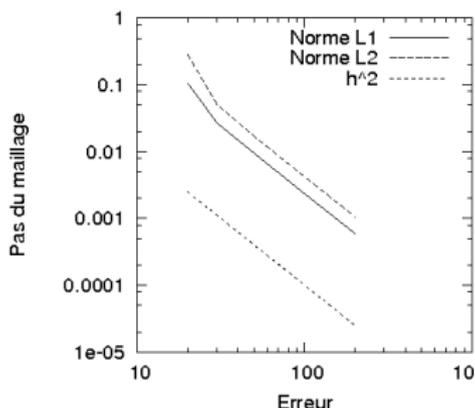
Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique

Schémas AP pour des modèles linéaires issus du transport

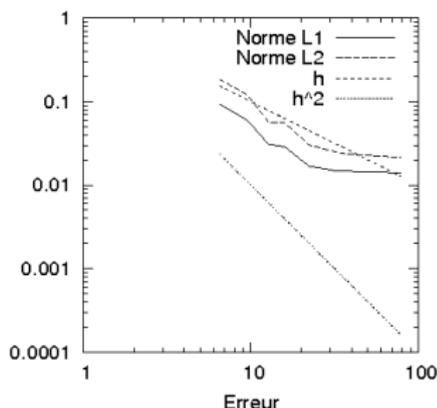
Résultats numériques

Travaux en cours :

Maillage Cartésien



Maillage aléatoire





énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

**Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique**

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

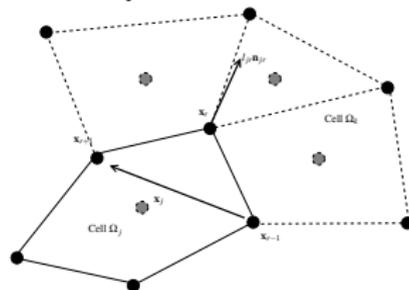
Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique

Idée :

utiliser le schéma **nodal** "GLACE" construit pour l'équation des ondes et coupler ce schéma à la méthode de Jin-Levermore.

- On définit les notations pour les formulations volumes finis aux noeuds

Notations pour les VF aux noeuds



- \mathbf{F}_r et $\mathbf{E}_{n_{jr}}$ sont les flux associés au nœud X_r .
- V_r le volume de contrôle.

- Schéma AP GLACE nommé JL-(a) :

Schéma GLACE JL-(a)

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} |\Omega_j| \mathbf{F}_j. \end{cases}$$

- Solveur nodal de départ :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

avec $\hat{\alpha}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Schéma AP GLACE nommé JL-(a) :

Schéma GLACE JL-(a)

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} |\Omega_j| \mathbf{F}_j. \end{cases}$$

- Solveur nodal de départ :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

avec $\hat{\alpha}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$.

- Solveur nodal modifié : on insère l'état $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{F}$ dans les flux

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{cases}$$

- Schéma AP GLACE nommé JL-(a) :

Schéma GLACE JL-(a)

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} |\Omega_j| \mathbf{F}_j. \end{cases}$$

- Solveur nodal de départ :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

avec $\hat{\alpha}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$.

- Solveur nodal modifié : on insère l'état $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F$ dans les flux

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j, \end{cases}$$

avec $\hat{\beta}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2DSchémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperboliqueSchémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transportRésultats
numériquesTravaux en
cours :



- Schéma de Gosse-Toscani équivalent au schéma de Jin-Levermore avec le terme source localisé aux interfaces.
- On utilise l'identité :

$$|\Omega_j| \hat{I}_d = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{x}_r.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Schéma de Gosse-Toscani équivalent au schéma de Jin-Levermore avec le terme source localisé aux interfaces.
- On utilise l'identité :

$$|\Omega_j| \hat{l}_d = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{x}_r.$$

- Schéma AP GLACE avec le terme source discrétisé aux noeuds nommé JL-(b) :

Schéma GLACE JL-(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j) \mathbf{F}_r. \end{array} \right.$$

- Le flux sont les mêmes que pour le schéma précédent.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Schéma de Gosse-Toscani équivalent au schéma de Jin-Levermore avec le terme source localisé aux interfaces.
- On utilise l'identité :

$$|\Omega_j| \hat{l}_d = \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{x}_r.$$

- Schéma AP GLACE avec le terme source discrétisé aux noeuds nommé JL-(b) :

Schéma GLACE JL-(b)

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\epsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\epsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{\sigma}{\epsilon^2} \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j) \mathbf{F}_r. \end{array} \right.$$

- Le flux sont les mêmes que pour le schéma précédent.
- En 1D le schéma JL-(a) est égal au schéma de Jin-Levermore.
- En 1D le schéma JL-(b) est égal au schéma de Gosse-Toscani.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Schéma semi-implicite (technique mais utile)



énergie atomique • énergies alternatives

- On montre que le schéma JL-(b) précédent est égal à

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (M_r \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_j \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

avec $\hat{\beta}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$, $\hat{\alpha}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$ et

$$M_r = \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \right).$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Schéma semi-implicite (technique mais utile)



énergie atomique - énergies alternatives

- On montre que le schéma JL-(b) précédent est égal à

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (M_r \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j^{n+1}. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{n}_{jr} - E_j \mathbf{n}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr} + \sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

avec $\hat{\beta}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$, $\hat{\alpha}_{jr} = \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}$ et

$$M_r = \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j l_{jr} \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left(\sum_j l_{jr} \hat{\alpha}_{jr} \right).$$

- On implícite le terme source.
- En 1D on retombe sur le schéma semi-implicite de Gosse-Toscani.
- L'étude en 1D montre que la CFL est indépendante de ε .

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Proposition

Le schéma limite lorsque ε tend vers 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}, \\ A_r = - \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{array} \right.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Proposition

Le schéma limite lorsque ε tend vers 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{n}_{jr}) = 0, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}, \\ A_r = - \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{array} \right.$$

$$\| e(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_j |\Omega_j| (E_j(t) - E(\mathbf{x}_j, t))^2.$$

$$\| \mathbf{f}(t) \|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 = \int_0^t \sum_r |V_r| (\mathbf{F}_r(t) - \nabla E(\mathbf{x}_r, t))^2.$$

Théorème

Si il existe une constante α telle que $A_r^S \geq \alpha V_r$ alors le schéma de diffusion semi-discret est convergent pour tout temps $T > 0$ avec l'estimation :

$$\| E(t) \|_{L^2(\Omega)} + \| \mathbf{f}(t) \|_{L^2([0,t] \times \Omega)} \leq C(T)h.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

**Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport**

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Schémas AP pour des modèles linéaires issus du transport



énergie atomique • énergies alternatives

- On introduit les systèmes de Friedrichs avec un terme source raide.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

- A, B, R symétriques et R positive.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



énergie atomique - énergies alternatives

- On introduit les systèmes de Friedrichs avec un terme source raide.

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

- A, B, R symétriques et R positive.

Lemme

Soit \mathbf{E}_i les vecteurs propres de R avec $\text{Ker} R = \text{vect}(\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_p)$. On suppose qu'il existe deux vecteurs propres particuliers de valeurs propres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}$. On suppose en plus une condition de structure :

$$\begin{cases} A \mathbf{E}_i = \gamma_i \mathbf{E}_{p+1}, \forall i \in \{1..p\}, \\ B \mathbf{E}_i = \delta_i \mathbf{E}_{p+2}, \forall i \in \{1..p\}, \end{cases}$$

alors $((\mathbf{u}, \mathbf{E}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{E}_p))$ converge vers $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$ quand ε tend vers zéro avec

$$\partial_t \mathbf{v} - \frac{1}{\lambda_{i_1} \sigma} K_1 \partial_{xx} \mathbf{v} - \frac{1}{\lambda_{i_2} \sigma} K_2 \partial_{yy} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

et K_1, K_2 des matrices symétriques positives.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



énergie atomique • énergies alternatives

- **Modèles S_n** : issus de la méthode des ordonnées discrètes qui discrétise l'opérateur de collision à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés des modèles S_n** : matrices de flux diagonales, $\dim \text{Ker} R = 1$, R diagonalisable et symétrique pour les variables $u_i = \sqrt{w_i} f(\Omega_i)$.
- w_i les poids de quadrature, Ω_i les vitesses de quadrature et f solution de l'équation de transport.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Modèles S_n** : issus de la méthode des ordonnées discrètes qui discrétise l'opérateur de collision à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés des modèles S_n** : matrices de flux diagonales, $\dim \text{Ker} R = 1$, R diagonalisable et symétrique pour les variables $u_i = \sqrt{w_i} f(\Omega_i)$.
- w_i les poids de quadrature, Ω_i les vitesses de quadrature et f solution de l'équation de transport.
- **Modèles P_n** : modèles issus de la projection de l'équation de transport sur la base des harmoniques sphériques.
- **Propriétés des modèles P_n** : système symétrisable, R définie par $R_{11} = 0$ et $R_{ij} = 1$ ($i \neq 0$).

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- **Modèles S_n** : issus de la méthode des ordonnées discrètes qui discrétise l'opérateur de collision à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés des modèles S_n** : matrices de flux diagonales, $\dim \text{Ker} R = 1$, R diagonalisable et symétrique pour les variables $u_i = \sqrt{w_i} f(\Omega_i)$.
- w_i les poids de quadrature, Ω_i les vitesses de quadrature et f solution de l'équation de transport.
- **Modèles P_n** : modèles issus de la projection de l'équation de transport sur la base des harmoniques sphériques.
- **Propriétés des modèles P_n** : système symétrisable, R définie par $R_{11} = 0$ et $R_{ij} = 1$ ($i \neq 0$).

Proposition

Les modèles P_n et S_n satisfont les hypothèses de structure précédentes.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Proposition

Le système diagonalisé dans la base de vecteurs propres de R pour les modèles P_n et S_n est

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}$$

avec D matrice diagonale composée des valeurs propres de R tel que $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). Si l'hypothèse de structure est satisfaite alors

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec $A''_{0,j} = 0$, $A''_{i,0} = 0$, $B''_{0,j} = 0$, $B''_{i,0} = 0$.

- Les matrices $P_{1,x}$, $P_{1,y}$ sont les matrices du système P_1 à un coefficient multiplicateur près.

Proposition

Le système diagonalisé dans la base de vecteurs propres de R pour les modèles P_n et S_n est

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}$$

avec D matrice diagonale composée des valeurs propres de R tel que $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). Si l'hypothèse de structure est satisfaite alors

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec $A''_{0,j} = 0$, $A''_{i,0} = 0$, $B''_{0,j} = 0$, $B''_{i,0} = 0$.

- Les matrices $P_{1,x}$, $P_{1,y}$ sont les matrices du système P_1 à un coefficient multiplicateur près.
- **Conclusion** : les modèles P_n et S_n peuvent être scindés entre un système analogue à P_1 et un système qui n'intervient pas en limite de diffusion.
- **Stratégie numérique** : scinder le système diagonalisé, discrétiser le système P_1 à l'aide d'un schéma AP, discrétiser l'autre système à l'aide d'un schéma classique.



- Algorithme de décomposition
 - **Étape 1** : On diagonalise dans la base de R le système

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}. \quad (3)$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Algorithme de décomposition
 - **Étape 1** : On diagonalise dans la base de R le système

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}. \quad (3)$$

- **Étape 2** : On décompose le système diagonalisé

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} A'_1 \partial_x \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} A'_2 \partial_y \mathbf{v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{u} \quad (4)$$

avec $\mathbf{v} = Q^t \mathbf{u}$, $A'_1 = Q^t A_1 Q$ et $A'_2 = Q^t A_2 Q$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Algorithme de décomposition
 - **Étape 1** : On diagonalise dans la base de R le système

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}. \quad (3)$$

- **Étape 2** : On obtient

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{v} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (A_1'' \partial_x \mathbf{v} + A_2'' \partial_y \mathbf{v}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}. \quad (4)$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Algorithme de décomposition
 - **Étape 1** : On diagonalise dans la base de R le système

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}. \quad (3)$$

- **Étape 2** : On obtient

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{v} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (A_1'' \partial_x \mathbf{v} + A_2'' \partial_y \mathbf{v}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}. \quad (4)$$

- **Étape 3** : Le système (5) est discrétisé avec un schéma AP

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{v} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{v}) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D' \mathbf{v} \quad (5)$$

avec D' définie par $D'_{22} = D'_{33} = 1$ et $D'_{ii \neq 22, ii \neq 33} = 0$.

- Algorithme de décomposition
 - **Étape 1** : On diagonalise dans la base de R le système

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}. \quad (3)$$

- **Étape 2** : On obtient

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{v} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (A_1'' \partial_x \mathbf{v} + A_2'' \partial_y \mathbf{v}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}. \quad (4)$$

- **Étape 3** : Le système (5) est discrétisé avec un schéma AP

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{v} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{v}) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D' \mathbf{v} \quad (5)$$

avec D' définie par $D'_{22} = D'_{33} = 1$ et $D'_{ii \neq 22, ii \neq 33} = 0$.

- **Étape 4** : Le système (6) est discrétisé avec un schéma classique (Upwind, Rusanov)

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (A_1'' \partial_x \mathbf{v} + A_2'' \partial_y \mathbf{v}) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D'' \mathbf{v} \quad (6)$$

avec D'' définie par $D''_{11} = D''_{22} = D''_{33} = 0$ et $D''_{ii} = 1 \quad i \geq 4$.

- Algorithme de décomposition
 - **Étape 1** : On diagonalise dans la base de R le système

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_1 \partial_x \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} A_2 \partial_y \mathbf{u} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{u}. \quad (3)$$

- **Étape 2** : On obtient

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{v} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (A_1'' \partial_x \mathbf{v} + A_2'' \partial_y \mathbf{v}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{v}. \quad (4)$$

- **Étape 3** : Le système (5) est discrétisé avec un schéma AP

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (P_{1,x} \partial_x \mathbf{v} + P_{1,y} \partial_y \mathbf{v}) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D' \mathbf{v} \quad (5)$$

avec D' définie par $D'_{22} = D'_{33} = 1$ et $D'_{ii \neq 22, ii \neq 33} = 0$.

- **Étape 4** : Le système (6) est discrétisé avec un schéma classique (Upwind, Rusanov)

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} (A_1'' \partial_x \mathbf{v} + A_2'' \partial_y \mathbf{v}) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D'' \mathbf{v} \quad (6)$$

avec D'' définie par $D''_{11} = D''_{22} = D''_{33} = 0$ et $D''_{ii} = 1 \quad i \geq 4$.

- **Étape 5** : on calcule les variables \mathbf{v}^{n+1} , puis \mathbf{u}^{n+1} .



énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

**Résultats
numériques**

Travaux en
cours :

Résultats numériques

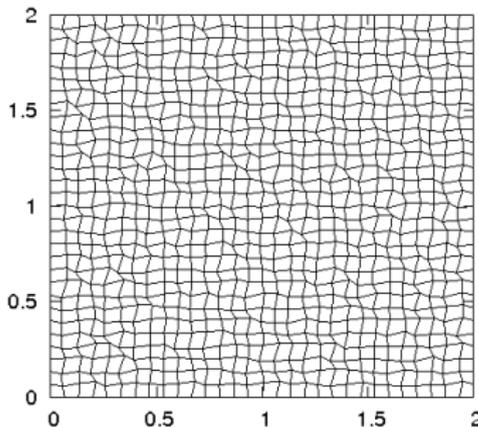
Exemples de maillages non structurés



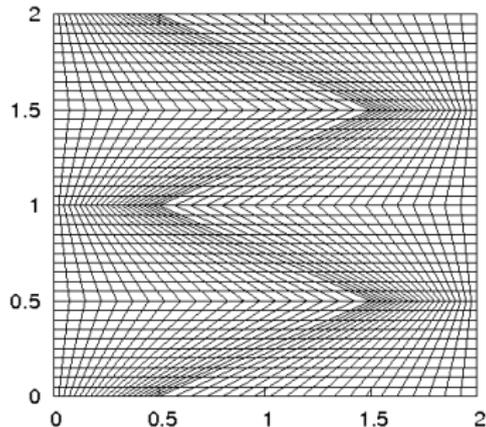
énergie atomique - énergies alternatives

Deux exemples classiques de maillages non structurés.

Maillage aléatoire



Maillage Kershaw



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- En régime de transport $\varepsilon = O(1)$ et $\sigma = O(1)$, le schéma converge avec l'ordre 1.
- **Régime de diffusion** : on choisit comme condition initiale la solution fondamentale au temps initial $t=0.001$. Temps final $t_f = 0.010$.

Maillage/ ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}
Cartésien 60-120 mailles	1.8	2	2.	2.
Cartésien 80-160 mailles	1.75	1.97	2	2
Cartésien 120-240 mailles	1.7	1.95	2	2
Aléa. quad. 60-120 mailles	1.83	2.	2	2
Aléa. quad. 80-160 mailles	1.96	2.2	2.2	2.2
Aléa. quad. 120-240 mailles	1.73	1.92	2	2
Kershaw 60-120 mailles	2	2.1	2.1	2.1
Kershaw 80-160 mailles	1.87	1.97	2	2
Kershaw 120-240 mailles	1.83	1.97	2	2

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2DSchémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperboliqueSchémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transportRésultats
numériquesTravaux en
cours :

- En régime de transport $\varepsilon = O(1)$ et $\sigma = O(1)$, le schéma converge avec l'ordre 1.
- **Régime de diffusion** : on choisit comme condition initiale la solution fondamentale au temps initial $t=0.001$. Temps final $t_f = 0.010$.

Maillage/ ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}
Cartésien 60-120 mailles	1.8	2	2.	2.
Cartésien 80-160 mailles	1.75	1.97	2	2
Cartésien 120-240 mailles	1.7	1.95	2	2
Aléa. quad. 60-120 mailles	1.83	2.	2	2
Aléa. quad. 80-160 mailles	1.96	2.2	2.2	2.2
Aléa. quad. 120-240 mailles	1.73	1.92	2	2
Kershaw 60-120 mailles	2	2.1	2.1	2.1
Kershaw 80-160 mailles	1.87	1.97	2	2
Kershaw 120-240 mailles	1.83	1.97	2	2

- Le schéma converge aussi sur des maillages triangulaires avec un ordre compris en 1 et 2.
- L'erreur entre la solution de diffusion et celle de l'équation de la chaleur hyperbolique est en $O(\varepsilon)$.
- Pour $\frac{\Delta x}{\varepsilon} = O(1)$ l'ordre descend car on compare la solution numérique à la solution exact de diffusion.

Comparaison entre les schémas AP et non AP



energie atomique - energies alternatives

- On résout le modèle P_1 avec la solution fondamentale de la chaleur comme condition initiale et $\varepsilon = 0.001$. La solution est la solution de l'équation de la chaleur à ε près. Maillage de Kershaw.

Solution de diffusion

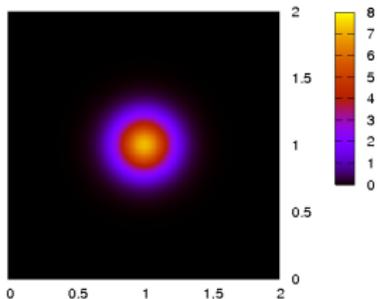


Schéma non AP

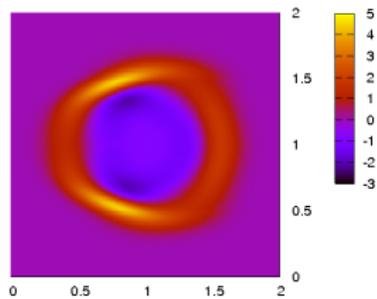


Schéma Ap non cv

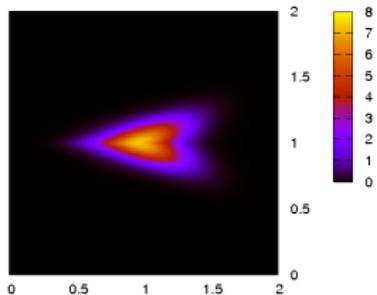
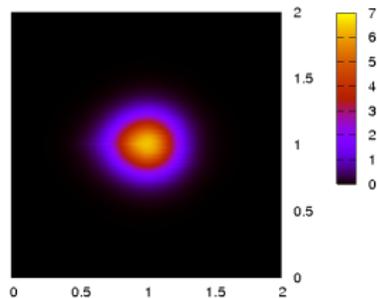


Schéma AP



Introduction

Schémas AP en 1D, difficultés en 2D

Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique

Schémas AP pour des modèles linéaires issus du transport

Résultats numériques

Travaux en cours :



energie atomique - energies alternatives

- Résultats en régime de diffusion. On reprend le cas test précédent.
- On calcule l'ordre entre des maillages 60-120 et 120-240. Ordre approximatif :

Maillage/ ε	0.001	0.0001
Cartésien	1.8	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Triang. reg.	1.9	2
Aléa. trig.	1.35	1.35
Kershaw K=1	1.85	1.95

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

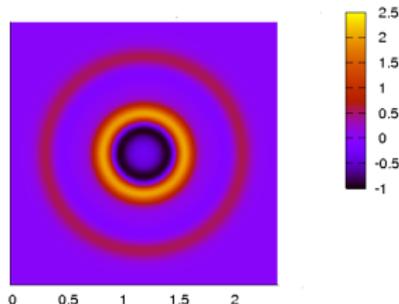
Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Résultats en régime de diffusion. On reprend le cas test précédent.
- On calcule l'ordre entre des maillages 60-120 et 120-240. Ordre approximatif :

Maillage/ ε	0.001	0.0001
Cartésien	1.8	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Triang. reg.	1.9	2
Aléa. trig.	1.35	1.35
Kershaw K=1	1.85	1.95

- Test 2 : calcul numérique de la solution fondamentale de P_3 avec le schéma GLACE stabilisé.





énergie atomique • énergies alternatives

- Modèle à 4 vitesses : $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
- **Régime de transport** : Ordre 1 de convergence pour les solutions régulières.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

**Résultats
numériques**

Travaux en
cours :



- Modèle à 4 vitesses : $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
- **Régime de transport** : Ordre 1 de convergence pour les solutions régulières.
- **Régime asymptotique**, cas test précédent. Ordre approximatif :

Maillage/ ϵ	10^{-3}	10^{-4}
Cartésien	1.80	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Triang. reg.	1.9	2
Aléa trig.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

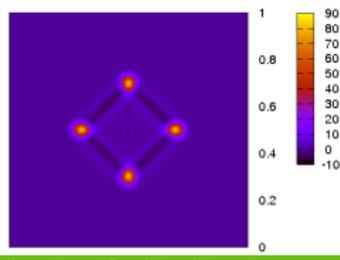
Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Modèle à 4 vitesses : $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
- **Régime de transport** : Ordre 1 de convergence pour les solutions régulières.
- **Régime asymptotique**, cas test précédent. Ordre approximatif :

Maillage/ ε	10^{-3}	10^{-4}
Cartésien	1.80	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Triang. reg.	1.9	2
Aléa trig.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

- Test 2 : calcul numérique de la solution fondamentale de S_2 avec le schéma GLACE sur maillage aléatoire :





énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Travaux en cours : équations d'Euler avec friction et gravité



énergie atomique - énergies alternatives

- Équations d'Euler avec gravité et friction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = \frac{1}{\varepsilon} (\rho \mathbf{g} - \frac{\rho}{\varepsilon} \rho \mathbf{u}), \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \frac{1}{\varepsilon} (\rho(\mathbf{g}, \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\varepsilon} \rho(\mathbf{u}, \mathbf{u})). \end{array} \right.$$

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



- Équations d'Euler avec gravité et friction :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = \frac{1}{\varepsilon} (\rho \mathbf{g} - \frac{\rho}{\varepsilon} \rho \mathbf{u}), \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \frac{1}{\varepsilon} (\rho (\mathbf{g}, \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\varepsilon} \rho (\mathbf{u}, \mathbf{u})). \end{cases}$$

- Propriétés :

- Inégalité d'entropie : $\partial_t \rho S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u} S) \geq 0$.

- États stationnaires :

$$(E_1) \begin{cases} \mathbf{u} = 0, \\ \nabla p = \rho \mathbf{g}. \end{cases} \quad (E_2) \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_c, \\ \rho = \rho_c, \\ \nabla p = \rho_c \mathbf{g} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_c \mathbf{u}_c. \end{cases}$$

- Limite de diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho e + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = \frac{1}{\sigma} \left(\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right). \end{cases}$$



énergie atomique - énergies alternatives

- Équations d'Euler avec gravité et friction :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = \frac{1}{\varepsilon} (\rho \mathbf{g} - \frac{\rho}{\varepsilon} \rho \mathbf{u}), \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \frac{1}{\varepsilon} (\rho (\mathbf{g}, \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\varepsilon} \rho (\mathbf{u}, \mathbf{u})). \end{cases}$$

- Propriétés :

- Inégalité d'entropie : $\partial_t \rho S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u} S) \geq 0$.

- États stationnaires :

$$(E_1) \begin{cases} \mathbf{u} = 0, \\ \nabla p = \rho \mathbf{g}. \end{cases} \quad (E_2) \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_c, \\ \rho = \rho_c, \\ \nabla p = \rho_c \mathbf{g} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_c \mathbf{u}_c. \end{cases}$$

- Limite de diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho e + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = \frac{1}{\sigma} \left(\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right). \end{cases}$$

Idée :

Coupler un schéma Lagrange+projection (schéma nodal en 2D) avec la méthode de Jin-Levermore.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Schéma Lagrange+projection sans termes sources

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* \rho_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* \rho_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho u)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho e)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* u_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^* u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = 0, \end{array} \right.$$

avec les flux lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{2\rho c_{j+\frac{1}{2}}} (p_j - p_{j+1}), \\ p_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}) + \frac{\rho c_{j+\frac{1}{2}}}{2} (u_j - u_{j+1}). \end{array} \right.$$

avec $\rho_{j+\frac{1}{2}}^m = 0.5(\rho_j + \rho_{j+1})$ et

- $\rho_{j+\frac{1}{2}}, (\rho u)_{j+\frac{1}{2}}$ ou $(\rho e)_{j+\frac{1}{2}}$ les flux Upwind.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Schéma Lagrange+projection avec termes sources

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* \rho_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* \rho_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho u)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} + S_{j-\frac{1}{2}}), \\ \partial_t (\rho e)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* u_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^* u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* + S_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^*). \end{array} \right.$$

avec les flux lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{2\rho c_{j+\frac{1}{2}}} (p_j - p_{j+1}), \\ p_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}) + \frac{\rho c_{j+\frac{1}{2}}}{2} (u_j - u_{j+1}). \end{array} \right.$$

avec $\rho_{j+\frac{1}{2}}^m = 0.5(\rho_j + \rho_{j+1})$ et

- $\rho_{j+\frac{1}{2}}, (\rho u)_{j+\frac{1}{2}}$ ou $(\rho e)_{j+\frac{1}{2}}$ les flux Upwind.
- Le terme source est donné par $S_{j+1/2} = g \rho_{j+\frac{1}{2}}^m - \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \rho_{j+\frac{1}{2}}^m u_{j+\frac{1}{2}}^*$.

- Schéma Lagrange+projection avec termes sources

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* \rho_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* \rho_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho u)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} + S_{j-\frac{1}{2}}), \\ \partial_t (\rho e)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* u_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^* u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* + S_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^*). \end{array} \right.$$

avec les flux lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{j+\frac{1}{2}}^* + \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* = p_j + \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_j, \\ p_{j+\frac{1}{2}}^* - \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* = p_{j+1} - \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+1}, \end{array} \right.$$

avec $\rho_{j+\frac{1}{2}}^m = 0.5(\rho_j + \rho_{j+1})$ et

- $\rho_{j+\frac{1}{2}}, (\rho u)_{j+\frac{1}{2}}$ ou $(\rho e)_{j+\frac{1}{2}}$ les flux Upwind.
- Le terme source est donné par $S_{j+1/2} = g \rho_{j+\frac{1}{2}}^m - \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \rho_{j+\frac{1}{2}}^m u_{j+\frac{1}{2}}^*$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Schéma Lagrange+projection avec termes sources

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* \rho_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* \rho_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho u)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} + S_{j-\frac{1}{2}}), \\ \partial_t (\rho e)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* u_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^* u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* + S_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^*). \end{array} \right.$$

avec les flux lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{j+\frac{1}{2}}^* + \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* = p_j + \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_j - \Delta x g \rho_{j+\frac{1}{2}}, \\ p_{j+\frac{1}{2}}^* - \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* = p_{j+1} - \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+1} + \Delta x g \rho_{j+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

avec $\rho_{j+\frac{1}{2}}^m = 0.5(\rho_j + \rho_{j+1})$ et

- $\rho_{j+\frac{1}{2}}, (\rho u)_{j+\frac{1}{2}}$ ou $(\rho e)_{j+\frac{1}{2}}$ les flux Upwind.
- Le terme source est donné par $S_{j+1/2} = g \rho_{j+\frac{1}{2}}^m - \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \rho_{j+\frac{1}{2}}^m u_{j+\frac{1}{2}}^*$.

- Schéma Lagrange+projection avec termes sources

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* \rho_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* \rho_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho u)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} + S_{j-\frac{1}{2}}), \\ \partial_t (\rho e)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* u_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^* u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* + S_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^*). \end{array} \right.$$

avec les flux lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{j+\frac{1}{2}}^* + \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* = p_j + \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_j - \Delta x g \rho_{j+\frac{1}{2}} + \Delta x \sigma_{j+\frac{1}{2}} \rho_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^*, \\ p_{j+\frac{1}{2}}^* - \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* = p_{j+1} - \rho c_{j+\frac{1}{2}} u_{j+1} + \Delta x g \rho_{j+\frac{1}{2}} + \Delta x \sigma_{j+\frac{1}{2}} \rho_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^*, \end{array} \right.$$

avec $\rho_{j+\frac{1}{2}}^m = 0.5(\rho_j + \rho_{j+1})$ et

- $\rho_{j+\frac{1}{2}}, (\rho u)_{j+\frac{1}{2}}$ ou $(\rho e)_{j+\frac{1}{2}}$ les flux Upwind.
- Le terme source est donné par $S_{j+1/2} = g \rho_{j+\frac{1}{2}}^m - \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \rho_{j+\frac{1}{2}}^m u_{j+\frac{1}{2}}^*$.

- Schéma Lagrange+projection avec termes sources

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* \rho_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* \rho_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho u)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} + S_{j-\frac{1}{2}}), \\ \partial_t (\rho e)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* u_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^* u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* + S_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^*). \end{array} \right.$$

avec les flux lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{j+\frac{1}{2}}^* = M_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}(u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{2\rho c_{j+\frac{1}{2}}} (p_j - p_{j+1} + \Delta x g \rho_{j+\frac{1}{2}}^m) \right), \\ p_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}) + \frac{\rho c_{j+\frac{1}{2}}}{2} (u_j - u_{j+1}), \end{array} \right.$$

avec $\rho_{j+\frac{1}{2}}^m = 0.5(\rho_j + \rho_{j+1})$ et $M_{j+\frac{1}{2}} = \frac{2\varepsilon \rho c_{j+\frac{1}{2}}}{2\varepsilon \rho c_{j+\frac{1}{2}} + \rho_{j+\frac{1}{2}}^m \sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta x}$.

- $\rho_{j+\frac{1}{2}}$, $(\rho u)_{j+\frac{1}{2}}$ ou $(\rho e)_{j+\frac{1}{2}}$ les flux Upwind.
- Le terme source est donné par $S_{j+1/2} = g \rho_{j+\frac{1}{2}}^m - \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \rho_{j+\frac{1}{2}}^m u_{j+\frac{1}{2}}^*$.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

- Reformulation du schéma Lagrange+projection AP

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* \rho_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* \rho_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \partial_t (\rho u)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho u)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ \frac{M_{j+\frac{1}{2}} - M_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x \varepsilon} p_j + \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} + S_{j-\frac{1}{2}}), \\ \partial_t (\rho e)_j + \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^* (\rho e)_{j-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x} + \frac{p_{j+\frac{1}{2}}^* u_{j+\frac{1}{2}}^* - p_{j-\frac{1}{2}}^* u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\varepsilon \Delta x} = \\ - \frac{(1 - M_{j+\frac{1}{2}}) u_{j+\frac{1}{2}}^* - (1 - M_{j-\frac{1}{2}}) u_{j-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x \varepsilon} p_j + \frac{1}{2\varepsilon} (S_{j+\frac{1}{2}} u_{j+\frac{1}{2}}^* + S_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^*), \end{array} \right.$$

avec les flux lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{j+\frac{1}{2}}^* = M_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}) + \frac{1}{2\rho c_{j+\frac{1}{2}}} (p_j - p_{j+1} + \Delta x g \rho_{j+\frac{1}{2}}^m) \right), \\ p_{j+\frac{1}{2}}^* = M_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} (p_j + p_{j+1}) + \frac{\rho c_{j+\frac{1}{2}}}{2} (u_j - u_{j+1}) \right), \end{array} \right.$$

avec $\rho_{j+\frac{1}{2}}^m = 0.5(\rho_j + \rho_{j+1})$ et $M_{j+\frac{1}{2}} = \frac{2\varepsilon \rho c_{j+\frac{1}{2}}}{2\varepsilon \rho c_{j+\frac{1}{2}} + \rho_{j+\frac{1}{2}}^m \sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta x}$.

- Le terme source est donné par $S_{j+1/2} = M_{j+1/2} \left(g \rho_{j+1/2}^m - \frac{\sigma_{j+1/2}}{\varepsilon} \rho_{j+1/2}^m u_j \right)$.



- **Résumé de la méthode** : On couple un schéma Lagrange+projection avec la méthode de Jin-Levermore et une discrétisation localisée aux interfaces du terme source.
- Propriétés du schéma :
 - Il préserve la positivité de ρ sous une CFL indépendante de ε .
 - Le schéma est well-balanced.
 - Le schéma est AP avec un schéma limite positif et d'ordre 1.
 - On peut obtenir un schéma semi-implicite, stable sous une CFL indépendante de ε .
- On obtient un schéma satisfaisant les mêmes propriétés en 2D avec un schéma nodal (GLACE) Lagrange+projection.
- Extensions possibles :
 - Termes de friction plus compliqués,
 - autres modèles de mécanique des fluides comme les équations de Saint Venant.

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :



énergie atomique • énergies alternatives

Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Conclusion



● Conclusion

- On a obtenu des schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique sur maillages non structurés.
- On a montré la convergence du schéma limite de diffusion GLACE et la stabilité du schéma JL-(b).
- En utilisant la décomposition présentée on obtient des schémas AP simples pour les systèmes S_n et P_n .
- On a proposé un schéma L+P AP et well-balanced pour les équations d'Euler avec friction et gravité.

Publications

- C. Buet, B. Després, E. Franck *Design of asymptotic preserving schemes fore hyperbolic heat equation on unstructured meshes* Numerish Mathematik, accepté.
- E. Franck, P. Hoch, G. Samba, P. Navarro *An asymptotic preserving scheme for P_1 model using classical diffusion schemes on unstructured polygonal meshes* ESAIM : Proceedings, October 2011, Vol. 32, p. 56-75.
- C. Buet, B. Després, E. Franck *AP schemes for Friedrichs systems with stiff relaxation on unstructured meshes. Applications to the angular discretization in transport.* En cours de rédaction.



- **Perspectives (fin de thèse et après)**

- Validation numérique du schéma Lagrange+projection AP pour les équations d'Euler avec friction et gravité.
- Schéma Lagrange+projection AP pour Saint Venant avec friction et topographie (même principe avec une correction pour préserver l'état stationnaire d'un lac en repos).
- Preuve de convergence pour le schéma JL-(b) (équation de la chaleur hyperbolique).
- Schémas positif et "asymptotic preserving" pour les modèles S_n .
- Schémas d'ordre deux dans tout les régimes.

Introduction

Schémas AP en 1D, difficultés en 2D

Schémas AP pour l'équation de la chaleur hyperbolique

Schémas AP pour des modèles linéaires issus du transport

Résultats numériques

Travaux en cours :



Introduction

Schémas AP
en 1D,
difficultés en
2D

Schémas AP
pour
l'équation de
la chaleur
hyperbolique

Schémas AP
pour des
modèles
linéaires issus
du transport

Résultats
numériques

Travaux en
cours :

Merci de votre attention.