

Méthodes de volumes finis pour des systèmes hyperboliques avec termes sources sur maillages généraux

E. Franck¹,
C. Buet³, B. Després², L. S. Mendoza⁴, T. Leroy^{2,3}

Séminaire méthodes numériques, LJLL, Paris, 13 octobre 2014

1. Inria Nancy Grand Est, Équipe TONUS, France.
2. LJLL, Université Paris 6, France.
3. CEA-DAM-DIFF, France.
4. Institut Max-Planck de physique des plasmas, Allemagne.

Plan de l'exposé

- 1 Contexte physique et mathématique
- 2 Schémas AP pour le modèle P_1
- 3 Systèmes de Friedrichs et transport linéaire
- 4 Extension aux modèles non linéaires

Contexte physique et mathématique

Systèmes hyperboliques raides

- **Systèmes hyperboliques raides avec termes sources :**

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F(\mathbf{U}) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_y G(\mathbf{U}) = \frac{1}{\varepsilon} S(\mathbf{U}) - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} R(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

avec $\varepsilon \in]0, 1]$ et $\sigma > 0$.

- Familles particulières de solution :

- **Limite de diffusion** pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et $S(\mathbf{U}) = 0$:

$$\partial_t \mathbf{V} - \operatorname{div} (K(\nabla \mathbf{V}, \sigma)) = 0, \quad \mathbf{V} \in \operatorname{Ker} R.$$

- **États stationnaires** pour $\sigma = 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\partial_x F(\mathbf{U}) + \partial_y G(\mathbf{U}) = S(\mathbf{U}).$$

- Applications : biologie, neutronique, mécanique des fluides, physique des plasmas, **hydrodynamique radiative pour la FCI** (hydrodynamique + transport linéaire).

Schémas "Well-Balanced"

- **La discretisation des équilibres physiques est un problème important** (lac au repos pour Saint-Venant ou équilibre hydrostatique pour les flôts astrophysique).
- **Schéma classique** : Les états stationnaires physiques ou une bonne discrétisation de ces états ne sont pas des équilibres du schéma.
- **Conséquence** : Des vitesses numériques parasites plus importantes que les vitesses physiques apparaissent pour les flots quasi-uniformes ou uniformes.

Schémas WB : définitions

- **Schéma "Well-Balanced" exact** : Schéma exacte pour les états stationnaires.
 - **Schéma "Well-Balanced"** : schéma exacte pour des états stationnaires discrets aux interfaces.
-
- **Équations de Saint-Venant** : schémas exactement WB.
 - **Équations d'Euler avec gravité** : schémas WB.

Schémas "Asymptotic preserving"

- Modèle P_1 :

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \partial_x \left(\frac{1}{\sigma} \partial_x E \right) = 0.$$

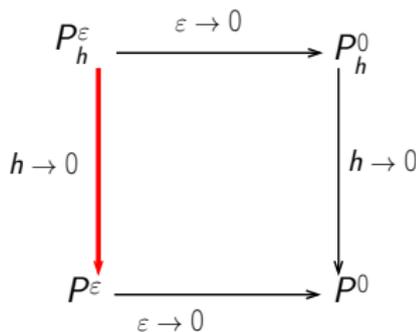


Figure: Diagramme AP

- Consistance des schémas de type **Godunov** : $O(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t)$.
- Condition CFL : $\Delta t (\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2}) \leq 1$.
- Consistance des schémas AP : $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL : $\Delta t \leq \Delta x^2 + \varepsilon \Delta x$
- Schémas AP vs non AP : **réduction très importante du coût CPU.**

- Les schémas AP de type Godunov sont obtenues en général **en incorporant les termes sources dans les flux** (techniques WB).

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe** : introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F + O(\varepsilon^2)$ dans les flux.

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe** : introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F + O(\varepsilon^2)$ dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) + (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \partial_x E(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe** : introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F + O(\varepsilon^2)$ dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe** : introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F + O(\varepsilon^2)$ dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\varepsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

On couple ces relations avec les flux

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe** : introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\epsilon} F + O(\epsilon^2)$ dans les flux.
- on écrit les relations

$$\begin{cases} E(x_j) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_j - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\epsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}), \\ E(x_{j+1}) = E(x_{j+\frac{1}{2}}) - (x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\sigma}{\epsilon} F(x_{j+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_j + E_j = F_{j+\frac{1}{2}} + E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\epsilon} F_{j+\frac{1}{2}}, \\ F_{j+1} - E_{j+1} = F_{j+\frac{1}{2}} - E_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma \Delta x}{2\epsilon} F_{j+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe** : introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F + O(\varepsilon^2)$ dans les flux.

Schéma de Jin Levermore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{array} \right.$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Jin-Levermore**
- **Principe** : introduction de l'état stationnaire $\partial_x E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F + O(\varepsilon^2)$ dans les flux.

Schéma de Jin Levermore :

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{cases}$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Erreur de consistance du schéma de **Jin-Levermore** :
 - première équation : $O(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t)$,
 - seconde équation : $O\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon} + \Delta x + \Delta t\right)$.
- Condition CFL du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right) \leq 1$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.

Schémas AP de type Godunov

- **Schéma de Gosse-Toscani**

- **Principe** : Le schéma de Jin-Levermore (??) avec la discrétisation du terme source $\frac{1}{2}(F_{j+\frac{1}{2}} + F_{j-\frac{1}{2}})$ est égal au schéma de Gosse-Toscani.

Schéma de Gosse Toscani :

$$\begin{cases} \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + M \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{E_{j+1}^n - 2E_j^n + E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} = 0, \\ \frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\Delta t} + M \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} - M \frac{F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n}{2\varepsilon \Delta x} + M \frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_j^n = 0, \end{cases}$$

avec $M = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \sigma \Delta x}$.

- Erreur de consistance du schéma de **Gosse-Toscani** : $O(\Delta x + \Delta t)$.
- Condition CFL du schéma explicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon} \right) \leq 1$.
- Condition CFL du schéma semi-implicite : $\Delta t \left(\frac{1}{\Delta x \varepsilon + \Delta x^2} \right) \leq 1$.

Exemple numérique

- **Test de validation des schémas AP** : les données sont $E(0, x) = G(x)$ avec $G(x)$ une Gaussienne, $F(0, x) = 0$ et $\sigma = 1$, $\varepsilon = 0.001$.

Schéma AP

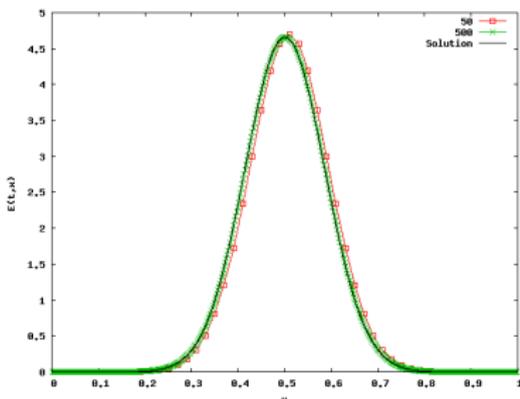


Schéma Godunov

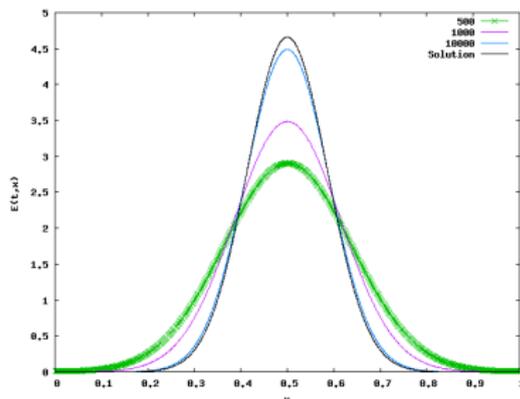


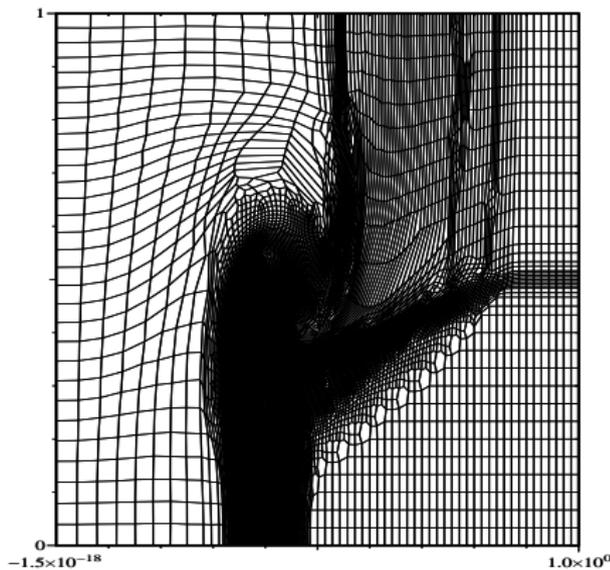
schéma	Erreur L^1	temps CPU
Godunov, 10000 mailles	0.0366	1485m4.26s
Godunov, 500 mailles	0.445	0m24.317s
AP, 500 mailles	0.0001	0m15.22s
AP, 50 mailles	0.0065	0m0.054s

Bibliographie non exhaustive

- S. Jin, D. Levermore, *Numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms*, (1996).
- C. Berthon, R. Turpault, *Asymptotic preserving HLL schemes*, (2012).
- L. Gosse, G. Toscani, *An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations*, (2002).
- C. Berthon, P. Charrier and B. Dubroca, *An HLLC scheme to solve the M_1 model of radiative transfer in two space dimensions*, (2007).
- C. Chalons, M. Girardin, S. Kokh, *Large time step asymptotic preserving numerical schemes for the gas dynamics equations with source terms*, (2013).
- C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, P-A. Raviart, N. Seguin, *Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter dependent source*, (2010).
- R. Natalini and M. Ribot, *An asymptotic high order mass-preserving scheme for a hyperbolic model of chemotaxis*, (2012).
- M. Zenk, C. Berthon et C. Klingenberg, *A well-balanced scheme for the Euler equations with a gravitational potential*, (2014).
- J. Greenberg, A. Y. Leroux, *A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, (1996).
- R. Kappeli, S. Mishra, *Well-balanced schemes for the Euler equations with gravitation*, (2013).

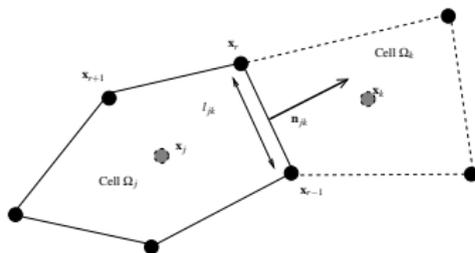
Pourquoi sur maillages non structurés ?

- **Applications** : couplage entre les radiations et l'hydrodynamique.
- **Certains codes d'hydrodynamique** : schémas "cell-centered" de types Lagrangien ou ALE pour des problèmes multi-matériaux.
- Exemple de maillage obtenu avec un code ALE (droite).
- **But** : Construire et analyser des schémas AP "cell-centered" pour le transport linéaire sur maillages généraux.



Schémas "Asymptotic preserving" 2D

- Extension classique en 2D du schéma de Jin-Levermore : modifier le flux upwind (flux 1D écrit dans la direction normale) en incorporant les états stationnaires dans les flux.



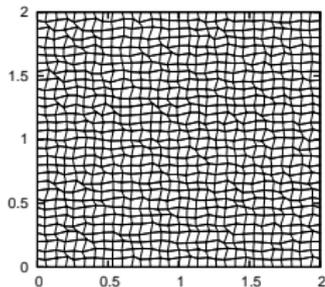
- l_{jk} et \mathbf{n}_{jk} sont la longueur et la normale associées à l'arête $\partial\Omega_{jk}$.

Limite asymptotique du schéma AP :
$$|\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \frac{1}{\sigma} \sum_k l_{jk} \frac{E_k^n - E_j^n}{d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)} = 0.$$

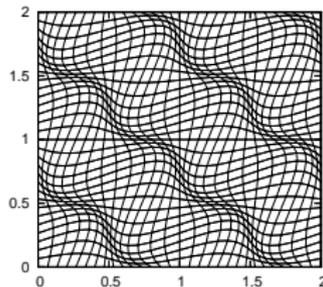
- $\|P_h^0 - P_h\| \rightarrow 0$ seulement sous des contraintes géométriques fortes.
- Ces schémas AP **ne converge pas** en 2D sur maillages généraux $\forall \varepsilon$.

Exemples de maillages non structurés

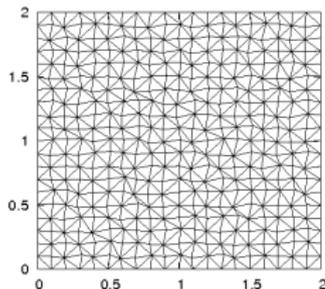
Maillage aléatoire



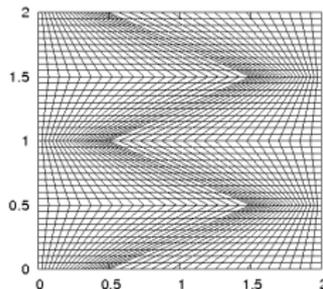
Maillage "smooth"



Maillage aléatoire triang.



Maillage Kershaw



Schémas AP pour le modèle P_1

Schéma aux noeuds : cas linéaire

- Cas linéaire : modèle P_1

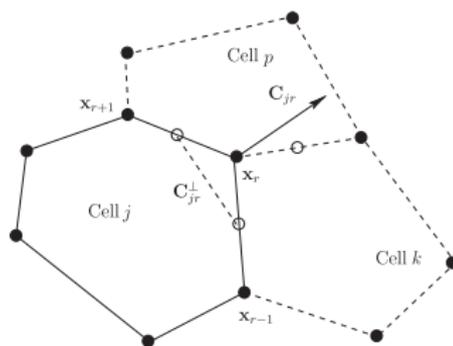
$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}. \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \partial_t E - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sigma} \nabla E \right) = 0.$$

Idée : Méthodes de volumes finis **aux noeuds** pour le modèle P_1 + méthode AP et WB.

Schémas aux noeuds : Les flux sont localisés aux noeuds du maillage et non aux milieux des arêtes. Introduit pour l'hydrodynamique Lagrangienne.

- Quantités géométriques définies par $\mathbf{C}_{jr} = \nabla_{\mathbf{x}_r} |\Omega_j|$.
- $\sum_j \mathbf{C}_{jr} = \sum_r \mathbf{C}_{jr} = \mathbf{0}$.

Notations



Schémas AP 2D

Schémas AP aux noeuds :

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r (\mathbf{F}_r, \mathbf{C}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \partial_t \mathbf{F}_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{E} \mathbf{c}_{jr} = \mathbf{S}_j. \end{cases}$$

- Flux aux noeuds classique :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{c}_{jr} - E_j \mathbf{C}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \sum_j \mathbf{E} \mathbf{c}_{jr} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

with $\hat{\alpha}_{jr} = \frac{\mathbf{C}_{jr} \otimes \mathbf{C}_{jr}}{\|\mathbf{C}_{jr}\|}$.

- Nouveaux flux obtenus en incorporant l'état stationnaire $\nabla E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{F}$:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{c}_{jr} - E_j \mathbf{C}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j E_j \mathbf{C}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{cases}$$

avec $\hat{\beta}_{jr} = \mathbf{C}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$.

- Terme source : (1) $\mathbf{S}_j = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} |\Omega_j| \mathbf{F}_j$ ou (2) $\mathbf{S}_j = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{F}_r$, $\sum_r \hat{\beta}_{jr} = \hat{I}_d |\Omega_j|$.

Discrétisation en temps pour le schéma AP

- Nouvelle formulation du schéma avec le terme source (2) et discrétisation semi-implicite locale :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r (M_r \mathbf{F}_r, \mathbf{C}_{jr}) = 0, \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{E} \mathbf{c}_{jr} = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r \hat{\alpha}_{jr} (\hat{I}_d - M_r) \right) \mathbf{F}_j^{n+1}. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \mathbf{c}_{jr} - E_j \mathbf{C}_{jr} = \hat{\alpha}_{jr} M_r (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r), \\ \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right) \mathbf{F}_r = \sum_j E_j \mathbf{C}_{jr} + \sum_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j. \end{array} \right.$$

$$M_r = \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right)^{-1} \left(\sum_j \hat{\alpha}_{jr} \right)$$

- Le schéma semi-implicite est stable sous une condition CFL indépendante de ε (numériquement).
- Le schéma implicite est stable.

Hypothèses pour la preuve de convergence

Hypothèses géométriques

- $(\mathbf{u}, (\sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}) \mathbf{u}) \geq \beta h(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$
- $(\mathbf{u}, (\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}) \mathbf{u}) \geq \gamma h(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$
- $(\mathbf{u}, (\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)) \mathbf{u}) \geq \alpha V_r(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$

- Deux premières hypothèses : vérifiées sur tous maillages non dégénérés.
- Dernière hypothèse : on obtient des conditions suffisantes non nécessaires sur le maillage.
- Exemple : pour les triangles tous les angles doivent être plus grand que 12 degrés.

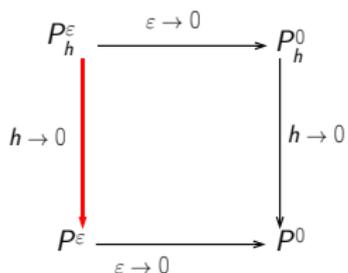
Hypothèses sur la régularité des solutions et des conditions initiales

- $\mathbf{F}(t = 0, \mathbf{x}) = -\frac{\varepsilon}{\sigma} \nabla E(t = 0, \mathbf{x})$
- Régularité des solutions exactes : $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \in W^{3, \infty}(\Omega)$ and $\mathbf{V}(t = 0, \mathbf{x}) \in H^3(\Omega)$
- Régularité des conditions initiales pour le schéma : $\mathbf{V}_h(t = 0, \mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$

Convergence uniforme en espace : principe

- Estimation de convergence naive : $\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{naive} \leq C\varepsilon^{-b}h^c$
- **Idée** : Utiliser des estimations intermédiaires et des inégalités triangulaires (Jin-Levermore-Golse).

$$\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{L^2} \leq \min(\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{naive}, \|P_h^\varepsilon - P_h^0\| + \|P_h^0 - P^0\| + \|P^\varepsilon - P^0\|)$$



- Estimations intermédiaires :

- $\|P^\varepsilon - P^0\| \leq C_a \varepsilon^a,$
- $\|P_h^0 - P^0\| \leq C_d h^d,$
- $\|P_h^\varepsilon - P_h^0\| \leq C_e \varepsilon^e,$
- $d > c, e = a.$

- On obtient :

$$\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{L^2} \leq C \min(\varepsilon^{-b}h^c, \varepsilon^a + h^d + \varepsilon^e)$$

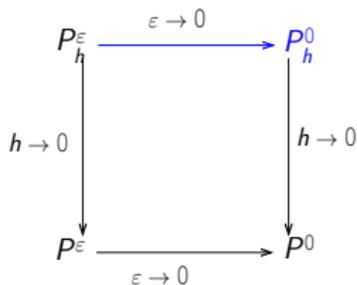
- En comparant ε et $\varepsilon_{threshold} = h^{\frac{ac}{a+b}}$ On obtient l'estimation finale :

$$\|P_h^\varepsilon - P^\varepsilon\|_{L^2} \leq h^{\frac{ac}{a+b}}$$

Schéma limite de diffusion

Schéma limite de diffusion (P_h^0) :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r (\mathbf{F}_r, \mathbf{C}_{jr}) = 0, \\ \sum_r \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j = \sum_r \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j E_j \mathbf{C}_{jr}, \quad A_r = - \sum_j \mathbf{C}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{array} \right.$$

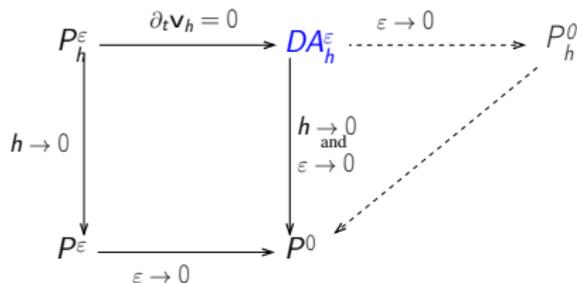


- **Problème** : estimation de $\|P_h^\epsilon - P_h^0\|$.
- En pratique on obtient $\|P_h^\epsilon - P_h^0\| \leq C \frac{\epsilon}{h}$.

Schéma limite de diffusion

Schéma limite de diffusion (P_h^0) :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t E_j(t) - \sum_r (\mathbf{F}_r, \mathbf{C}_{jr}) = 0, \\ \sum_r \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_j = \sum_r \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{F}_r, \\ \sigma A_r \mathbf{F}_r = \sum_j E_j \mathbf{C}_{jr}, \quad A_r = - \sum_j \mathbf{C}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j). \end{array} \right.$$



- **Problème** : estimation de $\|P_h^\epsilon - P_h^0\|$.
- En pratique on obtient $\|P_h^\epsilon - P_h^0\| \leq C \frac{\epsilon}{h}$.
- Introduction d'un **schéma intermédiaire de diffusion** DA_h^ϵ .
- DA_h^ϵ : schéma P_h^ϵ avec $\partial_t \mathbf{F}_j = \mathbf{0}$.
- Dans les estimations introduites précédemment on remplace P_h^0 par DA_h^ϵ .

Condition H et résultat final

Condition H : La Hessienne discrète du schéma P_h^0 peut être majorée ou l'estimation d'erreur $\|P_h^\varepsilon - P_h^0\|$ peut être obtenue indépendamment de la Hessienne discrète.

- Condition H respectée : on utilise P_h^0 dans les estimations.
- Condition H non respectée : on utilise DA_h^ε dans les estimations.
- Condition H respectée sur grilles Cartésiennes ou sur grilles non uniformes en 1D.

Résultat final : On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe une constante $C(T) > 0$ tel que :

$$\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq C \min \left(\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}, \varepsilon \max \left(1, \sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \right) + h + (h + \varepsilon) + \varepsilon \right) \leq Ch^{\frac{1}{4}}.$$

- Cas $\varepsilon \leq h$: $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\| \leq C_1 \min(\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}}, 1) \leq C_1 h$
- Cas $\varepsilon \geq h$: $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\| \leq C_1 \min(\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}, \sqrt{\frac{\varepsilon^3}{h}})$
- En introduisant $\varepsilon_{thresh} = h^{\frac{1}{2}}$ on montre que le pire cas est $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\| \leq C_2 h^{\frac{1}{4}}$.

Résultats intermédiaires I

- \mathbf{V}^ε solution exacte de P^ε , \mathbf{V}_h^ε solution numérique de P_h^ε .

Estimation de $\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe une constante $C > 0$ tel qu'on obtienne l'estimation

$$\|\mathbf{V}_h^\varepsilon - \mathbf{V}^\varepsilon\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))} \leq C \sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}.$$

- Principe de la preuve :
 - Contrôler la stabilité des quantités discrètes \mathbf{u}_r et \mathbf{u}_j par ε
 - On définit l'erreur $E(t) = \|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}_h^\varepsilon\|_{L^2}$ et on estime $E'(t)$ en utilisant les inégalités de Young et Cauchy-Schwartz, les estimations de stabilité, les propriétés géométriques et beaucoup de calculs.
 - Intégration en temps de l'estimation sur $E'(t)$.

Résultats intermédiaires II

- \mathbf{V}_h^0 solution de DA_h^ε , \mathbf{V}^0 solution exacte de P^0 .

Estimation de $\|DA_h^\varepsilon - P^0\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe une constante positive $\forall T > 0$ $C_1(T)$ tel que

$$\|\mathbf{V}_h^0 - \mathbf{V}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(T)(h + \varepsilon), \quad 0 < t \leq T.$$

- Principe de la preuve :
 - Estimations de stabilité pour les quantités discrètes E_j et pour les gradients discrets aux noeuds.
 - Etude de consistance des différent opérateurs : divergence et gradient.
 - Estimation L^2 en utilisant les erreurs de consistance + lemme de Gronwall.

Résultats intermédiaires III

Estimate $\|P_h^\varepsilon - DA_h^\varepsilon\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe $\forall T > 0$ une constante, $C_2(T)$ tel que

$$\|\mathbf{V}_h^\varepsilon - \mathbf{V}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2(T)\varepsilon \max\left(1, \sqrt{\varepsilon h^{-1}}\right) + Ch, \quad 0 < t \leq T.$$

Estimation de $\|P^\varepsilon - P^0\|$:

On suppose que les hypothèses de régularité et géométriques sont vérifiées. Il existe $\forall T > 0$ une constante, $C_3(T)$ tel que

$$\|\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3(T)\varepsilon, \quad 0 < t \leq T.$$

● Principe de la preuve :

- Écrire $P^0 = P^\varepsilon + R$ (resp $DA_h^\varepsilon = P_h^\varepsilon + R$) avec R un résidu.
- Obtenir une majoration par ε du résidu.
- Estimation L^2 de la différence entre les modèles ou les deux schémas.

Schéma AP vs schéma classique

- Cas test : solution fondamentale de la chaleur, $\varepsilon = 0.001$. Résultats donnés par différents schémas pour le modèle P_1 sur maillage de Kershaw.

Solution de diffusion

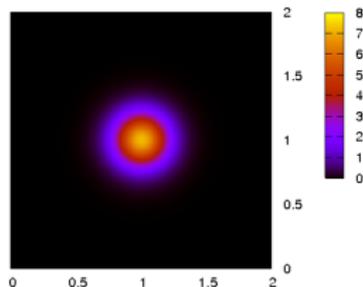


Schéma non AP

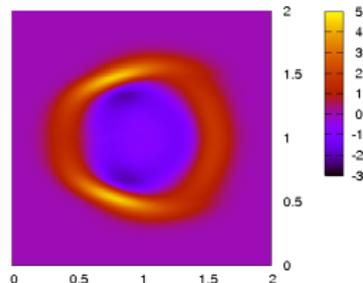


Schéma AP standard

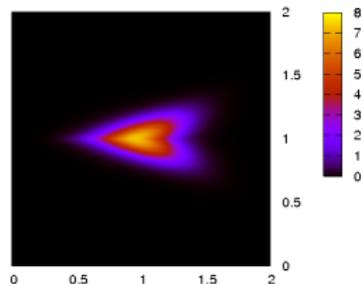
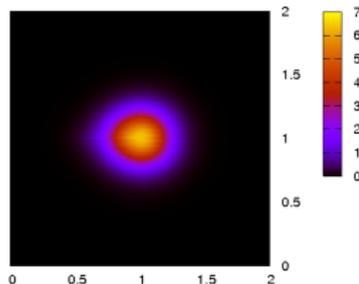
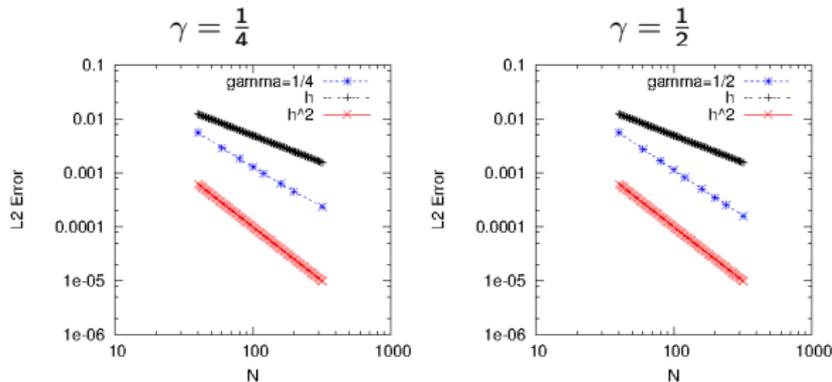


Schéma AP aux noeuds



Convergence pour le système P_1

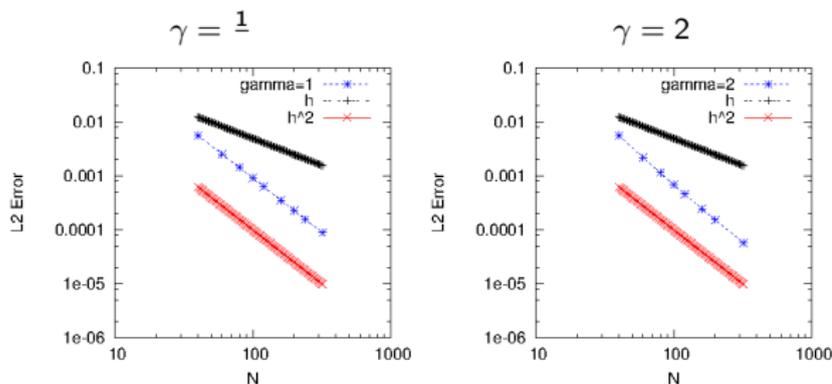
- Solution périodique pour le système P_1 dépendante de ε .
- $E(t, \mathbf{x}) = (\alpha(t) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \alpha'(t)) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$
- $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = (-\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi x) \cos(\pi y), -\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi y) \cos(\pi x))$
- Étude de convergence pour $\varepsilon = h^\gamma$ sur un maillage aléatoire quadrangulaire.



- Les résultats numériques montrent que l'erreur est homogène $O(h\varepsilon + h^2)$.
- Estimation théorique espérée $O((h\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + h)$.
- Estimation obtenue non optimale dans le régime intermédiaire.

Convergence pour le système P_1

- Solution périodique pour le système P_1 dépendante de ε .
- $E(t, \mathbf{x}) = (\alpha(t) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \alpha'(t)) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$
- $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = (-\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi x) \cos(\pi y), -\frac{\varepsilon}{\sigma} \alpha(t) \sin(\pi y) \cos(\pi x))$
- Étude de convergence pour $\varepsilon = h^\gamma$ sur un maillage aléatoire quadrangulaire.



- Les résultats numériques montrent que l'erreur est homogène $O(h\varepsilon + h^2)$.
- Estimation théorique espérée $O((h\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + h)$.
- Estimation obtenue non optimale dans le régime intermédiaire.

Systèmes de Friedrichs et transport linéaire

Systèmes de Friedrichs avec termes sources

- Systèmes de Friedrichs avec termes sources

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

- A, B, R matrices symétriques et R symétrique positive.

Systèmes de Friedrichs avec termes sources

- Systèmes de Friedrichs avec termes sources

$$\partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} A \partial_x \mathbf{U} + \frac{1}{\varepsilon} B \partial_y \mathbf{U} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} R \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n$$

- A, B, R matrices symétriques et R symétrique positive.

Théorème

On note \mathbf{E}_i les vecteurs propres de R avec $\text{Ker } R = \text{vect}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_p)$. On suppose qu'il existe deux vecteurs particuliers indépendants associés aux valeurs propres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}$ de R satisfaisant

$$\begin{cases} A \mathbf{E}_i = \gamma_i \mathbf{E}_{p+1}, \quad \forall i \in \{1..p\}, \\ B \mathbf{E}_i = \delta_i \mathbf{E}_{p+2}, \quad \forall i \in \{1..p\}, \end{cases} \quad (H_1)$$

alors $((\mathbf{U}, \mathbf{E}_1), \dots, (\mathbf{U}, \mathbf{E}_p))$ tend vers $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^p$ quand ε tend vers zéro avec

$$\partial_t \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_{p+1} \sigma} K_1 \partial_{xx} \mathbf{V} - \frac{1}{\lambda_{p+2} \sigma} K_2 \partial_{yy} \mathbf{V} = \mathbf{0},$$

et K_1, K_2 des matrices symétriques définies positives.

Modèles P_n et S_n

- Équation de transport linéaire (transfert radiatif, neutronique) : soit $f(t, \mathbf{x}, \cdot) \geq 0$ la fonction de distribution des particules localisées en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et de direction $\Omega = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \in \mathbb{S}^{d-1}$. On considère l'équation de transport

$$\partial_t f(t, \mathbf{x}, \Omega) + \frac{1}{\varepsilon} \Omega \cdot \nabla f(t, \mathbf{x}, \Omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \int_S \left(f(t, \mathbf{x}, \Omega') - f(t, \mathbf{x}, \Omega) \right) d\Omega'.$$

- **Modèles S_n** : (méthode des ordonnées discrètes) obtenue par approximation de l'opérateur intégrale à l'aide d'une formule de quadrature.
- **Propriétés du modèles S_n** : A, B matrices diagonales, $\dim \text{Ker } R = 1$ et R symétrique positive.
- **Modèles P_n** : obtenus par projection de l'équation de transport sur les harmoniques sphériques.
- **Propriétés du modèles P_n** : système symétrisable, R matrice diagonale définie par $R_{11} = 0$ et $R_{ii} = 1$ ($i \neq 0$).

Théorème

Les modèles P_n et S_n satisfont l'hypothèse de structure (H_1).

Décomposition des systèmes de Friedrichs

Théorème :

Lorsqu'on écrit les modèles P_n ou S_n dans la base des vecteurs propres de R , on obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V}$$

avec D diagonale, définie par $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). Si l'hypothèse (H_1) est satisfaite

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec $A''_{0,j} = 0$, $A''_{i,0} = 0$, $B''_{0,j} = 0$, $B''_{i,0} = 0$.

- Les matrices $P_{1,x}$, $P_{1,y}$ sont les matrices associées au modèle P_1 .

Décomposition des systèmes de Friedrichs

Théorème :

Lorsqu'on écrit les modèles P_n ou S_n dans la base des vecteurs propres de R , on obtient

$$\partial_t \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} A' \partial_x \mathbf{V} + \frac{1}{\varepsilon} B' \partial_y \mathbf{V} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} D \mathbf{V}$$

avec D diagonale, définie par $D_{11} = 0$ et $D_{ii} = 1$ ($i \neq 0$). Si l'hypothèse (H_1) est satisfaite

$$A' = P_{1,x} + A'', \quad B' = P_{1,y} + B'',$$

avec $A''_{0,j} = 0$, $A''_{i,0} = 0$, $B''_{0,j} = 0$, $B''_{i,0} = 0$.

- Les matrices $P_{1,x}$, $P_{1,y}$ sont les matrices associées au modèle P_1 .
- **Conclusion** : Les modèles P_n et S_n peuvent être décomposés entre le modèle P_1 et un système qui n'intervient pas en régime de diffusion.
- **Méthode numérique (micro-macro décomposition ?)** : Diagonalisation du système, décomposition du système, discrétisation du modèle P_1 avec un schéma AP et l'autre système avec un schéma classique.

Résultats numériques sur les systèmes de Friedrichs

- Régime de diffusion : cas test précédent.

Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.8	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.80	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

Table: Ordre de convergence. Modèle P_3 **Table:** Ordre de convergence. Modèle S_2

Résultats numériques sur les systèmes de Friedrichs

- Régime de diffusion : cas test précédent.

Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.8	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

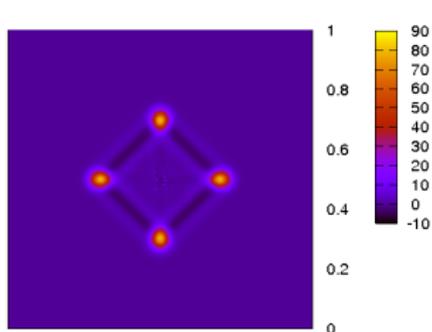
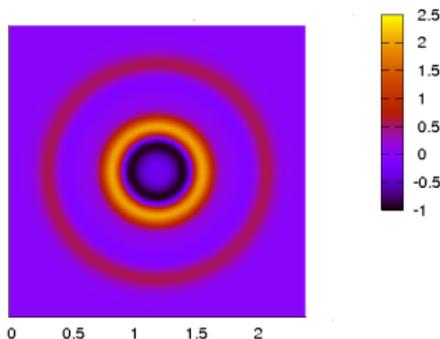
Maillages/ ε	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
Cartésien	1.80	1.95
Aléa. quad.	1.85	2
Aléa. triang.	1.35	1.35
Kershaw	1.85	1.95

Table: Ordre de convergence. Modèle P_3 **Table:** Ordre de convergence. Modèle S_2

- Cas test de transport : solution fondamentale

Solution fondamentale du modèle P_3

Solution fondamentale du modèle S_2



Extension aux modèles non linéaires

Équations d'Euler avec friction et gravité

- Équations d'Euler avec friction et gravité :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p = -\frac{1}{\varepsilon} (\rho \nabla \phi + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \mathbf{u}), \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = -\frac{1}{\varepsilon} (\rho (\nabla \phi, \mathbf{u}) + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho (\mathbf{u}, \mathbf{u})). \end{cases}$$

- avec ϕ le potentiel de gravité, σ le coefficient de friction.

Propriétés :

- Inégalité d'entropie : $\partial_t \rho S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} S) \geq 0$.

- États stationnaires :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ \nabla p = -\rho \nabla \phi. \end{cases}$$

- Limite de diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho e + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} e) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = -\frac{1}{\sigma} \left(\nabla \phi + \frac{1}{\rho} \nabla p \right). \end{cases}$$

Construction du nouveau schéma aux noeuds I

Idée : Modifier le schéma Lagrange+projection classique avec la méthode de Jin-Levermore.

- Le schéma Lagrange Projection (schéma LP) :

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t \rho_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} \rho_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} \rho_{k(r)} \right) = 0 \\ |\Omega_j| \partial_t \rho_j \mathbf{u}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{u})_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{u})_{k(r)} + \sum_r \mathbf{p} \mathbf{C}_{jr} \right) = 0 \\ |\Omega_j| \partial_t \rho_j \mathbf{e}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{e})_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{e})_{k(r)} + \sum_r (\mathbf{p} \mathbf{C}_{jr}, \mathbf{u}_r) \right) = 0 \end{cases}$$

avec les flux Lagrangien

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{jr} = \rho_j \mathbf{C}_{jr} + \rho_j c_j \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_r) \\ \sum_j \rho_j c_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{u}_r = \sum_j \rho_j \mathbf{C}_{jr} + \sum_j \rho_j c_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{u}_j \end{cases}$$

- Flux d'advection : $\mathbf{u}_{jr} = (\mathbf{C}_{jr}, \mathbf{u}_r)$, $R_+ = (r/\mathbf{u}_{jr} > 0)$, $R_- = (r/\mathbf{u}_{jr} < 0)$ et

$$\rho_{k(r)} = \frac{\sum_{j/\mathbf{u}_{jr} > 0} \mathbf{u}_{jr} \rho_j}{\sum_{j/\mathbf{u}_{jr} > 0} \mathbf{u}_{jr}}.$$

Construction du nouveau schéma aux noeuds II

Méthode de Jin-Levermore : on incorpore la relation $\nabla p + O(\varepsilon^2) = \rho \mathbf{g} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \mathbf{u}$ dans les flux Lagrangien

- Le schéma modifié est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Omega_j| \partial_t \rho_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} \rho_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} \rho_{k(r)} \right) = 0 \\ |\Omega_j| \partial_t \rho_j \mathbf{u}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{u})_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{u})_{k(r)} + \sum_r \rho \mathbf{C}_{jr} \right) \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r \hat{\beta}_{jr} (\rho \nabla \phi)_r + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_r \rho_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r \right) \\ |\Omega_j| \partial_t \rho_j \mathbf{e}_j + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} (\rho e)_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} (\rho e)_{k(r)} + \sum_r (\rho \mathbf{C}_{jr}, \mathbf{u}_r) \right) \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_r (\hat{\beta}_{jr} (\rho \nabla \phi)_r, \mathbf{u}_r) + \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_r \rho_r (\mathbf{u}_r, \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r) \right) \end{array} \right.$$

avec les flux Lagrangien

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{C}_{jr} = \rho_j \mathbf{C}_{jr} + \rho_j c_j \hat{\alpha}_{jr} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_r) - \hat{\beta}_{jr} (\rho \nabla \phi)_r - \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_r \hat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r \\ \left(\sum_j \rho_j c_j \hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_r \sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{u}_r = \sum_j \rho_j \mathbf{C}_{jr} + \sum_j \rho_j c_j \hat{\alpha}_{jr} \mathbf{u}_j - \left(\sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) (\rho \nabla \phi)_r \end{array} \right.$$

- et $(\rho \nabla \phi)_r$ une discrétisation à l'interface de $\rho \nabla \phi$.

Propriété "asymptotic preserving"

Schéma limite de diffusion : Si les matrices locales sont inversibles alors le schéma LP-AP tends formellement vers le schéma suivant

$$\begin{cases} |\Omega_j| \partial_t \rho_j + \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} \rho_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} \rho_{k(r)} \right) = 0 \\ |\Omega_j| \partial_t \rho_j \mathbf{e}_j + \left(\sum_{R_+} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{e})_j + \sum_{R_-} \mathbf{u}_{jr} (\rho \mathbf{e})_{k(r)} + p_j \sum_r (\mathbf{C}_{jr}, \mathbf{u}_r) \right) = 0 \\ \sigma \rho_r \left(\sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) \mathbf{u}_r = \sum_j p_j \mathbf{C}_{jr} - \left(\sum_j \hat{\beta}_{jr} \right) (\rho \nabla \phi)_r \end{cases}$$

- Remarques sur le schéma limite de diffusion :
 - Le schéma de diffusion est **positive et non linéaire**.
 - Pour $p = K\rho$, on observe que le schéma converge à l'ordre 1.
 - **Question ouverte** : Vérifier cette propriété pour une équation d'état plus générale.
- Remarques sur le schéma en temps :
 - Une autre formulation du schéma permet d'obtenir un terme source local dans l'équation sur la quantité de mouvement.
 - En utilisant une discrétisation implicite du terme source local, on constate numériquement que la **CFL est indépendante de ε** .

Propriété "well-balanced"

Résultats :

- On définit $\nabla_r \rho = -(\sum_j \widehat{\beta}_{jr})^{-1} \sum_j \rho_j \mathbf{C}_{jr}$ et ρ_r une moyenne de ρ_j autour du noeud \mathbf{x}_r .
- Si les conditions initiales sont données par un état stationnaire discret $\nabla_r \rho = -(\rho \nabla \phi)_r$ alors elles sont préservées exactement par le schéma.

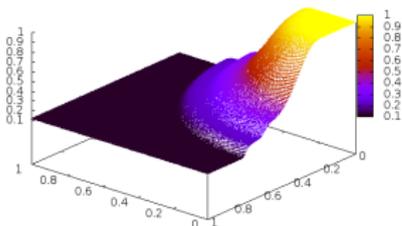
Conclusion :

- L'erreur numérique est gouvernée seulement par l'erreur numérique entre l'état stationnaire discret et l'état continu.
- **Question** : Quelle est l'erreur numérique entre les deux états discret et continu ?
 - Pour ρ constant et $\nabla \phi = \mathbf{g} \mathbf{x}$: l'état stationnaire discret est exacte.
 - Pour ρ et $\nabla \phi$ variable : l'état stationnaire discret n'est pas exacte, **mais l'erreur est homogène à $O(h^2)$.**

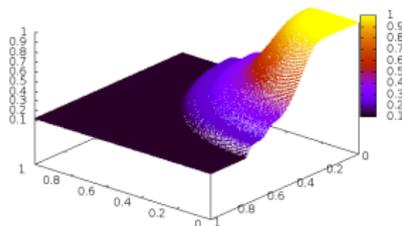
Résultats numériques : large opacité

- Cas test : problème de Sod avec $\sigma > 0$, $\varepsilon = 1$ et $\nabla\phi = \mathbf{0}$.
- $\sigma = 1$

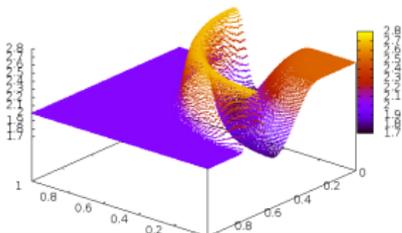
AP scheme, ρ



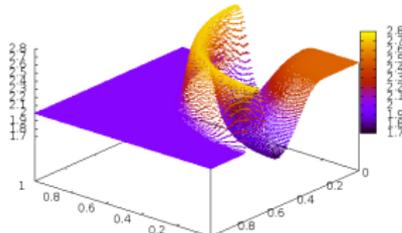
non-AP scheme, ρ



AP scheme, ϵ



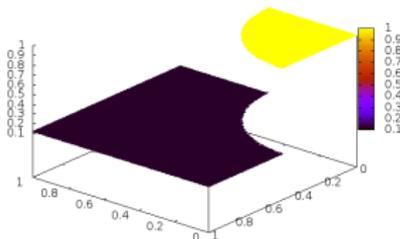
non-AP scheme, ϵ



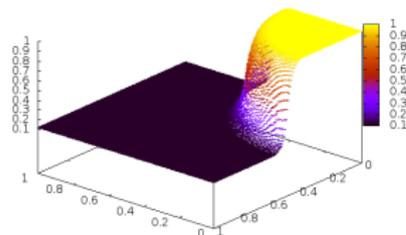
Résultats numériques : large opacité

- Cas test : problème de Sod avec $\sigma > 0$, $\varepsilon = 1$ et $\nabla\phi = \mathbf{0}$.
- $\sigma = 10^6$

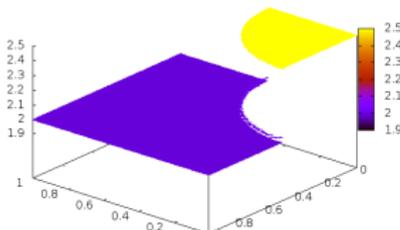
AP scheme, ρ



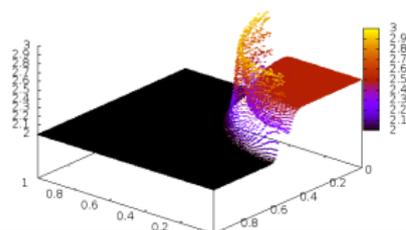
non-AP scheme, ρ



AP scheme, ϵ

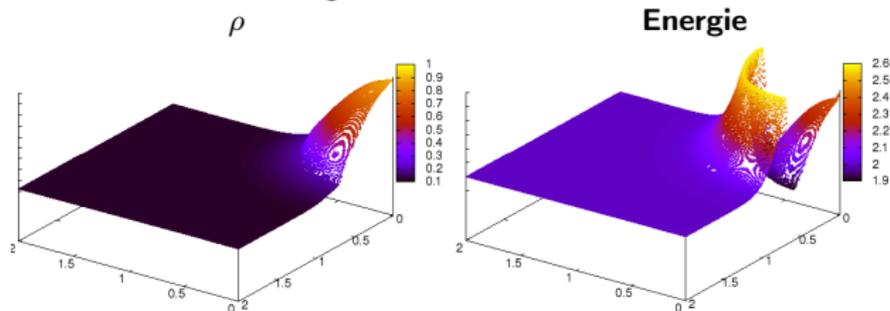


non-AP scheme, ϵ

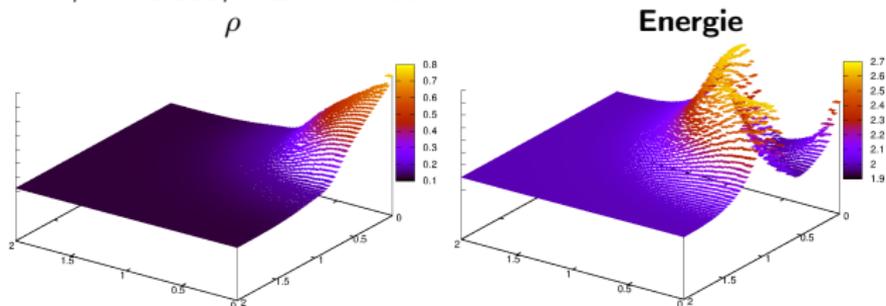


Résultats numériques : limite de diffusion

- Cas test : problème de Sod avec $\sigma > 0$, et $\nabla\phi = \mathbf{0}$.
- Schéma non AP, $\varepsilon = 0.005$, maillage 480×480

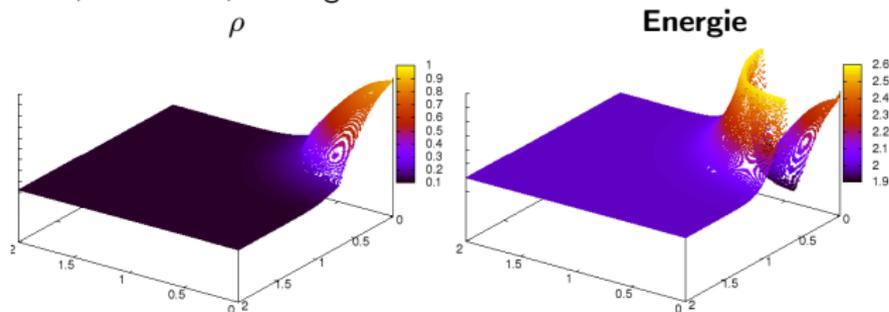


- Schéma non AP, $\varepsilon = 0.005$, mesh 60×60

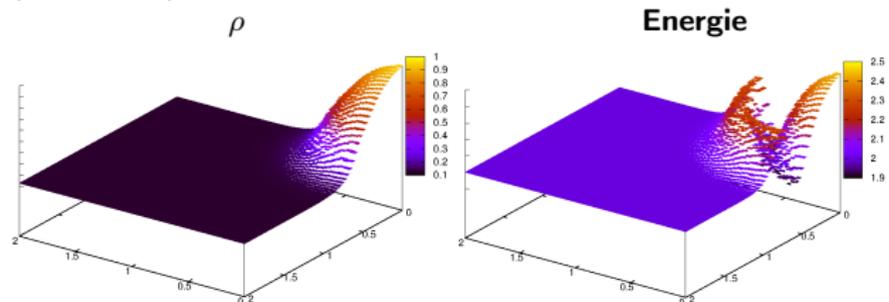


Résultats numériques : limite de diffusion

- Cas test : problème de Sod avec $\sigma > 0$, et $\nabla\phi = \mathbf{0}$.
- Schéma non AP, $\varepsilon = 0.005$, maillage 480×480



- Schéma AP, $\varepsilon = 0.005$, mesh 60×60



Résultats numériques : états stationnaires

- Validation de la propriété "well-balanced".
- Le vecteur de gravité est $\nabla\phi = (0, -1)$.
- Le premier cas test est donné par $\rho_j = 1$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ et $e_j = -\frac{1}{\gamma-1}(\mathbf{x}_j, \nabla\phi) + C$ avec C une constante.

Schemes	LP-AP			LP			
	40	80	160	40	80	160	
Cartésien	5.9 10^{-17}	\times 1×10^{-16}	7.1 10^{-17}	\times	0.00470	0.00239	0.00121
Aléatoire	1.1 10^{-16}	\times 1.5×10^{-16}	\times 3×10^{-16}		0.01519	0.00947	0.00526
Kershaw	1.4 10^{-16}	\times 2.2×10^{-16}	\times 3.2×10^{-16}	\times	0.08503	0.050	0.02908

- **Schéma classique** : converge avec $O(h)$.
- **Schéma AP** : **préserve exactement** les états stationnaires.

Résultats numériques : états stationnaires

- Validation de la propriété "well-balanced".
- Le vecteur de gravité est $\nabla\phi = (0, -1)$.
- Les conditions initiales pour le second cas est sont définies par $\rho_j(t, \mathbf{x}) = y + b$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ et $p_j(t, \mathbf{x}) = -(\frac{y^2}{2} + by) + C$.

Schemes	LP-AP			LP		
	80	160	320	80	160	320
Cartésien	2.3×10^{-15}	9.4×10^{-15}	3.4×10^{-14}	0.003407	0.00167	0.00008
Aléatoire	3.4×10^{-5}	1×10^{-5}	2.8×10^{-6}	0.00967	0.00529	0.00282
Kershaw	1.1×10^{-6}	1.8×10^{-7}	2.6×10^{-8}	0.03687	0.008363	0.00215

- **Schéma classique** : converge avec $O(h)$.
- **Schéma AP** : converge avec $O(h^2)$.

Schéma d'ordre très élevé localement autour de l'équilibre

- **But** : Conserver les propriétés classiques de stabilité des schéma d'ordre d'un et avoir une discrétisation d'ordre élevé autour des équilibres.
 - **Méthode** : construire des états stationnaires discrets d'ordre très élevé.
- État stationnaire discret : $p_{j+1} - p_j = -\Delta x_{j+\frac{1}{2}} (\rho \partial_x \phi)_{j+\frac{1}{2}}$ avec
 $(\rho \partial_x \phi)_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\rho_{j+1} + \rho_j)(\phi_{j+1} - \phi_j)$.
 - Pour commencer on considère l'état stationnaire suivant

$$\partial_x p = -\rho \partial_x \phi$$

- En intégrant sur la maille diamant $[x_j, x_{j+1}]$ on obtient

$$\Delta x_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \partial_x p(x) \right) = -\Delta x_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho(x) \partial_x \phi(x) \right).$$

Schéma d'ordre très élevé localement autour de l'équilibre

- **But** : Conserver les propriétés classiques de stabilité des schéma d'ordre d'un et avoir une discrétisation d'ordre élevé autour des équilibres.
 - **Méthode** : construire des états stationnaires discrets d'ordre très élevé.
- On introduit 3 polynômes $\bar{\rho}_{j+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=1}^q r_k x^k$ et $\bar{p}_{j+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=1}^{q+1} p_k x^k, \bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=1}^{q+1} \phi_k x^k$ avec

$$\int_{x_{l-\frac{1}{2}}}^{x_{l+\frac{1}{2}}} \bar{\rho}_{j+\frac{1}{2}}(x) = \Delta x_l \rho_l, \quad \int_{x_{l-\frac{1}{2}}}^{x_{l+\frac{1}{2}}} \bar{p}_{j+\frac{1}{2}}(x) = \Delta x_l p_l, \quad \int_{x_{l-\frac{1}{2}}}^{x_{l+\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}}(x) = \Delta x_l \phi_l$$

et $l \in S(j)$ ($S(j)$ est un sous ensemble de cellule autour de j). En utilisant ces polynômes on obtient les nouveaux états discrets

$$\Delta x_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \partial_x \bar{\rho}_{j+\frac{1}{2}}(x) \right) = -\Delta x_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{\rho}_{j+\frac{1}{2}}(x) \partial_x \bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}}(x) \right)$$

Schéma d'ordre très élevé localement autour de l'équilibre

- **But** : Conserver les propriétés classiques de stabilité des schéma d'ordre d'un et avoir une discrétisation d'ordre élevé autour des équilibres.
 - **Méthode** : construire des états stationnaires discrets d'ordre très élevé.
- Pour obtenir un schéma qui préserve les états discrets, il est nécessaire d'avoir les termes de pression liés à la diffusion numérique dans l'état discret.
- On obtient l'**état discret à l'ordre q** :

$$p_{j+1} - p_j = -\Delta x_{j+\frac{1}{2}} (\rho \partial_x \phi)_{j+\frac{1}{2}}^{HO}$$

with

$$(\rho g)_{j+\frac{1}{2}}^{HO} = \frac{1}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \left(\left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \partial_x \bar{p}_{j+\frac{1}{2}}(x) \right) + \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{p}_{j+\frac{1}{2}}(x) \partial_x \bar{\phi}_{j+\frac{1}{2}}(x) \right) - (p_{j+1} - p_j) \right)$$

Résultats numérique

- Cas test** : $\rho(t, x) = 3 + 2 \sin(2\pi x)$, $u(t, x) = 0$, $p(t, x) = 3 + 3 \sin(2\pi x) - \frac{1}{2} \cos(4\pi x)$ et $\phi(x) = -\sin(2\pi x)$. Maillage aléatoire.

Schemes	LR		LR-AP (2)		LR-AP (3)		LR-AP (4)	
cells	Err	q	Err	q	Err	q	Err	q
20	0.8335	-	0.0102	-	0.0079	-	0.0067	-
40	0.4010	1.05	0.0027	1.91	8.4E-4	3.23	1.5E-4	5.48
80	0.2065	0.96	7.0E-4	1.95	7.7E-5	3.45	4.1E-6	5.19
160	0.1014	1.02	1.7E-4	2.04	7.0E-6	3.46	1.0E-7	5.36

- Cas test** : $\rho(t, x) = e^{-gx}$, $u(t, x) = 0$, $p(t, x) = e^{-gx}$ et $\phi = gx$. Maillage aléatoire

Schemes	LR		LR-AP (2)		LR-AP (3)		LR-AP (4)	
cells	Err	q	Err	q	Err	q	Err	q
20	0.0280	-	6.5E-4	-	1.8E-5	-	8.0E-7	-
40	0.0152	0.88	1.4E-4	2.21	2.0E-6	3.17	3.8E-8	4.4
80	0.0072	1.08	3.3E-5	2.08	2.0E-7	3.32	2.0E-9	4.25
160	0.0038	0.92	8.8E-6	1.90	2.8E-8	2.84	1.1E-10	4.18

Passage en 2D : le schéma CENO

- **But** : Utilisation du schéma de volumes finis CENO d'ordre très élevé adapté pour les maillages non-structurés
- **Méthode** : Méthode hybride combinant la méthode des moindres carrés d'ordre élevé k-exact avec une méthode des moindres carrés perservant la monotonicité

Procédure :

- Reconstruction k-exacte sur chaque cellule

$$u_i^k(x, y) = \sum_{p_1=0}^{N_1} \sum_{p_2=0}^{N_2} (x - x_i)^{p_1} (y - y_i)^{p_2} C_{p_1 p_2} \quad (1)$$

où les coefficients $C_{p_1 p_2}$ sont les inconnus

- Évaluation de l'indicateur de régularité de la solution sur chaque cellule
- Reconstruction linéaire par morceaux si solution pas assez régulière

Transfert radiatif : modèle M_1

- Modèle aux moments en transfert radiatif : modèle M_1 .

$$\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \hat{P} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \end{cases}$$

- Énergie, \mathbf{F} le flux radiatif et $\hat{P} = \frac{1}{2}((1 - \chi(\mathbf{f}))Id + (3\chi(\mathbf{f}) - 1)\frac{\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|})E$ la pression.
- $\mathbf{f} = \|\mathbf{F}\|/E$ et $\chi(\mathbf{f}) = \frac{3+4\mathbf{f}^2}{5+2\sqrt{4-3\mathbf{f}^2}}$.

Propriétés :

- Limite de diffusion, $\varepsilon \rightarrow 0$: $\partial_t E - \operatorname{div}(\frac{1}{3\sigma} \nabla E) = 0$,
- Inégalité d'entropie : $\partial_t S + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{Q}) \geq 0$,
- Principe du maximum : $E > 0$, $\|\mathbf{f}\| < 1$.

Formulation comme un système de la dynamique du gaz

- On formule le modèle M_1 comme un système de la dynamique du gaz
 - pour utiliser un **schéma aux noeuds** Lagrange+projection pour obtenir un schéma limite consistant,
 - pour préserver le principe du maximum l'aide de l'inégalité d'entropie.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{F} + I_d q) = -\frac{\sigma}{\epsilon^2} \mathbf{F}, \\ \partial_t E + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(E\mathbf{u} + q\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t S + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(\mathbf{u}S) \geq 0, \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho\mathbf{v} + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + I_d q) = -\frac{\sigma}{\epsilon^2} \rho\mathbf{v} \\ \partial_t \rho e + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}e + q\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t \rho s + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}s) \geq 0, \end{array} \right.$$

- avec $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ le flux, $E = \rho e$ l'énergie et $S = \rho s$ l'entropie.
- $q = \frac{1-\chi}{2} E$, $\mathbf{u} = \frac{3\chi-1}{2} \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|^2}$ avec $\mathbf{f} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{e}$
- $\mathbf{F} = \mathbf{u}E + q\mathbf{u}$ $\hat{P} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{F} + q\hat{I}_d$.

Schéma et propriétés

● Propriétés :

- **Schéma AP** avec un schéma limite de diffusion d'ordre 1 (ou 2 avec MUSCL).
- Version semi-implicite stable indépendamment de ε .

Lemme : inégalité d'entropie $(E_j(t=0), \mathbf{F}_j(t=0)) \in \Omega = \{E > 0, \|\mathbf{f}\| < 1\}$ alors le schéma semi-discret est entropique :

$$\partial_t S_j(t) + \frac{1}{\varepsilon} ((\mathbf{u}_r, \mathbf{C}_{jr}) S_{jr}) \geq 0$$

et préserve le principe du maximum $\forall t > 0$.

- Par le théorème de Cauchy on sait que la solution $(E_j(t), \mathbf{F}_j(t)) \in \Omega$ sur $[0, T[$.
- On commence par montrer que le schéma est entropique si $\hat{\beta}_{jr}$ est positif.
- En montrant que \mathbf{u}_r est bornée et $S = \frac{E^{3/4}(1-\|\mathbf{u}\|^2)}{(3+\|\mathbf{u}\|^2)^2}$ est minorée sur $[0, T[$, on obtient que E et $(1 - \|\mathbf{u}\|^2)$ sont positifs et bornés sur $[0, T[$.
- En utilisant des résultats classiques des systèmes dynamiques on obtient le résultat $\forall T > 0$.

Résultats pour modèle M_1

- **Cas test de diffusion** : Les données sont $E(0, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$ avec $G(\mathbf{x})$ une Gaussienne $F(0, \mathbf{x}) = 0$ (cas M_1) et $\sigma = 1$.

schémas	NL		VF5		Linear		M_1	
Maillages	ordre	$E_j > 0$	ordre	$E_j > 0$	ordre	$E_j > 0$	ordre	$E_j > 0$
Cartésien	1.9	oui	2	oui	2	oui	2.0	oui
Aléa. quad	1.9	oui	0.3	oui	1.98	non	2.	oui
Aléa. tri.	2.15	oui	1.	oui	1.32	non	1.9	oui
Kershaw	1.9	oui	0	oui	2	non	1.9	oui

- NL : Schéma limite du schéma pour M_1 . M_1 : schéma AP pour M_1 avec $\varepsilon = 10^{-3}$.
- **Principe du maximum** : Les données sont $\sigma = 0$, $E(0, \mathbf{x}) = F_x(0, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{[0.4:0.6]^2}$ et $F_y(0, \mathbf{x}) = 0$. La solution est $E(t, \mathbf{x}) = F_x(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}_{[0.4+t:0.6+t]^2}$ and $F_y(t, \mathbf{x}) = 0$.

Maillages	ordre	$E_j > 0$	$\ \mathbf{f}_j \ < 1$
Cartésien	0.5	oui	oui
Aléa. quad	0.5	oui	oui
Kershaw	0.49	oui	oui

Conclusion et perspectives

● Conclusion

- **Modèle P_1** : Schéma AP sur maillages non structurés avec une stabilité indépendante de ε .
- **Modèle P_1** : Convergence uniforme sur maillages non structurés pour le schéma semi-discret.
- Schémas AP pour des systèmes linéaires généraux avec des termes sources (modèles P_N, S_N) en utilisant une décomposition type "micro-macro".
- **Modèles non linéaires** : Schéma AP avec principe du maximum pour le modèle M_1 . Schéma AP et WB pour les équations d'Euler.
- **Tous les modèles** : Modes parasites dans certains cas (exemple : maillages Cartésien + Dirac comme donnée initiale).

● Possible futures travaux

- Analyse théorique pour le modèle P_1 : stabilité (CFL) et estimation en temps de convergence.
- Analyse du schéma AP pour Euler : Stabilité non linéaire, inégalité d'entropie.
- Trouver une méthode générique pour stabiliser les schémas aux noeuds.

Merci

Merci pour votre attention