

Préconditionnement et solveurs non linéaires en temps pour le code de MHD Jorek

E. Franck, M. Hölzl, E. Sonnendrücker

Institut Max Planck de Physique des Plasmas , Garching, Allemagne

Séminaire, Université de Nice, 20 Mars 2014

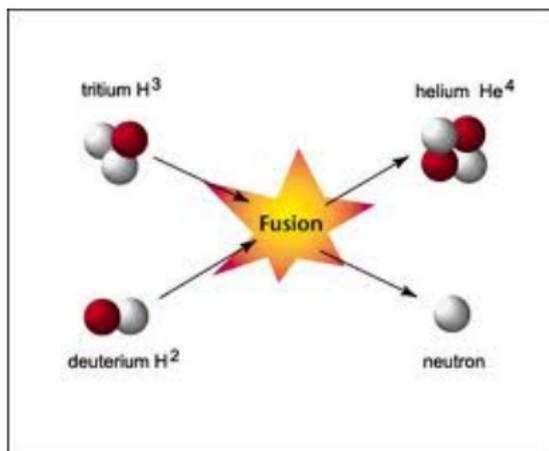
Plan

- 1 Contexte physique et mathématique
- 2 Solveurs non linéaires en temps
- 3 Préconditionneur physique

Contexte physique et mathématique

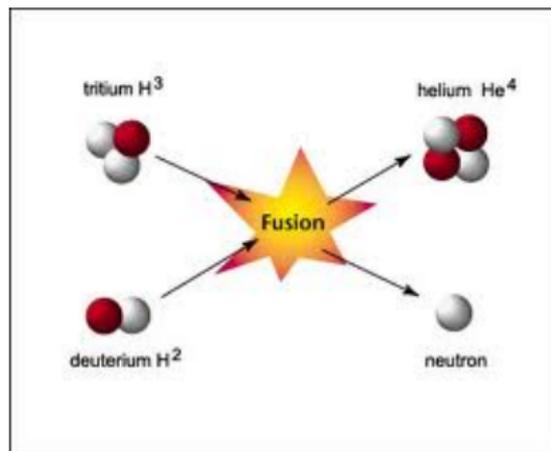
Iter

- **Fusion DT** : Réaction entre du Deuterium et du tritium qui produit de l'énergie de l'hélium. Le deuterium et le tritium forme un plasma (gaz ionisé).



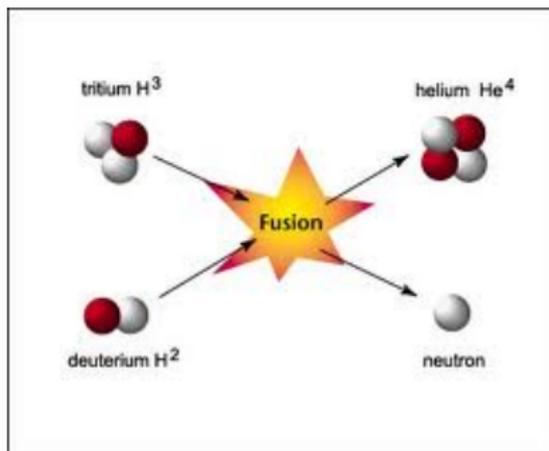
Iter

- **Fusion DT** : Réaction entre du Deuterium et du tritium qui produit de l'énergie de l'hélium. Le deuterium et le tritium forme un plasma (gaz ionisé).
- **ITER** : Projet international pour démontrer la faisabilité de la fusion contrôlée comme source d'énergie.



Iter

- **Fusion DT** : Réaction entre du Deuterium et du tritium qui produit de l'énergie de l'hélium. Le deuterium et le tritium forme un plasma (gaz ionisé).
- **ITER** : Projet international pour démontrer la faisabilité de la fusion contrôlée comme source d'énergie.
- **Confinement magnétique** : Le plasma utilisé lors de la réaction est confiné dans le centre du réacteur (tokamak) en utilisant des champs magnétiques.



Iter

- **Fusion DT** : Réaction entre du Deuterium et du tritium qui produit de l'énergie de l'hélium. Le deuterium et le tritium forme un plasma (gaz ionisé).
- **ITER** : Projet international pour démontrer la faisabilité de la fusion contrôlée comme source d'énergie.
- **Confinement magnétique** : Le plasma utilisé lors de la réaction est confiné dans le centre du réacteur (tokamak) en utilisant des champs magnétiques.
- **Tokamak** : Chambre toroïdale utilisée pour confiner le plasma.

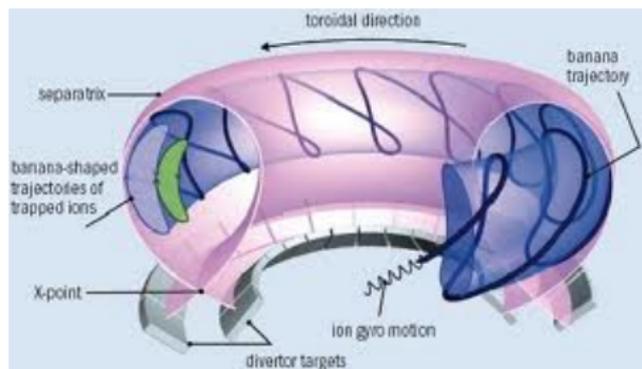


Figure : Tokamak

Modèles pour ITER

- La dynamique des plasmas dans ITER est un problème multi-échelle complexe.
- On a différents modèles pour différentes échelles temporelle et spatiale :
- **Équation cinétique de Vlasov-Maxwell** elle est pas directement résolue dans les codes actuellement.
- **Approximation Gyrocinétique** de l'équation Vlasov-Maxwell utilisée pour la turbulence de coeur.
- **Modèles fluides de MHD** (MHD résistive , MHD bi-température etc) utilisés pour simuler les instabilités de bords.

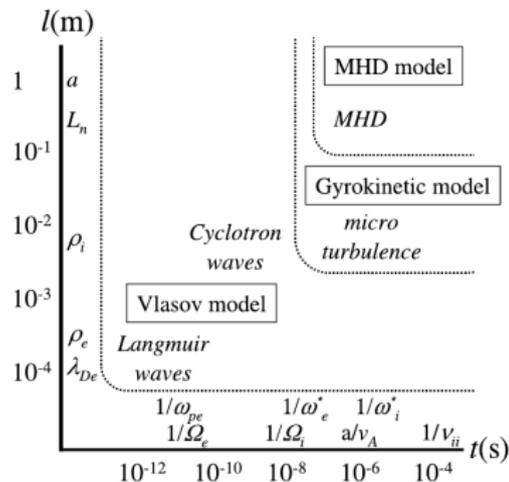


Figure : Echelles spatiale et temporelle

ELMs et instabilités

- Les "edge-localized modes" ("ELM's") sont des instabilités qui apparaissent dans la région du bord du plasma.
- Le développement des ELM's pose un important problème pour la fusion magnétique. Ces instabilités peuvent détériorer les composants des parois à cause du très grand transfert d'énergie.
- **But** : simuler les ELM's pour estimer leurs amplitudes et comprendre comment les contrôler.
- **Modèles mathématiques** : MHD resistive, MHD bi-température

- *MHD stability in X-point Geometry : simulation of ELMs*, G. Huysmans, O. Czarny, Nuclear fusion, 2007.
- *Reduced magnetohydrodynamic simulation of toroidally and poloidally localized edge localized modes*, M. Hölzl et co-auteurs, Phys. of Plasmas, 2012.

MHD resistive

- La MHD resistive complète est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (D_{\parallel} \nabla_{\parallel} \rho + D_{\perp} \nabla_{\perp} \rho) + S_p \\ \rho \partial_t \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla (\rho T) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \rho \partial_t T + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) \rho T \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (K_{\parallel} \nabla_{\parallel} T + K_{\perp} \nabla_{\perp} T) + S_h \\ \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla \times \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

avec ρ la densité, \mathbf{v} la vitesse, T la température, \mathbf{B} le champ magnétique et $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ le courant.

- les termes D_{\parallel} , D_{\perp} , K_{\parallel} , K_{\perp} sont des opérateurs de diffusion anisotrope.
- Termes sources : S_h correspond à une source de chaleur, S_p correspond à une source de particule.

Références sur la MHD réduite

Dérivation asymptotique

- *Reduced MHD in nearly potential magnetic fields*, H. R. Strauss, Phys. of Plasmas, 1997
- *Generalized reduced MHD equations*, S. E. Kruger, C. C. Hegna, J. D. Callen, Phys. of Plasmas, 1998

Dérivation exacte pour un profil de densité général et $\beta \ll 1$

- *Reduced Resistive MHD in tokamaks with general density*, B. Després, R. Sart, ESAIM , 2012.
- *Navier Stokes hierarchies of reduced MHD models in tokamak geometry*, B. Després, R. Sart, preprint

Dérivation des modèles (projections différentes)

- *Modélisations fluides pour les plasmas de fusion : approximation par éléments finis C_1 de Bell*, Marie Martin, 2013.

MHD réduite : hypothèses et principe de dérivation

- On considère les coordonnées cylindriques $(R, Z, \phi) \in \Omega \times [0, 2\pi]$.
- (R, Z) correspond au plan poloidal et ϕ à la direction toroïdale.

MHD réduites : hypothèses

$$\mathbf{B} = \frac{F_0}{R} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{v} = -R \nabla u \times \mathbf{e}_\phi + v_{||} \mathbf{B}$$

avec u le potentiel électrique et ψ le flux magnétique poloidal.

- Pour la MHD réduite les quantités sont ρ , T , ψ , u , $v_{||}$ la vitesse parallèle, w la vorticité et z_j le courant toroïdal.
- Dérivation : on incorpore \mathbf{B} et \mathbf{v} dans les équations + simplifications. Pour les équations sur u et $v_{||}$ on utilise les projections suivantes

$$\mathbf{e}_\phi \cdot \nabla \times R^2 (\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla(\rho T)) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

et

$$\mathbf{B} \cdot (\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla(\rho T)) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

MHD réduite : dérivation

- Exemple de dérivation : équation d'induction

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla \times \mathbf{J} \implies \nabla \times \left(\partial_t \left(\frac{1}{R} \psi \mathbf{e}_\phi \right) \right) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J})$$

on obtient

$$\partial_t \left(\frac{1}{R} \psi \mathbf{e}_\phi \right) = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J} + \nabla V$$

avec V un potentiel. Après quelques calculs on obtient

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = F_0 (\partial_Z u \mathbf{e}_Z + \partial_R u \mathbf{e}_R) + [\psi, u] \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{R} \Delta^* \psi \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R} \partial_\phi (\partial_Z \psi) \mathbf{e}_Z + \frac{1}{R} \partial_\phi (\partial_R \psi) \mathbf{e}_R$$

- On multiplie l'équation par \mathbf{e}_ϕ et on prend $\nabla V \mathbf{e}_\phi = -\frac{F_0}{R} \partial_\phi u$. On obtient

$$\partial_t \psi = R[\psi, u] + \eta \Delta^* \psi - F_0 \partial_\phi u$$

MHD réduite : dérivation

- En procédant de la même façon pour toutes les équations on obtient les modèles de MHD réduite
- Quelques remarques sur la dérivation :
 - On introduit la vorticité et le courant toroïdal afin de limiter l'apparition d'opérateurs d'ordre élevé.
 - Vorticité : $w = \Delta_{pol} u = \nabla \cdot (\nabla_{pol} u)$
 - Courant toroïdal : $z_j = \Delta^* \psi = R^2 \nabla \cdot (\frac{1}{R^2} \nabla_{pol} \psi)$
- Remarque : **pour le modèle avec vitesse parallèle des termes ont été négligés dans le code par rapport au modèle dérivé rigoureusement.**
- il s'agit des termes liés au fait que la vitesse poloïdale qui dérive du potentiel u et la vitesse parallèle ne sont pas perpendiculaires.

Dérivation et stabilité en énergie des modèles dans le cadre de Jorek

- *Theoretical and numerical stability for the reduced MHD models in Jorek code*, E. Franck, M. Hölzl, E. Sonnendrücker, en cours de rédaction

Exemple de modèle

- Exemple de modèle : cas sans vitesse parallèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi = R[\psi, u] - F_0 \partial_\phi u + \eta(T)(z_j - S_c(\psi)) - \eta_n \nabla \cdot (\nabla_{pol} z_j) \\ R \nabla \cdot (\hat{\rho} \nabla_{pol}(\partial_t u)) = \frac{1}{2} [R^2 \|\nabla u\|^2, \hat{\rho}] + [R^2 \hat{\rho} w, u] + [\psi, z_j] - \frac{F_0}{R} \partial_\phi z_j - [R^2, \rho] \\ \quad + R \nabla \cdot (\nu(T) \nabla_{pol} w) - \nu_n \nabla \cdot (\nabla_{pol} w) \\ \frac{1}{R^2} z_j - \nabla \cdot \left(\frac{1}{R^2} \nabla_{pol} \psi \right) \\ w - \nabla \cdot (\nabla_{pol} u) \\ \partial_t \rho = R[\rho, u] + 2\rho \partial_z u + \nabla \cdot (D_{||} \nabla_{||} \rho + D_{\perp} \nabla_{\perp} \rho) + S_p(\psi) \\ \partial_t T = R[T, u] + 2(\gamma - 1) T \partial_z u + \nabla \cdot (K_{||} \nabla_{||} T + K_{\perp} \nabla_{\perp} T) + S_h(\psi) \end{array} \right.$$

with $\hat{\rho} = R^2 \rho$.

- $\eta(T)$ et η_n sont les coefficients de résistivité physique et numérique. $\nu(T)$ et ν_n les coefficients de viscosité.

Résultats de stabilité

- Modèles bien posés : conservation ou dissipation de l'énergie totale

Modèle sans vitesse parallèle

On suppose que les conditions limites sont correctement choisis. Les champs sont définis par $\mathbf{B} = \frac{F_0}{R} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi$ et $\mathbf{v} = -R \nabla u \times \mathbf{e}_\phi$.

on obtient l'estimation d'énergie suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla_{pol} \psi|^2}{2R^2} + \hat{\rho} \frac{|\nabla_{pol} u|^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} p \right) = - \int_{\Omega} \eta(T) \frac{|\Delta^* \psi|^2}{R^2} - \int_{\Omega} \nu |\Delta_{pol} u|^2$$

avec $E = \frac{|\nabla_{pol} \psi|^2}{2R^2} + \hat{\rho} \frac{|\nabla_{pol} u|^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} p$ l'énergie totale.

- Si $\eta = \nu = 0$ l'énergie totale est conservée.

Résultat de stabilité II

- Modèles bien posés : conservation ou dissipation de l'énergie totale

Modèle avec vitesse parallèle

On suppose que les conditions sont correctement choisis. Les champs sont définis par $\mathbf{B} = \frac{F_0}{R} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi$ et $\mathbf{v} = -R \nabla u \times \mathbf{e}_\phi + v_{||} \mathbf{B}$.

On obtient l'estimation d'énergie suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{2} + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} p \right) = - \int_{\Omega} \eta(T) \frac{|\Delta^* \psi|^2}{R^2} - \int_{\Omega} \nu |\Delta_{pol} u|^2$$

avec $E = \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} p$ l'énergie totale.

- Si $\eta = \nu = 0$ l'énergie totale est conservée.
- Remarque : Le modèle avec vitesse parallèle implémenté n'est pas a priori conservatif en énergie (cas $\eta = \nu = 0$) à cause des termes négligés.

Description du code Jorek I

- Jorek : code en Fortran 90 (autour de 90 000 lignes) + MPI et OpenMP + librairies d'algèbre linéaire (Pastix, MUMPS ...)
- Initialisation
- Construction de la première grille :
 - On définit les frontières du domaine de calcul
 - On crée une première grille poloïdale pour construire la grille alignée
 - On calcule $\psi(R, Z)$ sur cette grille.
- Construction de l'équilibre
 - Résolution de l'équation de Grad-Shafranov

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -R^2 \frac{\partial p}{\partial \psi} - F \frac{\partial F}{\partial \psi}$$

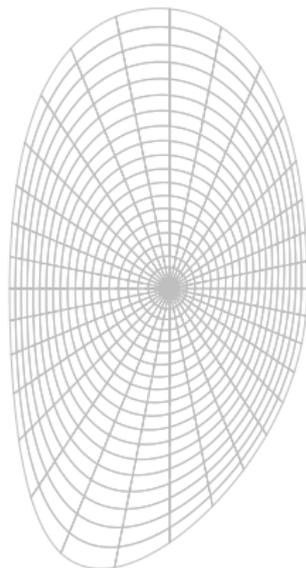


Figure : Grille poloïdale

Description du code Jorek II

- Construction de la grille alignée
 - On identifie les surfaces de flux magnétique
 - On crée une grille alignée avec les surfaces magnétiques (avec x-point)
 - On interpole $\psi(R, Z)$ sur la nouvelle grille.
- Calcul de l'équilibre sur la nouvelle grille.
- Boucle en temps
 - Construction de la matrice des profils (tenseurs de diffusion, termes sources)
 - Résolution du système linéaire
 - Mise à jours des solutions
 - Trace des énergies cinétiques et magnétiques et création des fichiers.

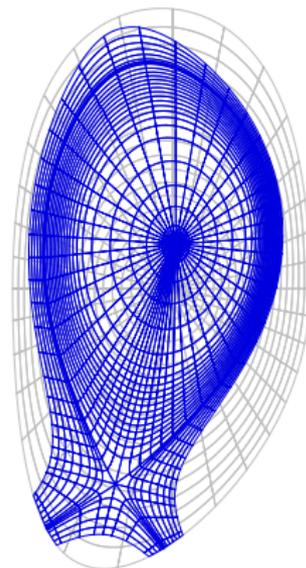


Figure : Grille alignée

Discrétisation spatiale

- Les équations dans le **plan poloïdal** sont discrétisées avec des éléments finis.
- Pour la **direction toroïdale** : développement de Fourier.
- **Fonctions de base** : éléments cubiques de Bezier
 - Généralisation des éléments d'Hermite cubiques.
 - Ces éléments permettent d'utiliser un raffinement local dans chaque élément essentiel pour le raffinement adaptatif.
 - 4 degrés de liberté par noeud.
 - La formulation isoparamétrique (on peut discrétiser (R, Z) avec les éléments de Bezier) les éléments finis peuvent être alignés avec les surfaces d'équilibre.
 - Les éléments cubique permettent d'assurer une reconstruction polynomiale C^1 .

Contrainte involutive

- La formulation potentiel du champ magnétique permet d'assurer $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

- *Bezier surfaces and finite elements for MHD simulations*, O. Czarny, G. Huysmans, JCP 2008.

Schéma en temps pour le code Jorek

- On écrit le modèle sous la forme $A(\partial_t \mathbf{U}) = B(\mathbf{U}, t)$
- On utilise le schéma en temps de **Crank Nicholson** ou le **schéma BDF2** :

$$(1 + \zeta)A(\mathbf{U}^{n+1}) - (1 + 2\zeta)A(\mathbf{U}^n) + \zeta A(\mathbf{U}^{n-1}) = \theta \Delta t B(\mathbf{U}^{n+1}) + (1 - \theta) \Delta t B(\mathbf{U}^n)$$

- En définissant $G(\mathbf{U}) = (1 + \zeta)A(\mathbf{U}) - \theta \Delta t B(\mathbf{U})$ et

$$b(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n-1}) = (1 + 2\zeta)A(\mathbf{U}^n) - \zeta A(\mathbf{U}^{n-1}) + (1 - \theta) \Delta t B(\mathbf{U}^n)$$

on obtient le problème non linéaire

$$G(\mathbf{U}^{n+1}) = b(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n-1})$$

- Linéarisation du premier ordre**

$$\left(\frac{\partial G(\mathbf{U}^n)}{\partial \mathbf{U}^n} \right) \delta \mathbf{U}^n = R(\mathbf{U}^n) = -G(\mathbf{U}^n) + b(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n-1})$$

avec $\delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$ et $J_n = \frac{\partial G(\mathbf{U}^n)}{\partial \mathbf{U}^n}$ la matrice Jacobienne de $G(\mathbf{U}^n)$.

Solveurs pour le code Jorek

- Solveurs linéaires dans Jorek : Préconditionnement à gauche + solveur itératif GMRES .
- Principe de preconditionnement :
 - On remplace le problème $J_n \delta \mathbf{U}_n = R(\mathbf{U}^n)$ par $P_n (P_n^{-1} J_n) \delta \mathbf{U}_n = R(\mathbf{U}^n)$.
 - On résout le système en deux étapes $P_n \delta \mathbf{U}_n^* = R(\mathbf{U}^n)$ et $(P_n^{-1} J_n) \delta \mathbf{U}_n = \delta \mathbf{U}_n^*$
- Si P_n est plus facile à inverser que J_n et si $P_n \approx J_n$ le solveur linéaire devient plus robuste et efficient.
- Construction et inversion de P_n
 - P_n : matrice diagonale par bloc ou les sous matrices sont associées à chaque mode de Fourier.
 - Inversion de P_n : On factorise et inverse exactement chaque sous système (avec Pastix).
- Le preconditionnement est basé sur l'hypothèse que **le couplage entre les modes de Fourier est faible**.
- En pratique dans beaucoup de cas ce couplage est fortement non linéaire.

Problème de convergence dans le code Jorek

Problème :

- Pour plusieurs cas tests la méthode de GMRES ne converge pas dans la phase non linéaire pour des petits pas de temps.
- Pourquoi ?
 - Le préconditionnement n'est pas assez efficace ou le solveur en temps n'est pas suffisamment robuste ?
 - Les discrétisations spatiale ou temporelle ne sont pas adaptés ? Problème au positivité ?
 - Le maillage n'est pas adapté ? La reconstruction polynomial n'est pas C^1 au point X (singularité du maillage).
 - Les modèles ne sont pas stables (termes négligés) ?

Solveurs non linéaires en temps

Méthode Newton inexacte

- Au temps n , on calcule $b(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n-1})$, $G(\mathbf{U}^n)$
- On choisit $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}^n$ et ε_0 .
- Itération k de la procédure de Newton :
 - On calcule $R(\mathbf{U}_k)$ et $\left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{U}_k}\right)$
 - On résout le problème linéaire avec la méthode GMRES

$$\left(\frac{\partial G(\mathbf{U}_k)}{\partial \mathbf{U}_k}\right) \delta \mathbf{U}_k = R(\mathbf{U}_k) = b(\mathbf{U}^n, \mathbf{U}^{n-1}) - G(\mathbf{U}_k)$$

et le critère de convergence suivante

$$\frac{\left\| \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{U}_k}\right) \delta \mathbf{U}_k + R(\mathbf{U}_k) \right\|}{\|R(\mathbf{U}_k)\|} \leq \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \gamma \left(\frac{\|R(\mathbf{U}_k)\|}{\|R(\mathbf{U}_{k-1})\|} \right)^\alpha$$

- On calcule la nouvelle solution $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \delta \mathbf{U}_k$.
- On applique le critère de convergence $\|R(\mathbf{U}_k)\| < \varepsilon_a + \varepsilon_r \|R(\mathbf{U}^n)\|$
- Si la méthode de Newton converge on obtient $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}_{k+1}$.

Remarques sur les solveurs non linéaires

- Remarques sur la méthode de Newton
 - Pour la convergence de la méthode de Newton il n'est pas nécessaire de résoudre chaque problème linéaire avec une grande précision.
 - La procédure de Newton inexacte **minimise le nombre d'itération GMRES** pour chaque itération de Newton.
- Pas de temps adaptatif
 - Pour les très grand pas de temps les méthodes GMRES (mauvais conditionnement) et Newton (données initiales mauvaises) ne converge pas.
 - Pour utiliser des très grands pas de temps dans la phase linéaire on utilise un pas de temps adaptatif.
 - Si les méthodes convergent vite on utilise $\Delta t_{new} = \alpha \Delta t$ pour l'itération suivante ($\alpha > 1$).
 - Si les méthodes convergent lentement on utilise $\Delta t_{new} = \beta \Delta t$ pour l'itération suivante ($\beta < 1$).
 - Si les méthodes ne convergent pas on utilise $\Delta t_{new} = \gamma \Delta t$ et on recommence l'itération ($\gamma < 1$).

1er cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Premier cas test : configuration d'équilibre simplifié pour le réacteur JET avec Point X.
- Résistivité et viscosité physique : $\eta(T) = \nu(T) = 1 \times 10^{-6} T^{-\frac{5}{2}}$.
- Méthode de linéarisation : $\varepsilon = 10^{-8}$ avec $\Delta t = 40$.
- Méthode de Newton : $\varepsilon_a = 10^{-5}$ avec $\Delta t = 40$.
- **Résultats pour 20 pas de temps qui correspond à la phase de saturation non linéaire.**
- Résultats pour la méthode de linéarisation :

Gmres iter.	Precon .	temps
62	0.8	60

- Résultats pour la méthode de Newton exacte :

Gmres iter.	Precon .	Newton iter.	Total Gmres iter.	temps
42.6	1.9	3.6	156	147

- Résultats pour la méthode de Newton inexacte :

Gmres iter.	Precon .	Newton iter.	Total Gmres iter.	temps
9.5	1	6.7	66	112

1er cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Trace des énergies pour le cas test précédent

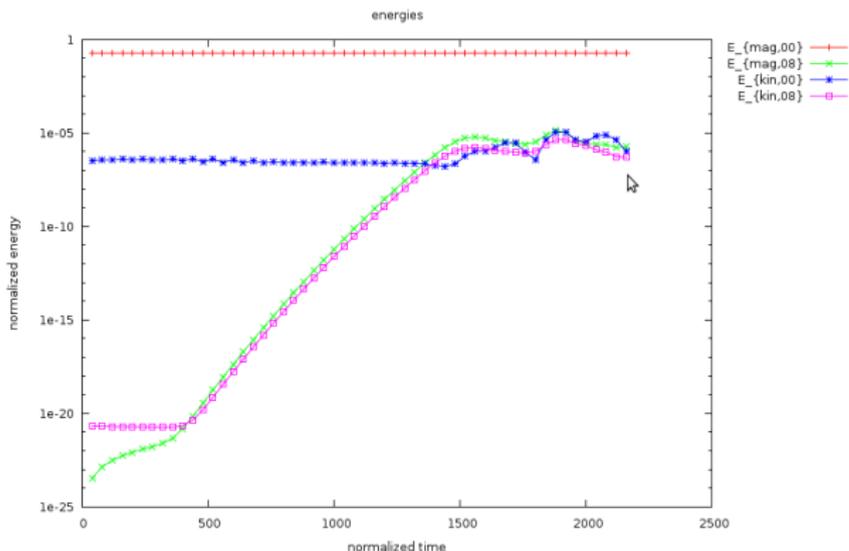


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de linéarisation. $\Delta t = 40$

1er cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Trace des énergies pour le cas test précédent

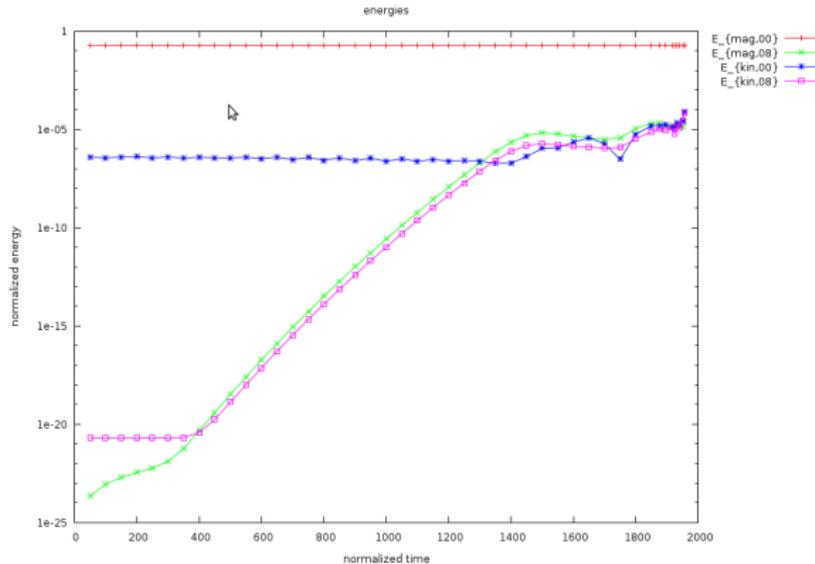


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de linéarisation. $\Delta t = 50$

1er cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Trace des énergies pour le cas test précédent

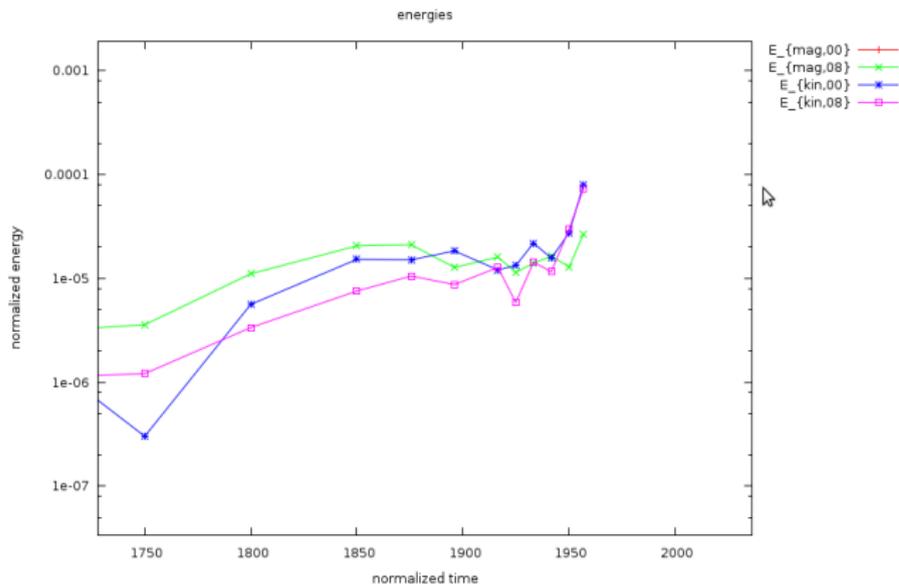


Figure : Zoom sur l'instabilité des énergies magnétique et cinétique. Méthode de linéarisation. $\Delta t = 50$

1er cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Trace des énergies pour le cas test précédent

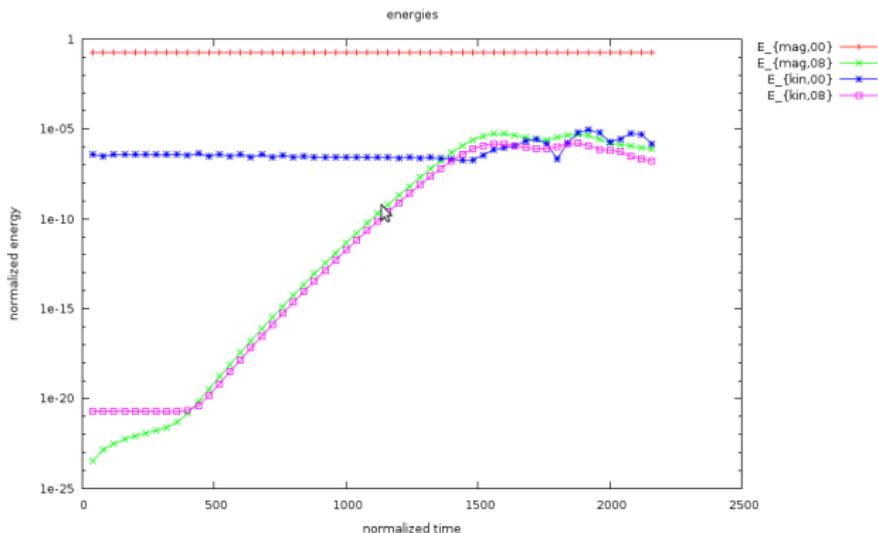


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de Newton inexacte. $\Delta t = 40$

1er cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Trace des énergies pour le cas test précédent

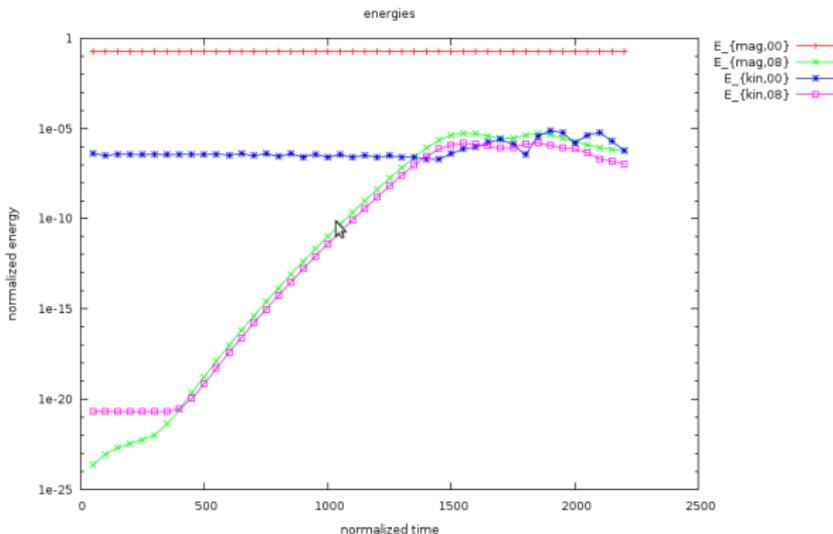


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de Newton inexacte. $\Delta t = 50$

1er cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Trace des énergies pour le cas test précédent

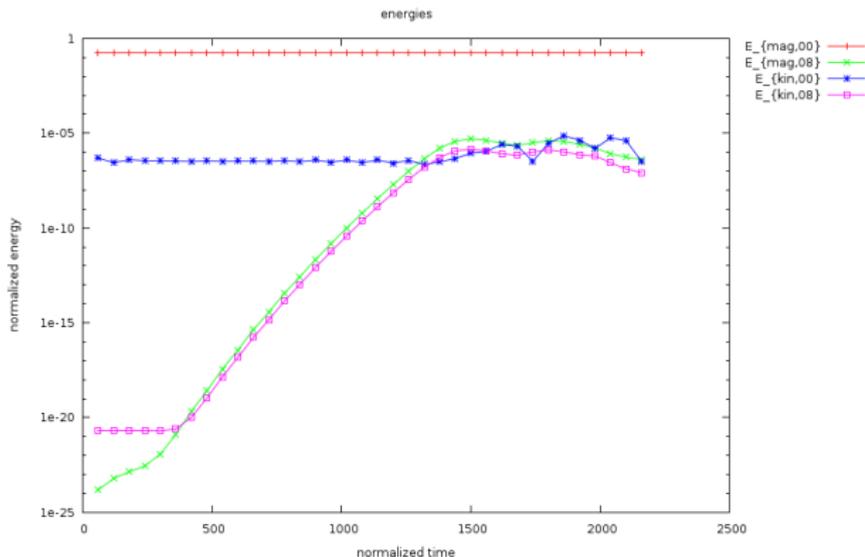


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de Newton inexacte. $\Delta t = 60$

Second cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Second cas test : configuration réaliste d'un d'équilibre pour la machine ASDEX Upgrade avec une grande résistivité (non réaliste) qui génère des instabilités très violentes.
- Trace des énergies pour le second cas test.

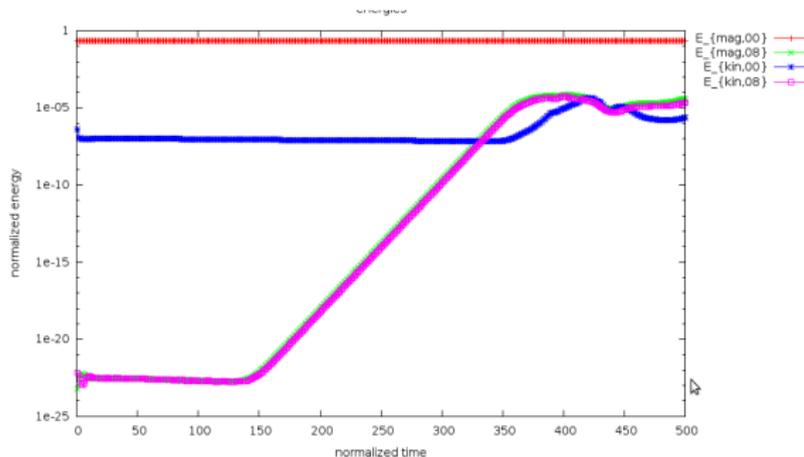


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de linéarisation. $\Delta t = 1$

Second cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Second cas test : configuration réaliste d'un d'équilibre pour la machine ASDEX Upgrade avec une grande résistivité (non réaliste) qui génère des instabilités très violentes.
- Trace des énergies pour le second cas test.

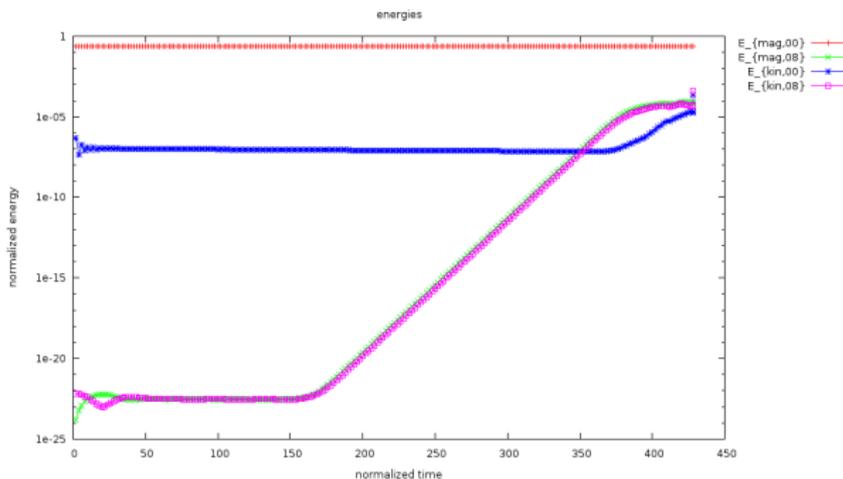


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de linéarisation. $\Delta t = 2$

Second cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Second cas test : configuration réaliste d'un d'équilibre pour la machine ASDEX Upgrade avec une grande résistivité (non réaliste) qui génère des instabilités très violentes.
- Trace des énergies pour le second cas test.

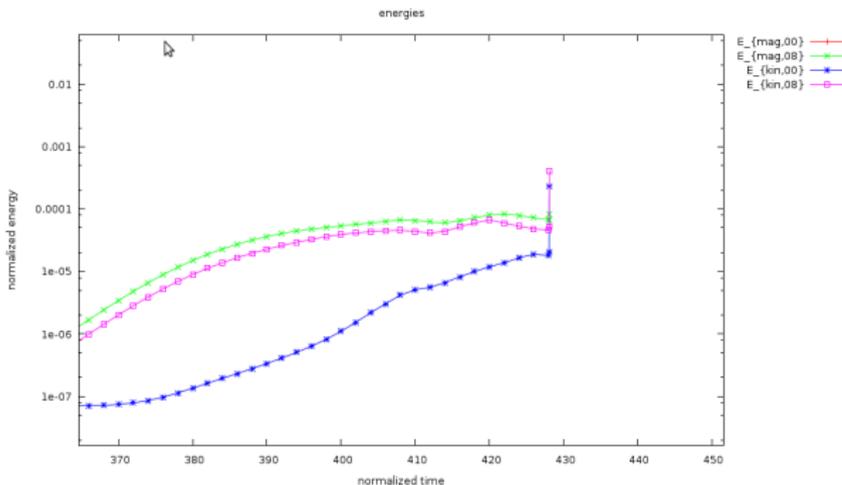


Figure : Zoom sur l'instabilité des énergies magnétique et cinétique. Méthode de linéarisation. $\Delta t = 2$

Second cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Second cas test : configuration réaliste d'un d'équilibre pour la machine ASDEX Upgrade avec une grande résistivité (non réaliste) qui génère des instabilités très violentes.
- Trace des énergies pour le second cas test.

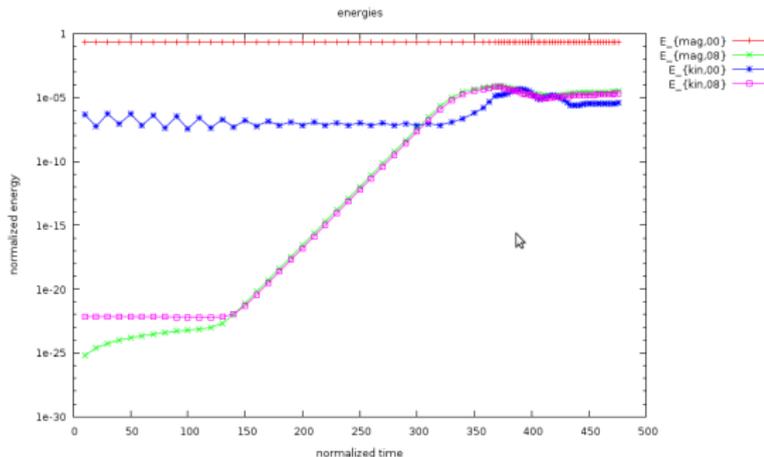


Figure : Evolution des énergies magnétique et cinétique. Méthode de Newton inexacte. $\Delta t = 10$

Second cas test : modèle sans vitesse parallèle

- Second cas test : configuration réaliste d'un d'équilibre pour la machine ASDEX Upgrade avec une grande résistivité (non réaliste) qui génère des instabilités très violentes.
- Trace des énergies pour le second cas test.

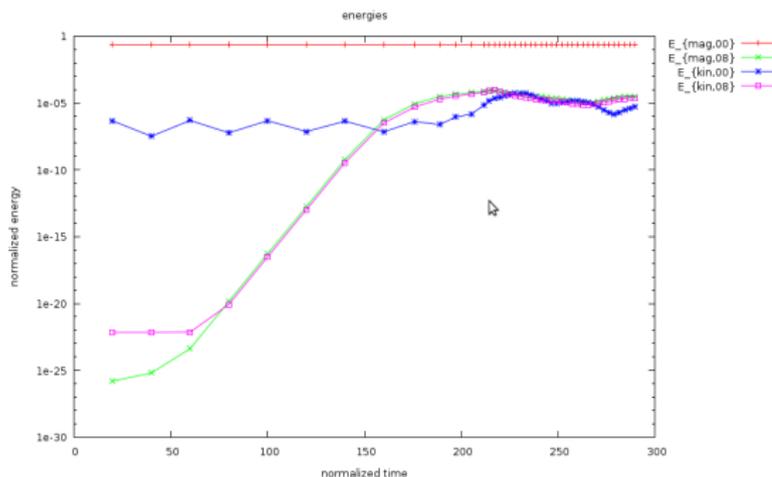


Figure : Zoom sur l'instabilité des énergies magnétique et cinétique. Méthode de Newton inexacte. $\Delta t = 20$

3ème cas test : modèle avec vitesse parallèle sans les termes négligés

- Configuration d'équilibre simplifié pour le réacteur JET avec Point X.
- Résistivité et viscosité physique : $\eta(T) = \nu(T) = 1 \times 10^{-6} T^{-\frac{5}{2}}$.
- Pas de temps : $\Delta t = 20$.
- Résultats pour 40 pas de temps qui correspond à la phase de saturation non linéaire.

- Résultats pour la méthode de linéarisation :

Gmres iter.	Precon .	temps
42	0.925	84

- Résultats pour la méthode de Newton inexacte :

Gmres iter.	Precon .	Newton iter.	Total Gmres iter.	temps
6.45	1	6.65	42.8	152

- Comme précédemment la méthode de Newton converge avec des pas de temps plus grand.

3ème cas test : modèle avec vitesse parallèle avec les termes négligés

- Configuration d'équilibre simplifié pour le réacteur JET avec Point X.
- Résistivité et viscosité physique : $\eta(T) = \nu(T) = 1 \times 10^{-6} T^{-\frac{5}{2}}$.
- Pas de temps : $\Delta t = 20$.
- Résultats pour 40 pas de temps qui correspond à la phase de saturation non linéaire.
- Résultats pour la méthode de linéarisation :

Gmres iter.	Precon .	temps
32	0.625	64

- Résultats pour la méthode de Newton inexacte :

Gmres iter.	Precon .	Newton iter.	Total Gmres iter.	temps
5.4	1	6.55	36	147

- Comme précédemment la méthode de Newton converge avec des pas de temps plus grand.
- Les termes négligés semblent jouer un rôle dans la seconde partie de la phase non linéaire. Il faudrait étudier ces effets pour des cas test plus compliqués.

Conclusion sur les solveurs non linéaires

- Linéarisation d'ordre un :
 - Une résolution peu précise de problème non linéaire peut générer des instabilités numériques et empêcher le schéma de capturer correctement le début de la phase saturation.
 - Une fois l'instabilité commencée, le pas temps adaptatif ne suffit pas pour converger.
- Méthode de Newton :
 - Surcoût par rapport à la méthode de linéarisation (entre $\times 3$ et $\times 4$ dans la phase linéaire, entre $\times 1.5$ et $\times 2$ dans la phase non linéaire)
 - Surcoût dans la phase non linéaire vient de la construction des matrices. Peut être réduit avec une méthode "Jacobian-Free" ou avec beaucoup de processus MPI.
 - Permet de mieux capturer la phase de saturation pour des grand pas de temps.
 - La méthode de newton ne converge pas en cas d'instabilité numérique. Le pas de temps adaptatif devient efficient.
- La méthode de Newton couplée avec un pas de temps adaptatif est plus robuste que la linéarisation d'ordre un pour un surcoût acceptable, elle permet d'éviter la non convergence et permet d'utiliser des pas de temps plus grand.

Préconditionneur physique

Préconditionnement I

Préconditionneur physique

- *An optimal, parallel fully implicit Newton-Krylov solver for 3D viscoresistive Magnetohydrodynamics*, L. Chacon, Phys. of plasma, 2008.
- *Scalable parallel implicit solvers for 3D magnetohydrodynamics*, L. Chacon, Journal of Phys. 2009.
- **Préconditionneur à droite** : on résout $J_k P_k^{-1} P_k = R(\mathbf{U}_k)$.
- **But** : Trouver P_k facile à inverser tel que $P_k \approx J_k^{-1}$.
- **Idée** : Splitting d'opérateur + formulation parabolique de la MHD + méthodes multigrilles.
- Exemple
$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x v \\ \partial_t v = \partial_x u \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_x v^{n+1} \\ v^{n+1} = v^n + \Delta t \partial_x u^{n+1} \end{cases}$$
- On obtient $(1 - \Delta t^2 \partial_{xx}) u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_x v^n$.
- **La matrice associée $(1 - \Delta t^2 \partial_{xx})$ est à diagonale dominante et bien conditionnée.**

Préconditionnement II

- Pour appliquer facilement la méthode pour des problèmes compliqués on utilise une autre formulation de la méthode.
- On assume que la matrice associée au précédent système linéaire précédent s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} D_1 & U \\ L & D_2 \end{pmatrix}$$

- En utilisant une décomposition de Schur

$$\begin{pmatrix} D_1 & U \\ L & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & UD_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{schur} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_2^{-1}L & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -\Delta t \partial_x \\ -\Delta t \partial_x & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\Delta t \partial_x \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{schur} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Delta t \partial_x & I \end{pmatrix}$$

- Les première et dernière matrices sont triangulaires donc facile à inverser.
- $P_{schur} = D_1 - UD_2^{-1}L = (1 - \Delta t^2 \partial_{xx})$ est bien conditionné.

Préconditionnement : Exemple simple $\beta \ll 1$

- On suppose que $\rho = \frac{1}{R^2}$, $\mathbf{B} = \frac{F_0}{R} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{R} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi$ and $\mathbf{v} = -R \nabla u \times \mathbf{e}_\phi$
- Le modèle est obtenu

$$\begin{cases} \partial_t \psi = R[\psi, u] + \eta \Delta^* \psi - F_0 \partial_\phi u \\ \partial_t \Delta_{pol} u = \frac{1}{R} [R^2 \Delta_{pol} u, u] + \frac{1}{R} [\psi, \Delta^* \psi] - \frac{F_0}{R^2} \partial_\phi \Delta^* \psi + \nu \Delta_{pol} (\Delta_{pol} u) \end{cases}$$

avec $w = \Delta_{pol} u$ et $z_j = \Delta^* \psi$.

- Dans cette formulation les équations d'évolutions et elliptiques sont découplées.
- La jacobienne associée aux équations d'évolutions est

$$\frac{\partial G(\mathbf{U}^n)}{\partial \mathbf{U}^n} \delta \mathbf{U}^n = J_k \delta \mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} M & U \\ L & D \end{pmatrix} \delta \mathbf{U}^n$$

avec $\delta \mathbf{U}^n = (\delta \psi^n, \delta u^n)$

- M et D les matrices associées aux équations d'advection et de diffusion sur ψ et u .
- L et U les matrices associées aux équations hyperboliques qui couplent ψ et u .

Préconditionnement : Algorithme

- La décomposition de Schur pour le système est donnée par

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{U}^n &= J_n^{-1} R(\mathbf{U}^n) = \begin{pmatrix} M & U \\ L & D \end{pmatrix}^{-1} R(\mathbf{U}^n) \\ &= \begin{pmatrix} I & M^{-1}U \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & P_{schur}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -LM^{-1} & I \end{pmatrix} R(\mathbf{U}^n)\end{aligned}$$

avec $P_{schur} = D - LM^{-1}U$.

- On obtient l'algorithme suivant qui résout $J_n \delta \mathbf{U}_n = R(\mathbf{U}^n) +$ les équations elliptiques :

$$\begin{aligned}\text{Prédicteur : } & M \delta \psi_n^P = R_\psi(\mathbf{U}_n) \\ \text{Evolution vitesse : } & P_{schur} \delta u_n = (-L \delta \psi_n^P + R_u(\mathbf{U}_n)) \\ \text{Correcteur : } & M \delta \psi_n = M \delta \psi_n^P - U \delta u_n \\ \text{Evolution courant : } & D^* \delta \psi_n = \delta j_n \\ \text{Evolution vorticité : } & D^{pol} \delta u_n = \delta w_n\end{aligned}$$

avec R_ψ et R_u sont les membres de droite associés aux équations sur ψ et u . D^* et D^{pol} correspondent aux opérateurs elliptiques.

Approximation du complément de Schur I

- Pour construire $P_{schur} = D - LM^{-1}U$ on doit connaître la matrice M^{-1} .
- L'algorithme avec une approximation du complément de Schur **donne le preconditionneur P_k** .
- **Approximation "small flow"**
 - Dans P_{schur} on suppose que $M^{-1} \approx \Delta t$

$$P_{schur} = \frac{\Delta_{pol} \delta u}{\Delta t} - \rho \mathbf{v}^n \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \Delta_{pol} \delta u \right) - \rho \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \Delta_{pol} u^n \right) - \theta \nu \Delta_{pol}^2 \delta u - \theta^2 \Delta t LU$$

- Opérateur $LU = \mathbf{B}^n \cdot \nabla (\Delta^* (\frac{1}{\rho} \mathbf{B}^n \cdot \nabla \delta u)) + \frac{\partial j^n}{\partial \psi^n} \mathbf{B}_\perp^n \cdot \nabla (\frac{1}{\rho} \mathbf{B}^n \cdot \nabla \delta u)$ avec

$$\mathbf{B}^n \cdot \nabla \delta u = -\frac{1}{R} [\psi^n, \delta u] + \frac{F_0}{R} \partial_\phi \delta u,$$

$$\mathbf{v}^n \cdot \nabla \delta u = -R [\delta u, u^n] \text{ et } \delta \mathbf{v} \cdot \nabla u^n = -R [u^n, \delta u].$$

Approximation du complément de Schur II

Propriétés de l'opérateur LU

- On se place dans l'espace L^2 . L'opérateur LU n'est pas positif pour tout δu

$$\langle LU\delta u, \delta u \rangle_{L^2} = \int \rho |\nabla \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{B}^n \cdot \nabla \delta u \right)|^2 - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial j^n}{\partial \psi^n} (\mathbf{B}_{\perp}^n \cdot \nabla \delta u) (\mathbf{B}^n \cdot \nabla \delta u)$$

- L'opérateur LU n'est pas auto-adjoint : $\langle LU\delta u, \delta v \rangle_{L^2} \neq \langle \delta u, LU\delta v \rangle_{L^2}$
- Pour la MHD complète l'équivalent de l'opérateur LU correspond à l'opérateur qui décrit les perturbations d'un écoulement uniforme
- Le spectre de cet opérateur contient les ondes de la MHD.
- Pour ce modèle réduit les ondes magnéto-soniques sont filtrées. Il ne reste que les ondes d'Alfvén.
- Question ouverte : **Spectre de l'opérateur LU correspond-t-il au spectre associé aux ondes d'Alfvén ?**

Approximation du complément de Schur III

- On propose d'utiliser une approximation de LU afin d'obtenir un opérateur facile à inverser
- On propose comme approximation l'opérateur
 $LU^{approx} = \mathbf{B}^n \cdot \nabla (\Delta^* (\frac{1}{\rho} \mathbf{B}^n \cdot \nabla \delta u))$

$$P_{schur}^f = \frac{\Delta_{pol} \delta u}{\Delta t} - \rho \mathbf{v}^n \cdot \nabla (\frac{1}{\rho} \Delta^\perp \delta u) - \rho \delta \mathbf{v} \cdot \nabla (\frac{1}{\rho} \Delta^\perp u^n) - \theta \nu \Delta_{pol}^2 \delta u - \theta^2 \Delta t LU^{approx}$$

Propriétés des opérateurs

- On se place dans l'espace L^2 . L'opérateur LU est positif pour tout δu

$$\langle LU \delta u, \delta u \rangle_{L^2} = \int \frac{1}{\rho} |\nabla_\perp (\mathbf{B} \cdot \nabla \delta u)|^2$$

- L'opérateur LU est auto-adjoint : $\langle LU \delta u, \delta v \rangle_{L^2} = \langle \delta u, LU \delta v \rangle_{L^2}$

- Question ouverte : **Spectre de LU^{approx} par rapport à LU ?**

Algorithme final

- Algorithme final

$$\begin{aligned}
 \text{Prédicteur : } & \tilde{M}\delta\psi_n^P = R_\psi(\mathbf{U}_n) \\
 \text{Evolution vitesse : } & P_{schur}^f \delta\mathbf{u}_n = -L\delta\psi_n^P + R_u(\mathbf{U}_n) \\
 \text{Correcteur : } & M\delta\psi_n = M\delta\psi_n^P - U\delta\mathbf{u}_n \\
 \text{Evolution courant : } & D_*\delta\psi_n = \delta j_n \\
 \text{Evolution vorticité : } & D_\perp \delta\mathbf{u}_n = \delta\mathbf{w}_n
 \end{aligned}$$

- Autre solution : Utiliser l'approximation suivante de P_{schur}

$$P_{schur}^{approx} = \frac{\Delta_{pol}\delta u}{\Delta t} - \Delta_{pol}\rho\mathbf{v}^n \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho}\delta u \right) - \Delta_{pol}\rho\delta\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho}u^n \right) - \theta\nu\Delta_{pol}^2\delta u - \theta^2\Delta t LU_{approx}^2$$

$$\text{avec } LU_{approx}^2 = \Delta_{pol}(\mathbf{B}^n \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho}\mathbf{B}^n \cdot \nabla \delta u \right))$$

- On peut découper la phase d'évolution de la vitesse en deux on applique le Laplacien puis dans un second temps le problème d'évolution.
- Avantage : on a pu factoriser la phase d'évolution de la vitesse et donc la diviser en deux pour éviter des opérateurs d'ordre 4.
- Question ouverte (à vérifier numériquement) : **bruit numérique lié cet opérateur approché (Chacon)** .

Seconde approximation du complément de Schur

- Pour définir $P_{schur} = D_u - LM^{-1}U$ on doit connaître la matrice M^{-1} .

- **Seconde approximation**

- On introduit un opérateur M_* avec $UM_* \approx MU$. Par conséquent $P_{Schur} = (D_u M_* - LU)M_*^{-1}$.
- La phase d'évolution de vitesse s'écrit

$$\begin{cases} \text{évolution vitesse I : } (DM_* - LU)\delta u^{*,n} = (-L\delta\psi_p^n + R_u(\mathbf{U}^n)) \\ \text{évolution vitesse II : } \delta u^n = M_*\delta u^{*,n} \end{cases}$$

- On calcule l'opérateur LU comme précédemment.
- Ici l'opérateur M contient un opérateur du type advection + diffusion.
- Pour l'opérateur M_* on choisit un opérateur d'advection
- Question ouverte : **équivalence spectrale entre UM_* et MU .**

Extension aux autres modèles de MHD réduite

- Extension pour le modèle sans $v_{||}$: même méthode
- La jacobienne est définie par

$$J_k = \begin{pmatrix} M & U \\ L & D \end{pmatrix}$$

avec M la matrice liée aux opérateurs de diffusion et advection pour ψ , ρ et T .
 L et U les matrices des opérateurs de couplage entre ψ , ρ , T et u .

- Traitement du terme de pression :
 - Il y a terme additionnel dans le complément de Schur liée à la pression
 - La méthode de factorisation par un Laplacien (pour éviter les termes d'ordre 4) impossible
 - Possibilité : splitting entre les effet de la pression et du champ magnétique dans le complément de Schur.
- Difficulté additionnelle : traiter les termes $\eta(T)$ et $\nu(T)$.
- Modèle avec vitesse parallèle : construction et étude des opérateurs approchés plus compliqués.

Préconditionnement : remarques et perspectives

- Le preconditionneur physique utilise une approximation de la Jacobienne **basée sur une approximation des opérateurs physiques.**
- Possible avantages :
 - **Il est possible que ce preconditionneur est plus efficace que celui basé sur la jacobienne sans couplage entre les modes de Fourier.**
 - Ce type de preconditionnement est compatible avec les méthodes "Jacobian-Free". Cela permettrait de réduire de façon importante la consommation de mémoire et d'utiliser des maillages plus fin.
 - Préconditionnement indépendant de la discrétisation toroïdale.
- **Programme de travail**
 - Finir la construction et l'étude de l'algorithme pour différents modèles.
 - Implémenter cette méthode dans le code Pigasus (code d'éléments finis Splines) et le comparer au preconditionneur de Jorek.
 - Implémenter la méthode dans le code Jorek avec des méthodes multigrilles et "Jacobian-Free".
 - Dans Pigasus comparer les schémas AP et les méthodes multi-grilles géométriques (A. Ratnani) pour traiter les opérateurs anisotropes.

Merci

Merci de votre attention