Université de Strasbourg **Licence Mathématique L3 S6**

2024-2025

Analyse complexe
Contrôle continu 3
05/05/2025, durée : 2h

Les téléphones portables sont interdits. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1. Trouver la somme de la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2},$$

pour $a \in \mathbb{R}^*$.

On utilise la formule

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}, n\right) +$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}, ia\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}, -ia\right)$$

pour le chemin qui est le bord d'un rectangle $C = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ composé de quatre segments $\gamma_1 = [-N-\frac{1}{2}-iN, N+\frac{1}{2}-iN]$, $\gamma_2 = [N+\frac{1}{2}-iN, N+\frac{1}{2}+iN]$, $\gamma_3 = [N+\frac{1}{2}+iN, -N-\frac{1}{2}+iN]$, $\gamma_1 = [-N-\frac{1}{2}+iN, -N-\frac{1}{2}-iN]$.

On peut démontrer que l'intégrale à gauche vaut zéro quand $N \to \infty$. Pour γ_1,

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}dz\right| = \left|\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{((x-iN)^2+a^2)\sin(\pi(x-iN))}dx\right|$$

On utilise $|(x-iN)^2+a^2| = |x-iN+ia||x-iN-ia| \geqslant |N-a||N+a| = N^2-a^2$ et $|\sin(\pi(x-iN))| = \frac{1}{2}|e^N e^{i\pi x} - e^{-N}e^{-i\pi x}| \geqslant \frac{1}{2}(e^N - e^{-N})$ pour conclure que

$$\left|\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{((x-iN)^2+a^2)\sin(\pi(x-iN))}dx\right| \leqslant \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{((x-iN)^2+a^2)\sin(\pi(x-iN))}\right| dx$$

$$\leqslant 2\frac{2N+1}{(N^2-a^2)((e^N-e^{-N}))} \to_{N\to\infty} 0.$$

L'intégrale le long de γ_3 est égal à celle-ci par symétrie $z \to -z$. Pour γ_2,

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}dz\right| = \left|\int_{-N}^{N} \frac{1}{((N+\frac{1}{2}+iy)^2+a^2)\sin(\pi(N+\frac{1}{2}+iy))}idy\right|$$

On utilise $|(N+\frac{1}{2}+iy)^2+a^2| = |N+\frac{1}{2}+iy+ia||N+\frac{1}{2}+iy-ia| \geqslant (N+\frac{1}{2})^2$ et $|\sin(\pi(N+\frac{1}{2}+iy)| = \frac{1}{2}(e^{\pi y}+e^{-\pi y}) \geqslant 1$ pour conclure que

$$\left|\int_{-N}^{N} \frac{1}{((N+\frac{1}{2}+iy)^2+a^2)\sin(\pi(N+\frac{1}{2}+iy))}idy\right|$$

$$\leqslant \int_{-N}^{N} \left| \frac{1}{((N+\frac{1}{2}+iy)^2+a^2)\sin(\pi(N+\frac{1}{2}+iy))} i \right| dy \leqslant \frac{2N}{(N+\frac{1}{2})^2} \to_{N\to\infty} 0.$$

L'intégrale le long de γ_4 est égal à celle-ci par symétrie $z \to -z$.

En calculant les résidus on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}, n\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

et

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}, ia\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)\sin(\pi z)}, -ia\right) = 2\frac{1}{2ia\sin(\pi ia)} = -\frac{1}{a\sinh(\pi a)}$$

Alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a\sinh(\pi a)}$$

Exercice 2. Calculer l'integrale

$$\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$$

où C est le chemin donné par equation $|z-2-i|^2 = \frac{4}{3}$ et parcouru dans le sens trigonométrique.

Le chemin est un cercle du centre $2+i$ et du rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Car $1 < \frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$, le pôle simple $z=1$ de la fonction $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ se trouve à l'extérieur du cercle et le pôle double $z=2$ est à l'intérieur. Par le théorème des résidus

$$\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz = 2\pi i \,\text{Res}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}, 2\right) = 2\pi i \left(\frac{z}{(z-1)}\right)' |_{z=2} = -2\pi i.$$

Exercice 3. Calculer l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5+4\cos t} dt$$

en utilisant le théorème de résidus et le lemme de Jordan.

On remplace $e^{it} \to z$, $\cos(t) \to \frac{z+z^{-1}}{2}$, $\cos(2t) \to \frac{z^2+z^{-2}}{2}$, $dt \to \frac{dz}{iz}$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5+4\cos t}\, dt = \int_{C(0,1)} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{5+4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{z^4+1}{z^2(4z^2+10z+4)} dz.$$

On note

$$f(z) = \frac{1}{i}\frac{z^4+1}{z^2(4z^2+10z+4)}$$

L'équation du second degré d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ $4z^2+10z+4=0$ *a les deux solutions*

$$z_1 = -2, \quad z_2 = -\frac{1}{2}.$$

Les pôles de fonction $f(z)$ sont $z=0$, d'ordre 2, $z=-2$ d'ordre 1 et $z=-\frac{1}{2}$ d'ordre 1. Juste $z=0$ et $z=-\frac{1}{2}$ se trouvent à l'intérieur de $C(0,1)$.

Par le théorème des résidus

$$I=\frac{1}{i}\int_{C(0,1)}\frac{z^4+1}{z^2(4z^2+10z+4)}dz=2\pi i(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,-\frac{1}{2}))$$
$$=2\pi i\frac{1}{4i}\left(\left(\frac{z^4+1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}\right)'|_{z=0}+\left(\frac{z^4+1}{z^2(z+2)}\right)|_{z=-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=2\pi i\frac{1}{4i}\left(\left(\frac{4z^3(z+2)(z+\frac{1}{2})-(z^4+1)(2z+\frac{5}{2})}{(z+2)^2(z+\frac{1}{2})^2}\right)|_{z=0}+\left(\frac{z^4+1}{z^2(z+2)}\right)|_{z=-\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{5}{2}+\frac{\frac{1}{16}+1}{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Le lemme de Jordan n'est pas utile ici.

Exercice 4. Calculer l'integrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx,$$

où a et b sont réelles, en utilisant le théorème de résidus et lemme de Jordan.

L'intégrale est paire par rapport aux changements $a\to -a$ et $b\to -b$. Il diverge pour $b=0$. Alors on peut considérer juste le cas $a\geqslant 0$ et $b>0$.

Par parité $x\to -x$ de la fonction $\frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}$ on peut écrire en utilisant le lemme de Jordan

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_C\frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}dz,$$

où C est le chemin fermé qui consiste du segment $[-R,R]$ complété par un demi-cercle du rayon R et du centre 0 dans le demi-plan supérieur. Le point $z=ib$, qui se trouve à l'intérieur du C, est un pôle d'ordre 2 de la fonction $\frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}$. En utilisant le théorème de résidus

$$I=\frac{1}{2}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2},ib\right)=\frac{1}{2}2\pi i\left(\frac{e^{iaz}}{(z+ib)^2}\right)'|_{z=ib}=\frac{\pi}{4}\frac{1+ab}{b^3}e^{-ab}$$

pour $a\geqslant 0$ et $b>0$. Alors pour tout $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$ on a

$$I=\frac{\pi}{4}\frac{1+|ab|}{|b|^3}e^{-|ab|}$$

Exercice 5. Déterminer le nombre de solutions (comptés avec multiplicités) d'équation

$$z^4-8z+10=0$$

a) dans $D(0,1)$
b) dans $D(0,3)\backslash D(0,1)$
c) dans $\mathbb{C}\backslash D(0,3)$

En utilisant le théorème de Rouché pour $f=z^4-8z+10$ et $g=10$ dans $D(0,1)$, on a

$$|f-g|=|z^4-8z+10-10|=|z^4-8z|\leqslant|z|^4+8|z|<10=|g|$$

sur $C(0,1)$, alors $Z_f = Z_g = 0$ dans $D(0,1)$.

En utilisant le théorème de Rouché pour $f = z^4 - 8z + 10$ et $g = z^4$ dans $D(0,3)$, on a

$$|f - g| = |z^4 - 8z + 10 - z^4| = |-8z + 10| \leqslant 8|z| + 10 < |z|^4 = 81 = |g|$$

sur $C(0,3)$, d'où $Z_f = Z_g = 4$ dans $D(0,3)$ et alors $Z_f = Z_g = 4$ dans $D(0,3)\backslash D(0,1)$.

Finalement $Z_f = Z_g = 0$ dans $\mathbb{C}\backslash D(0,3)$ car f est un polynôme du degré 4.