Cours 9

Thm (produit (fini) des compacts est compact)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des espaces topologiques compacts.

Alors $X_1 \times \dots \times X_n$ est compact

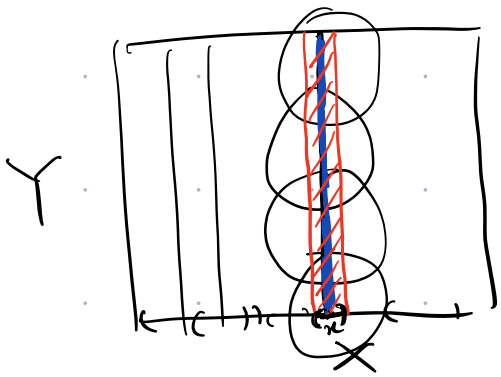
Preuve :

- Par récurrence, il suffit de démontrer pour $n=2$.

($X_1 \times \dots \times X_n \cong (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ compact)

($X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ compact, X_n compact)

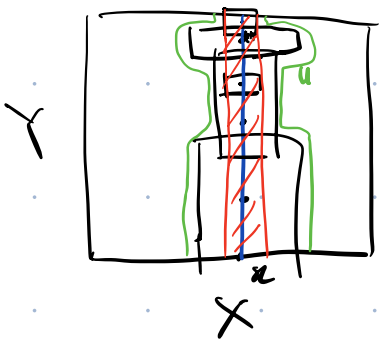
- $X_1 = X$, $X_2 = Y$ compact, Mq : $X \times Y$ compact.



Lemme de tube Soit $x \in X$, Y compact. Soit U un ouvert tq $U \supset \{x\} \times Y$

Alors $\exists$ V voisinage ouvert de x dans X

tq $U \supset V \times Y$.



Preuve du Lemme :

$\forall y \in Y$ comme $(x,y) \in U$

$\xrightarrow[\text{top. produit}]{\text{déf. de la}}$ $\exists$ $\begin{cases} A_y \text{ ouvert dans } X \\ B_y \text{ ouvert dans } Y \end{cases}$ tq $(x,y) \in A_y \times B_y \subset U$

(en particulier $x \in A_y$, $y \in B_y$)

$$\Rightarrow \quad Y = \bigcup_{y \in Y} B_y$$

Y cpt $\Rightarrow \exists\, y_1, \dots, y_n \in Y$ tq $\boxed{Y = \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}}$

On considère $x \in V := \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i}$ ouvert de X

$$\Rightarrow \{x\} \times Y \subset V \times Y$$

$$U \supset \bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i} \times B_{y_i} \supset \bigcup_{i=1}^{n} V \times B_{y_i} = V \times Y$$

□

Preuve du thm

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouvert de $X \times Y$

tq $\bigcup_{i \in I} U_i = X \times Y$.

$\forall x \in X$ comme $\{x\} \times Y \underset{\text{homéo}}{\cong} Y$ est compact.

$\exists\, J_x \subset I$ sous-ensemble Fini tq

$$\bigcup_{j \in J_x} U_j \supset \{x\} \times Y.$$

Lemme de tube $\Rightarrow \exists\, V_x$ voisinage ouvert de x dans X tq

(*) $\bigcup_{j \in J_x} U_j \supset V_x \times Y$.

Comme $X = \bigcup_{x \in X} V_x \overset{X \text{ cpt}}{\Longrightarrow} \exists\, x_1, \dots, x_m \in X$ tq $X = \bigcup_{k=1}^{m} V_{x_k}$ (**)

Alors $\bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j \in J_{x_k}} U_j$

$\overset{(*)}{\supset} \bigcup_{k=1}^{m} (V_{x_k} \times Y)$.

$= \left(\bigcup_{k=1}^{m} V_{x_k} \right) \times Y$

$\overset{(**)}{=} X \times Y$.

$\Longrightarrow \{U_j\}_{\substack{j \in J_{x_k} \\ k=1,\dots,m}}$ est un sous-recouvrement fini de $\{U_i\}_{i \in I}$. □

Cor / Exemples :

(i) $[0,1]^n$ est compact

(ii) Un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est compact.

Preuve : (i) par thm. et la compacité de $[0,1]$
(Thm de Heine-Borel)

(ii) Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné

borné $\Rightarrow X \subset [-N,N]^n$ pour un $N > 0$.

(i) $\Rightarrow [-N,N]^n$ est compact.

$X \subset [-N,N]^n$ est fermé $\Longrightarrow X$ compact $\square$.

Rk : En effet, un compact dans $\mathbb{R}^n$ est forcément fermé et borné.

Preuve : • $\mathbb{R}^n$ séparé, X compact $\Rightarrow X$ fermé

• $X \subset \bigcup_{N=1}^{\infty}]-N,N[^n$

X cpt $\Rightarrow$ on a $\exists N > 0$ tq $X \subset]-N,N[^n$

$\Rightarrow X$ borné $\square$



cpt $\not\Longleftrightarrow$ fermé et borné en général :

Ex. S : ensemble infini. muni de la distance $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

$\Longrightarrow$ la top. induite sur S est la top. discrète.

S est borné et fermé mais S n'est pas compact