Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

2025-2026

Topologie, feuille 5 : Espaces compacts

(Rappel : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) admet une valeur d'adhérence a s'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.)

Exercice 1. Soit X un ensemble infini muni de la métrique discrète d définie par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

1. Montrer que toute partie de X est bornée et fermée.
2. Montrer qu'un sous-ensemble de X est compact si et seulement s'il est fini.

Exercice 2.

1. Le sous-espace métrique $\mathbb{N}$ de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est-il compact ?
2. Un espace métrique muni de la distance discrète est-il compact ?

Exercice 3. Soient deux espaces topologiques X et Y.

1. On suppose que X est compact. Montrer que tout voisinage de $X \times \{y_0\}$ dans $X \times Y$ contient un ensemble $X \times U$ où U est un voisinage de y_0.
2. Donner un contre exemple au point précédent quand X n'est pas compact.
3. Si X et Y sont compacts, montrer que $X \times Y$ est compact.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soient K et L deux parties compactes de E. Montrer que l'espace somme $K + L$ est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice 5.

1. Montrer qu'une fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique compact est bornée, et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $x_{\min}, x_{\max} \in K$ tels que $f(x_{\min}) = \min_K f$ et $f(x_{\max}) = \max_K f$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui tend vers $+\infty$ en ∞, c'est-à-dire :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A > 0 \mid\ (\|x\| > A \Longrightarrow f(x) > M)\,.$$

2. Vérifier que la définition ci-dessus ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$.
3. Montrer que f atteint son minimum.

Exercice 6 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. On considère la fonction $f := |P| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que f est continue.
2. En utilisant le fait que P est ouverte (voir cours d'analyse complexe), montrer que f est ouverte (on utilisera l'hypothèse d'absurdité $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_*^+$).
3. Montrer que f tend vers $+\infty$ en ∞ (voir exercice 5 pour la définition).

4. Montrer que f atteint son minimum et en déduire une contradiction.

On rappelle une autre possibilité de preuve : Sous l'hypothèse d'absurdité, montrer que $\frac{1}{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui tend vers 0 en ∞. En déduire que cette fonction holomorphe est bornée, puis conclure par le théorème de Liouville que $\frac{1}{P}$ est constante.

Exercice 7 (Théorème de Heine.)**.** Soit (K, d) un compact métrique, (X, d') un espace métrique et $f : K \to X$ une fonction continue. On définit

$$\Delta := \{(x, x),\ x \in K\}$$

1. Sur $K \times K$, on définit les distances $d_\infty((x, y), (x', y')) := \max\{d(x, y), d(x', y')\}$ et $d_1((x, y), (x', y')) := d(x, y) + d(x', y')$. Montrer que d_1 et d_∞ sont équivalentes et définissent la topologie produit sur $K \times K$.
2. Montrer que Δ est compact.
3. Montrer que $(x, y) \in K \times K$ vérifie $d_1((x, y), \Delta) < \delta$ si et seulement si $d(x, y) < \delta$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. En considérant le fermé $F_\varepsilon := \{(x, y) \mid d_1(f(x), f(y))\} \geq \varepsilon$ et en appliquant l'exercice 10, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow (x, y) \notin F_\varepsilon.$$

5. En déduire que f est uniformément continue (c'est le théorème de Heine).

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de parties de $\mathcal{T}$ possède la propriété d'intersection finie si pour tout sous-ensemble fini $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, l'intersection $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j$ est non-vide.

1. Montrer que X est compact si et seulement si pour tout famille $(F_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de fermés possédant la propriété d'intersection finie, l'intersection $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} F_i$ est non-vide.
2. Si (X, d) est compact, montrer que X est séparable, donc la topologie est à base dénombrable.
3. Montrer que (X, d) est compact si et seulement si la toute famille *dénombrable* de fermés ayant la propriété d'intersection finie a une intersection non-vide.
4. En déduire que (X, d) est compact si et seulement si toute suite dans X admet une valeur d'adhérence.

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé.

1. Montrer qu'une suite décroissante de compacts non vides est un compact non vide.
2. Si $K \subset X$ est un compact non-connexe, montrer qu'il existe deux ouverts U, U' de X disjoints tels que
$$K \subset U \sqcup U', \quad K \sqcup U \neq \emptyset,\ K \cap U' \neq \emptyset.$$
3. Montrer qu'une suite décroissante de compacts connexes est un compact connexe.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que pour $A, B \subset X$,

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b),\ a \in A, b \in B\}$$

On rappelle aussi (exercice 8) qu'un espace métrique est compact si et seilement si toute suite de cet espace admet une valeur d'adhérence.

1. Montrer que si $A, B \subset X$ sont deux compacts il existe $a, b \in A, B$ tels que $d(A, B) = d(a, b)$. En déduire que si ces compacts sont disjoints, $d(A, B) > 0$.
2. Montrer que la propriété $d(A, B) > 0$ reste vraie si A est compact et B est fermé.
3. Construire un contre-exemple quand A et B sont seulement supposés fermés.

Exercice 11. Soit X un espace topologique et soient $K_1, \cdots, K_n$ des parties compactes de X. Montrer que la réunion $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ est un compact de X et que si X est de plus séparé, l'intersection $K' = \bigcap_{i=1}^n K_i$ est un compact de X.

Exercice 12. Soit A un sous-ensemble de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On appelle *point d'accumulation* de A tout point a de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad (]a - \varepsilon, a[\cup]a, a + \varepsilon[) \cap A \neq \emptyset.$$

1. Montrer que x_0 est un point d'accumulation de A si et seulement s'il existe une suite non stationnaire de A qui converge vers x_0.
2. Montrer que toute partie infinie bornée de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ admet au moins un point d'accumulation.

Exercice 13. Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application telle que pour tous x et y de X,

$$\text{si } x \neq y, \text{ alors } d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Donner des exemples qui montrent que le résultat n'est pas vrai si :

1. on ne suppose plus X compact ;
2. on suppose seulement $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

Exercice 14. Soit X un espace topologique séparé et localement compact (c'est-à-dire que chaque point de X admet un voisinage compact). Posons $X_\infty := X \sqcup \{\infty\}$ où ∞ est le nom d'un nouvel élément. Notons $\mathcal{T}_\infty$ l'ensemble des parties de X_∞ qui sont soit des ouverts de X, soit de la forme $\{\infty\} \cup (X \backslash K)$ avec K compact.

1. Montrer que $\mathcal{T}_\infty$ est une topologie de X_∞.
2. Montrer que X_∞ muni de cette topologie est compact et séparé.
3. Montrer que l'inclusion $X \subset X_\infty$ définit une injection continue de X dans X_∞.
4. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction qui tend vers $+\infty$ en ∞ (voir définition exercice 5)) elle se prolonge en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^d_\infty \to \mathbb{R}_\infty$ continue avec $f(\infty) = \infty$.
5. Montrer que $\mathbb{R}_\infty$ est homéomorphe à S^1.
6. Montrer que $\mathbb{R}^n_\infty$ est homéomorphe à S^n, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. (Indication : projection stéréographique.)

Cette construction s'appelle la *compactification d'Alexandrov* de X.

Exercice 15. Pour $n \geq 1$, soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$. Montrer que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$ est compact. (Indication : Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.)

Exercice 16. Soit $(X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), d_\infty)$ l'espace des fonctions continues muni de la distance

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

On veut montrer que la boule unité fermée $B \subset X$ n'est pas compacte.

1. Expliquer par un dessin l'allure des fonctions contenues dans la boule B.
2. Dessiner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction continue $f_n : [0,1] \to [0,1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ et qui prend la valeur 1 au milieu de l'intervalle.
3. Pour tous n, m entiers, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$?
4. Conclure.

Exercice 17. Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élélements de X admettant une unique valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Trouver un contre-exemple sans l'hypothèse de compacité.

Exercice 18. Soit (X, d) un espace métrique non-vide compact. On note $\mathrm{diam}(X) = \sup_{x,y\in X} d(x,y) \in [0, +\infty]$. Montrer que $\mathrm{diam}(X)$ est fini et qu'il existe $x, y \in X$ tels que $\mathrm{diam}(X) = d(x,y)$.

Exercice 19. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On suppose que $(X, \mathcal{T}_X)$ est compact et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est séparé.

1. Soit $f : X \to Y$ continue ; montrer que f est fermée (l'image par f de tout fermé est fermé).
2. En déduire que si $f : X \to Y$ est une bijection continue, c'est un homéomorphisme.
3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]^2$ bijective, alors qu'il existe de telles fonctions qui sont surjectives (voir courbes de Peano).

Exercice 20. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On suppose que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est compact. Montrer que la projection $\pi_1 : X \times Y \to X$ est fermée.