Classe de conjugaison du frobenius des variétés abéliennes à réduction ordinaire

Rutger Noot

1 Introduction

1.1 Soit X une variété abélienne sur un corps de nombres E. Pour tout nombre premier ℓ on peut alors considérer la représentation galoisienne

$$\rho_\ell\colon \operatorname{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E) \longrightarrow \operatorname{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell))$$

associée à X. Les représentations ρ_ℓ et la façon dont elles varient avec ℓ ont été étudiées depuis longtemps. Un résultat classique est le suivant. Soit v une place finie de E de caractéristique résiduelle p et soit $\tau \in \operatorname{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ un élément de Frobenius en v. Si la variété X a bonne réduction en p, alors, pour $\ell \neq p$, le polynome caractéristique de $\rho_\ell(\tau)$ ne dépend que de v et est à coefficients dans $\mathbf{Z}$. En outre, ce polynome ne dépend pas de $\ell \neq p$. Finalement on sait que dans ce cas, l'automorphisme $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ est semi-simple. On voit que la classe de conjugaison (géométrique) de $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ dans $\operatorname{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell))$ est définie sur $\mathbf{Q}$. En invoquant l'isomorphisme canonique (ou en effet n'importe quel autre isomorphisme)

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell),$$

on déduit qu'il existe une classe de conjugaison C dans $\operatorname{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}))_{\bar{\mathbf{Q}}}$, définie sur $\mathbf{Q}$, telle que $\rho_\ell(\tau)^{-1} \in C(\mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $\ell \neq p$.

En considérant la cohomologie cristalline $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(X_v/W(\overline{\mathbf{F}}_p))$ de la réduction de X en v, on trouve un analogue p-adique de cet énoncé. Soient E_v le corps résiduel de E en v et $a = [E_v : \mathbf{F}_p]$. Soit Frob la puissance a-ième du Frobenius σ-linéaire de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(X_v/W(E_v))$. On sait que Frob est semi-simple et que son polynôme caractéristique est égal au polynôme caractéristique commun des $\rho_\ell(\tau)^{-1}$. On conclut alors que $\mathrm{Frob} \in C(W(E_v) \otimes \mathbf{Q})$ pour tout isomorphisme

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes W(E_v) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(X_v/W(E_v)) \otimes \mathbf{Q}.$$

Soit $G \subset \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q}))$ le groupe de Mumford–Tate de X, voir 2.1 pour la définition exacte. Si on indentifie $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell)$ à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})\otimes\mathbf{Q}_\ell$ par l'isomorphisme canonique qui les relie, alors ρ_ℓ se factorise par un morphisme $\rho_\ell\colon \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)\to G(\mathbf{Q}_\ell)$. Pour tout nombre premier $\ell\neq p$, soit $C_\ell\subset G_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell}$ la classe de conjugaison de $\rho_\ell(\tau)^{-1}$. Comme le fait Serre dans [Se, 12.6], on peut se demander si les C_ℓ sont définies sur $\mathbf{Q}$ et si cela est le cas, si elles dépendent de ℓ. Dans cet article on montrera que si la réduction de X en v est *ordinaire*, alors C_ℓ est définie sur $\mathbf{Q}$ et indépendant de ℓ. En effet, on montrera même qu'il existe $F\in G(\mathbf{Q})$ tel que $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ et F sont conjugués par un élément de $G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ pour tout $\ell\neq p$. Il y a des énoncés analogues pour la cohomologie cristalline, voir 2.1 et 2.2. Remarquons par ailleurs qu'en général on ne peut pas s'attendre à ce qu'il existe un tel élément $F\in G(\mathbf{Q})$. Il existe des courbes elliptiques pour lesquelles la classe C_ℓ, bien que définie sur $\mathbf{Q}$, ne contienne pas de points à valeurs dans $\mathbf{Q}$. Une conséquence du théorème est une réponse affirmative à [Se, 12.5] pour un motif M découpé par une classe de Hodge dans le motif d'une variété abélienne à réduction ordinaire, cf. 2.4 : on montre que le polynôme caractéristique du frobenius d'un tel motif est le même pour toutes les réalisations ℓ-adiques et pour la réalisation p-adique.

Pour la démonstration de ce résultat on s'inspire des méthodes utilisées par Deligne dans [De]. On construit une variété de Shimura qui correspond au groupe de Mumford–Tate de X. On utilise cette variété pour comparer la cohomologie de X à la cohomologie d'une variété abélienne de type CM, pour lequel le théorème est plus facile à montrer. Parce qu'on veut aussi comparer l'action de frobenius sur la cohomologie des deux variétés, on cherche en effet une variété abélienne correspondant à un point spécial de la variété de Shimura dont la réduction en v soit isomorphe à X_v. Pour montrer qu'une telle variété existe, on aura besoin des résultats de [No] sur la réduction des variétés de Shimura.

Remerciements. Cet article doit son existence à J. P. Wintenberger. En particulier, l'idée du théorème principal (2.2) est due à lui. Je l'en remercie cordialement. Je remercie également le referee pour l'idée d'utiliser *Zarhin's trick* dans la démonstration du théorème 2.2, ce qui simplifie l'argument original.

1.2 Notations. Dans tout l'article, $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes et $\bar{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Pour chaque nombre premier p, soit $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valuation p-adique et soit $\bar{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. On fixe une inclusion $\bar{\mathbf{Q}}\hookrightarrow\bar{\mathbf{Q}}_p$. Un corps de nombres est un sous-corps $E\subset\bar{\mathbf{Q}}$ tel que $[E:\mathbf{Q}]$ est fini. Si E est un corps de nombres, on écrit $\mathscr{O}_E$ pour l'anneau des entiers de E, $\mathfrak{p}_E$ pour l'idéal premier déterminé par l'inclusion $E\subset\bar{\mathbf{Q}}\hookrightarrow\bar{\mathbf{Q}}_p$ et k_E pour le corps résiduel $\mathscr{O}_E/\mathfrak{p}_E$. Le localisé de $\mathscr{O}_E$ en $\mathfrak{p}_E$ est noté $\mathscr{O}_{E,\mathfrak{p}}$ et le complété de E en $\mathfrak{p}_E$ est noté $E_\mathfrak{p}$. On note $\mathfrak{p}_E$ l'idéal de $E_\mathfrak{p}$

défini par $\mathfrak{p}_E$. On écrit $\bar{\mathscr{O}}$ pour l'anneau des entiers de $\bar{\mathbf{Q}}$, $\bar{\mathfrak{p}} \subset \bar{\mathscr{O}}$ pour l'idéal défini par l'inclusion $\bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ et $\bar{\mathscr{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ pour le localisé de $\bar{\mathscr{O}}$ en $\bar{\mathfrak{p}}$.

Pour tout corps de nombres E, on désigne par $E_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}} \subset \bar{\mathbf{Q}}_p$ l'extension maximale non-ramifiée de $E_{\mathfrak{p}}$ contenue dans $\bar{\mathbf{Q}}_p$. On écrit $\widehat{E}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}$ pour le complété de $E_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}$. Dans le cas où $E = \mathbf{Q}$ on désigne ces corps par $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et $\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ respectivement. On note $\bar{\tau} \in \mathrm{Gal}(\bar{k}_E/k_E)$ l'automorphisme de Frobenius et $\tau \in \mathrm{Gal}(E_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}}/E_{\mathfrak{p}})$ le relèvement unique de $\bar{\tau}$. Enfin on choisit une fois pour toutes un élément $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ dont la restriction à $E_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}} \cap \bar{\mathbf{Q}}$ induit $\tau|_{E_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{nr}} \cap \bar{\mathbf{Q}}}$.

Pour un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, soit $W(k)$ l'anneau de vecteurs de Witt à coefficients dans k et soit $P(k)$ le corps des fractions de $W(k)$. On écrit $\bar{\sigma}$ pour le frobenius absolu de k et σ pour l'automorphisme de $W(k)$ induit par $\bar{\sigma}$. Si E est un corps de nombres, l'inclusion $E \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$ détermine une inclusion $P(k_E) \hookrightarrow \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} \subset \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ via laquelle on considère $P(k_E)$ comme un sous-corps de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et de $\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$. On identifie $P(\bar{k}_E) = \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$. Si $a = [k_E : \mathbf{F}_p]$, alors on remarquera que, avec cette identification, $\tau|_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} = \sigma^a|_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$.

Pour chaque corps K, Vect_K est la catégorie des K-espaces vectoriels.

2 La réalisation de Betti de l'action de frobenius

2.1 Soit E un corps de nombres et soit X une variété algébrique, propre et lisse sur E. On note $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ la cohomologie de Betti de $X(\mathbf{C})$, $\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ la cohomologie étale ℓ-adique de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ et $\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(X/E)$ la cohomologie de De Rham de X/E. Il y a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ via lequel on identifie $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ avec un sous-espace de $\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$.

Soient Mot_E et $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$ les catégories de motifs sur E et sur $\bar{\mathbf{Q}}$ respectivement, définies par les cycles de Hodge absolus, comme en [DM]. Dans cet article, une classe de Hodge est supposée avoir une composante dans chacune des réalisations de Betti, étale et de De Rham. Soient $h(X) \in \mathrm{Mot}_E$ et $h(X_{\bar{\mathbf{Q}}}) \in \mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$ les objets définis par X et par $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ respectivement et soient $\mathrm{Mot}_E(X)$ et $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}})$ les $\otimes$-sous-catégories de Mot_E et de $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$ engendrées par l'objet de Tate et $h(X)$ respectivement $h(X_{\bar{\mathbf{Q}}})$, comme dans [DM, 1.14].

Le foncteur $X \mapsto \mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ définit un foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ à valeurs dans $\mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}$ sur chacune des catégories Mot_E, $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}$, $\mathrm{Mot}_E(X)$ et $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$. Soit G le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ de $\mathrm{Mot}_E(X)$ et soit $G^0 \subset G$ la composante connexe de l'identité. Dans [DM, 6.23(b)], il est montré que G^0 est le groupe des $\otimes$-automorphismes de la restriction de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ à $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$. On dit que G et G^0 sont les *groupes de Mumford–Tate* de X et de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ respectivement. Si X est une variété abélienne, ce qui sera le cas dans cet article, alors $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $\wedge^* \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ et G

s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q}))\times \mathbf{G}_m$. Dans ce cas, on sait grâce à [De, 2.11] que G^0 est le groupe de Mumford–Tate de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ (ou de $X_{\mathbf{C}}$) au sens habituel.

Comme on a identifié $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})\otimes\mathbf{Q}_\ell=\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell)$, le groupe $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ s'identifie au groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre $\mathrm{H}^*_\ell\colon \mathrm{Mot}_E(X)\to\mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}_\ell}$ défini par la cohomologie étale ℓ-adique. Il s'ensuit de [DM, 6.23(d)] que la représentation ℓ-adique $\rho_\ell\colon \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)\to\mathrm{GL}(\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell))$ induit une application $\rho_\ell\colon \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)\to G(\mathbf{Q}_\ell)$.

Supposons désormais que X ait bonne réduction en $\mathfrak{p}_E$, c'est à dire qu'il existe un schéma propre et lisse $\mathscr{X}/\mathscr{O}_{E,\mathfrak{p}}$ tel que $\mathscr{X}_E=X$. Soit $k=k_E$. Dans ce cas, on peut considérer la cohomologie cristalline $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k))$ de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$ et l'on inclut alors une composante cristalline dans la donnée d'une classe de Hodge. Le frobenius absolu $\mathrm{Fr}_{\mathrm{abs}}\colon \mathscr{X}_k\to\mathscr{X}_k$ induit une application σ-linéaire

$$\mathrm{F}_{\mathrm{cris}}\colon \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k))\to\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k)).$$

Par abus de notation, on note toujours $\mathrm{F}_{\mathrm{cris}}$ l'extension σ-linéaire de $\mathrm{F}_{\mathrm{cris}}$ à

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))=\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k))\otimes W(\bar{k}).$$

Si $a=[k:\mathbf{F}_p]$, alors on pose $\mathrm{Frob}:=\mathrm{F}^a_{\mathrm{cris}}\colon \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k))\to\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k))$. C'est une application $W(k)$-linéaire. On note Frob son extension $W(\bar{k})$-linéaire à $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$.

La cohomologie cristalline $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k))$ définit un foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}$ de $\mathrm{Mot}_E(X)$ à valeurs dans $\mathrm{Vect}_{P(k)}$. De même, on définit un foncteur fibre $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}$ de $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$ à valeurs dans $\mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$. Soit G_{cris} le groupe des $\otimes$-endomorphismes de la restiction

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}\colon\ \mathrm{Mot}_E(X)\to\mathrm{Vect}_{P(k)}$$

de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}$. D'après un théorème de Blasius, [Og, 4.1], $\mathrm{Frob}\in\mathrm{End}(\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k)))$ définit un élément $\mathrm{Frob}\in G_{\mathrm{cris}}(P(k))$ si X est une variété abélienne.

Finalement on définit I_X comme le $G^0_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$-$(G^0_{\mathrm{cris}})_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$-torseur des $\otimes$-isomorphismes des foncteurs fibres $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}$ de $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X)$.

2.2 Théorème. *Supposons, avec les notations et définitions du 2.1, que X soit une variété abélienne et que X ait bonne réduction ordinaire en $\mathfrak{p}_E$, donc que $\mathscr{X}_k$ soit une variété abélienne ordinaire. Alors il existe $F\in G(\mathbf{Q})$ tel que*

- *pour tout nombre premier $\ell\neq p$, il existe $g_\ell\in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ tel que $\rho_\ell(\tau)^{-1}=g_\ell F g_\ell^{-1}$ et*
- *il existe $g_p\in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ tel que* $\mathrm{Frob}=g_pFg_p^{-1}$.

Démonstration. On se ramène d'abord au cas ou X est principalement polarisée. Par [M-B, IX, 1.1], la variété abélienne $Y = (X \times X^*)^4$ admet une polarisation principale et est isogène sur E à X^8. Clairement, $\mathrm{Mot}_E(X^8)$ est une sous-categorie pleine de $\mathrm{Mot}_E(X)$ et comme $\mathrm{Mot}_E(X)$ est engendrée par $h^1(X)$ (cf. [DM, §6]) et comme $h^1(X)$ est un sous-objet de $h^1(X^8)$, on a en effet une égalité. De même, $\mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X) = \mathrm{Mot}_{\bar{\mathbf{Q}}}(X^8)$. Il s'ensuit que le groupe de Mumford–Tate G_Y de Y (resp. le groupe G_Y^0, $G_{\mathrm{cris},Y}$, $G^0_{\mathrm{cris},Y}$, le torseur I_Y) est isomorphe à $G = G_X$ (resp. à G^0, G_{cris}, G^0_{cris}, I_X). Dans chaque cas, un isomorphisme est donné par conjugaison avec i^*, où $i\colon X^8 \to Y$ désigne une E-isogénie. Comme i est définie sur E, ces isomorphismes commutent aux représentations ℓ-adiques est respectent les éléments de Frobenius cristallins. Ceci montre qu'il suffit de montrer le théorème sous la condition supplémentaire que X est principalement polarisée, une condition qu'on supposera satisfaite dans ce qui suit.

Pour définir l'application $\rho_\ell(\tau)$, on considère l'application

$$\varphi_\tau = \mathrm{id} \times \mathrm{Spec}\,\tau\colon X_{\bar{\mathbf{Q}}} \longrightarrow X_{\bar{\mathbf{Q}}},$$

qu'on peut considérer comme un endomorphisme τ-linéaire de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$. On définit $\rho_\ell(\tau)$ comme étant le morphisme φ_τ^*. Soient $k = \mathscr{O}_E/\mathfrak{p}_E$ et $\bar{k} = \bar{\mathscr{O}}/\bar{\mathfrak{p}}$ et soit $\mathrm{Fr}_\tau\colon \mathscr{X}_k \to \mathscr{X}_k$ le morphisme de Frobenius rélatif associé à $\bar{\tau}$. On continue d'écrire Fr_τ pour l'endomorphisme de $\mathscr{X}_{\bar{k}}$ obtenu par extension du corps de base. On sait ([Mi, 13.5]) que

$$\mathrm{Fr}_\tau^*\varphi_\tau^*\colon \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell) \to \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$$

est l'identité. Il s'ensuit que l'isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ transforme l'action de $\rho_\ell(\tau) = \varphi_\tau^*$ en $(\mathrm{Fr}_\tau^*)^{-1}$.

Soit $\mathrm{Fr}_{\mathrm{abs}}\colon \mathscr{X}_k \to \mathscr{X}_k$ le frobenius absolu de $\mathscr{X}_k$. Rappelons de 2.1 que si $a = [k : \mathbf{F}_p]$, alors $\mathrm{Frob}\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k)) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/W(k))$ est par définition égale à $(\mathrm{Fr}^a_{\mathrm{abs}})^*$. Après extension des scalaires à $\bar{k}$, on trouve que $(\mathrm{Fr}^a_{\mathrm{abs}})_{\bar{k}} = \mathrm{Fr}_\tau$, donc on voit que

$$\mathrm{Frob}\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$$

(l'extension $W(\bar{k})$-linéaire de Frob à $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$) est égale à Fr_τ^*.

On se propose de comparer la cohomologie de X à celle d'une variété abélienne Z de type CM. Parce qu'on veut montrer un lemme sur les classes de Hodge sur X, il faut trouver une telle Z munie des mêmes classes de Hodge que X. En s'inspirant de [De], on est ainsi amené à étudier la variété de Shimura définie par le groupe de Mumford–Tate de X. On cherche un point sur cette variété correspondant à une variété abélienne de type CM. Comme l'énoncé porte aussi sur l'élément de Frobenius en $\mathfrak{p}$, il est souhaitable que la réduction de Z soit isomorphe à celle de X. Ce qu'on cherche est donc un point spécial de cette variété de Shimura dont la réduction est égale à la réduction du point correspondant à X. Une fois qu'on a trouvé la variété Z cherchée, on utilise la cohomologie du schéma abélien universel sur la variété de Shimura pour trouver des identifications de la cohomologie de X avec la cohomologie de Z qui respectent les classes de Hodge.

On écrira $H := \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})$ et $H_{\mathbf{Z}} := \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{Z}) \subset H$. Soit $h\colon S \to G^0_{\mathbf{R}}$ le morphisme qui définit la structure de Hodge sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}),\mathbf{R}) = H \otimes \mathbf{R}$. Pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset G^0(\mathbf{A}^f)$, on peut considérer le modèle faiblement canonique ${}_KM(G^0,h)/\bar{\mathbf{Q}}$ de la variété de Shimura défini par ces données. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $(p,N)=1$ et soit $K_N \subset \mathrm{GL}(H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{A}^f) \cap G^0(\mathbf{A}^f)$ le sous-groupe de congruence des éléments congrus à id modulo N. Soit A_N l'espace de modules de variétés abéliennes principalement polarisées sur $\bar{\mathbf{Q}}$, de dimension $\dim X$, munies d'une structure de niveau N. On sait (cf. [MF, 7.9]) que pour N assez grand tel que $(p,N)=1$, A_N est un espace de modules fin et qu'il admet un modèle lisse $\mathscr{A}_N \to \operatorname{Spec} \bar{\mathscr{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$. Il s'ensuit de [No, 3.3] qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ avec $(p,N)=1$ tel que l'application canonique $M_N := {}_{K_N}M(G^0,h) \to A_N$ soit une immersion fermée. On suppose que N soit assez grand pour qu'en plus A_N et M_N soient des espaces de modules fins et que K_N agisse trivialement sur l'espace des cycles de Hodge absolus sur $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$. Par construction de M_N, on a une structure de niveau N sur X telle que X, munie de cette structure, correspond à un point de M_N. Les hypothèses entraînent que A_N et M_N sont lisses, qu'il existe des schémas abéliens universels sur A_N et sur M_N et que tout cycle de Hodge sur $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$ s'étend à un cycle de Hodge sur le schéma abélien universel sur M_N. Tout ceci est encore vrai pour la composante connexe de M_N contenant le point correspondant à X. On remplace M_N par cette composante, donc dans la suite on pourra supposer que M_N soit connexe. Soit $\widetilde{M}'$ l'adhérence de M_N dans $\mathscr{A}_N$ et soit $\widetilde{M}$ le normalisé de $\widetilde{M}'$. On note α l'application canonique $\widetilde{M} \to \mathscr{A}_N$, composée de l'application naturelle $\widetilde{M} \to \widetilde{M}'$ et l'immersion $\widetilde{M}' \to \mathscr{A}_N$. Le schéma abélien $\mathscr{X}$ correspond à un point $x \in \mathscr{A}_N(\bar{\mathscr{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}})$ et comme $x_{\bar{\mathbf{Q}}} \in M_N(\bar{\mathbf{Q}})$, il existe un point $\tilde{x} \in \widetilde{M}(\bar{\mathscr{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}})$ tel que $\alpha(\tilde{x}) = x$.

D'après [No, 3.9], il existe un point $\tilde{z} \in \widetilde{M}(\bar{\mathscr{O}}_{\bar{\mathfrak{p}}})$ dont la réduction modulo $\bar{\mathfrak{p}}$ est égale à la réduction de $\tilde{x}$ et tel que le schéma abélien $\mathscr{Z}$ correspondant à $\alpha(\tilde{z})$ est de type CM. Soit $Z/\bar{\mathbf{Q}}$ la fibre générique de $\mathscr{Z}$. Parce que $\mathscr{Z}_{\bar{k}} = \mathscr{X}_{\bar{k}}$, la variété abélienne $\mathscr{Z}_{\bar{k}}$ est ordinaire et on a donc une égalité $\mathrm{End}^0(\mathscr{Z}_{\bar{k}}) = \mathrm{End}^0(Z)$. Cela implique que $\mathrm{Fr}_\tau^{-1} \in \mathrm{End}^0(\mathscr{X}_{\bar{k}}) = \mathrm{End}^0(\mathscr{Z}_{\bar{k}})$ se relève en $F_Z \in \mathrm{End}^0(Z)$. Via l'isomorphisme

$$\iota_\ell\colon \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathscr{X}_{\bar{k}},\mathbf{Q}_\ell) \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(Z,\mathbf{Q}_\ell),$$

l'action de $\rho_\ell(\tau) = \varphi_\tau^*$ se transforme en F_Z^*. On a trivialement que

$$\mathrm{Fr}_\tau^* = (F_Z^{-1})_{\bar{k}}^*\colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}} \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}.$$

On peut maintenant définir la transformation F. Comme M_N est connexe, il existe un chemin γ dans $M_N(\mathbf{C})$ reliant $\alpha(\tilde{x}_{\mathbf{C}})$ et $\alpha(\tilde{z}_{\mathbf{C}})$. Soit

$$\iota_B \colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(Z(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$$

l'isomorphisme défini par γ. On pose $F := \iota_B^{-1} \circ (F_Z^{-1})^* \circ \iota_B$. Avec cette définition, il est évident que, pour que $\varphi_\tau^* = g_\ell F^{-1} g_\ell^{-1}$, il faut définir $g_\ell \in \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)) = \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell)$ comme $g_\ell := \iota_\ell^{-1} \circ (\iota_B)_{\mathbf{Q}_\ell}$. Pour ce qui concerne la cohomologie cristalline et l'application g_p, il s'ensuit de [Wi, 4.2.2] qu'il existe un élément $g_Z \in I_Z(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ et comme g_Z respecte les classes de Hodge, on a

$$g_Z \circ (F_Z^{-1})^* \circ g_Z^{-1} = (F_Z^{-1})^*_{\bar{k}} = \mathrm{Fr}_\tau^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{Z}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}).$$

Le fait que $\mathscr{X}_{\bar{k}} = \mathscr{Z}_{\bar{k}}$ implique que $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{Z}_{\bar{k}}/W(\bar{k}))$, donc pour avoir $\mathrm{Fr}_\tau^* = g_p F g_p^{-1}$, on peut prendre $g_p = g_Z \circ (\iota_B)_{\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}}$. Pour achever la démonstration du Théorème 2.2, il reste à montrer le lemme suivant.

2.3 Lemme. *Avec les notations ci-dessus, on a* $F \in G(\mathbf{Q})$, $g_\ell \in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ *et* $g_p \in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$.

Démonstration. Soit c_x un cycle de Hodge absolu dans la cohomologie de $X_{\bar{\mathbf{Q}}}$. Par construction de M_N, il existe un cycle de Hodge c dans la cohomologie du schéma abélien universel $f \colon \mathscr{U} \to M_N$ dont la spécialisation en x est c_x (ce qui justifie la notation). On remarque d'abord que $\iota_{\mathrm{B}}(c_{x,\mathrm{B}}) = c_{z,\mathrm{B}}$, où l'indice B désigne la composante dans la cohomologie de Betti d'une classe de Hodge : c'est évident parce que c_{B} est une section globale d'un système local $\bigotimes_i \mathbf{R}^{n_i} f_*^{\mathrm{an}} \mathbf{Q}(n)$ sur $M_N(\mathbf{C})$ et on a identifié deux fibres de ce système via le chemin γ.

On montre un énoncé analogue pour la cohomologie étale. Soit $\tilde{f} \colon \widetilde{\mathscr{U}} \to \widetilde{M}$ l'image inverse par $\alpha \colon \widetilde{M} \to \mathscr{A}_N$ du schéma abélien universel sur $\mathscr{A}_N$. Comme M_N est lisse, M_N est la fibre générique de $\widetilde{M}$ et la restriction de $\widetilde{\mathscr{U}}$ à M_N est égale à $\mathscr{U}$. On considère le produit tensoriel $\bigotimes_i \mathbf{R}^{n_i} \tilde{f}_*^{\text{ét}} \mathbf{Q}_\ell(n)$ sur $\widetilde{M}$. La réalisation étale ℓ-adique c_ℓ de c est une section de ce système sur la fibre générique de $\widetilde{M}$. Soit $\widetilde{M}^{\mathrm{hs}}$ le henselisé strict du localisé $\widetilde{M}_{\tilde{x}_{\bar{k}}}$ et soit $\mathscr{H}_\ell$ la restriction à $\widetilde{M}^{\mathrm{hs}}$ de $\bigotimes_i \mathbf{R}^{n_i} \tilde{f}_*^{\text{ét}} \mathbf{Q}_\ell(n)$. Comme $\mathscr{H}_\ell$ est constant, la restriction de c_ℓ à la fibre générique de $\widetilde{M}^{\mathrm{hs}}$ s'étend à une section $\tilde{c}_\ell$ de $\mathscr{H}_\ell$. Les identifications

$$\bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)(n) \cong \bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\text{ét}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_\ell)(n) \cong \bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\text{ét}}(Z, \mathbf{Q}_\ell)(n)$$

proviennent de l'identification de trois fibres de $\mathscr{H}_\ell$. Il s'ensuit que ces isomorphismes et donc leur composé ι_ℓ envoient la valeur de $\tilde{c}_\ell$ en chacun des points sur sa valeur en tout autre point, ce qui montre que $\iota_\ell(c_{x,\ell}) = c_{z,\ell}$.

Les observations ci-dessus nous permettent de montrer que $g_\ell \in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$. On se rappelle qu'on a identifié $\mathrm{H}^i_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell = \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$. Cette identification envoie $c_{x,B} \otimes 1$ sur $c_{x,\ell}$, donc il suffit de montrer que $g_\ell(c_{x,\ell}) = c_{x,\ell}$. Mais cela est évident après ce qui précède parce que $g_\ell = \iota_\ell^{-1} \circ (\iota_B)_{\mathbf{Q}_\ell}$.

Pour montrer que $g_p \in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ il faut montrer que $g_p(c_{x,B}) = c_{x,\mathrm{cris}}$, où $c_{x,\mathrm{cris}}$ est la composante de c_x dans la cohomologie cristalline. Il suffit en effet de montrer ceci pour

$$(g_p)_{\mathbf{C}_p} \colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C}_p \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \mathbf{C}_p,$$

où $\mathbf{C}_p$ est le complété de $\bar{\mathbf{Q}}_p$. Soient $\widehat{M}$ le complété de $\widetilde{M}_{\tilde{x}_{\bar{k}}}$ et $\widehat{\mathscr{U}} = \widetilde{\mathscr{U}}_{\widehat{M}}$. La réalisation de De Rham c_{DR} de c est une section horizontale du produit tensoriel $\bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(\mathscr{U}/M_N)(n)$. Il s'ensuit de [No, 3.5, 3.7 et 3.8] que $\widehat{M}$ est régulier et que, quitte à la remplacer par un multiple, la classe c_{DR} donne, par changement de base, une section horizontale $\hat{c}_{\mathrm{DR}} \in \bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(\widehat{\mathscr{U}}/\widehat{M})(n)$. Comme l'identification

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(X_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p) \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \mathbf{C}_p = \mathrm{H}^i_{\mathrm{cris}}(\mathscr{Z}_{\bar{k}}/W(\bar{k})) \otimes \mathbf{C}_p \cong \mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(Z_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p)$$

identifie les valeurs en $\tilde{x}_{\mathbf{C}_p}$ et $\tilde{z}_{\mathbf{C}_p}$ d'une section horizontale de $\mathrm{H}^i_{\mathrm{DR}}(\widehat{\mathscr{U}}/\widehat{M})$, l'isomorphisme

$$\bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(X_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p)(n) \cong \bigotimes_i \mathrm{H}^{n_i}_{\mathrm{DR}}(Z_{\mathbf{C}_p}/\mathbf{C}_p)(n)$$

envoie $c_{x,\mathrm{DR}} = \hat{c}_{x,\mathrm{DR}}$ sur $c_{z,\mathrm{DR}} = \hat{c}_{z,\mathrm{DR}}$. Ceci implique que l'identification des tenseurs cristallins envoie $c_{x,\mathrm{cris}}$ sur $c_{z,\mathrm{cris}}$. Parce que $g_Z \in I_Z(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$, on a $g_Z(c_{z,B}) = c_{z,\mathrm{cris}}$. On avait déja vu que $\iota_B(c_{x,B}) = c_{z,B}$, donc $g_p(c_{x,B}) = c_{x,\mathrm{cris}}$ comme il fallait montrer.

Il reste à montrer que $F \in G(\mathbf{Q})$. On sait que $\rho_\ell(\tau) \in G(\mathbf{Q}_\ell)$ donc le fait que $g_\ell \in G^0(\mathbf{Q}_\ell)$ implique que $F \in G(\mathbf{Q}_\ell)$. Comme on a également que $F = \iota_B^{-1} \circ (F_Z^{-1})^* \circ \iota_B \in \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}))$, il s'ensuit que $F \in G(\mathbf{Q})$. □□

2.4 Corollaire. *Soit X/E une variété abélienne ayant bonne réduction ordinaire en $\mathfrak{p}_E$, comme dans le Théorème 2.2 et soit $M \in \mathrm{Mot}_E(X)$. Pour tout nombre premier $\ell \neq p$, le polynôme caractéristique de l'automorphismes $\rho_\ell(\tau)^{-1}$ de $\mathrm{H}^*_\ell(M)$ est à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Ces polynômes ne dépendent pas du nombre premier $\ell \neq p$. L'automorphisme* Frob *de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(M)$ a le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. L'isomorphisme canonique $\mathrm{H}^1_{\mathrm{B}}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(M) \otimes \mathbf{Q}_\ell \cong \mathrm{H}^*_\ell(M)$. L'élément $F \in G(\mathbf{Q})$ induit ainsi un automorphisme de $\mathrm{H}^*_\ell(M)$ qui est conjugué à $\rho_\ell(\tau)^{-1}$, ce qui montre le corollaire pour les $\rho_\ell(\tau)^{-1}$. De même, tout élément $g_p \in I_X(\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}^*_{\mathrm{B}}(M) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}} \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(M) \otimes \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ et l'automorphisme de $\mathrm{H}^*_{\mathrm{cris}}(M)$ induit par F est conjugué à Frob. □

Bibliographie

[De] P. Deligne, *Hodge cycles on abelian varieties.* Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties (P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus and K.-y. Shih), Chapter I, pp. 9–100. Lecture Notes in Math. 900; Springer-Verlag, 1982.

[DM] P. Deligne, J. S. Milne, *Tannakian categories.* Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties (P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus and K.-y. Shih), Chapter II, pp. 101–228. Lecture Notes in Math. 900; Springer-Verlag, 1982.

[Mi] J. S. Milne, *Etale Cohomology.* Princeton University Press, 1980.

[M-B] L. Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes.* Astérisque 129; Soc. math. France 1985.

[MF] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory.* Second enlarged edition. Springer-Verlag, 1982.

[No] R. Noot, *Models of Shimura varieties in mixed characteristic.* A paraître dans J. Algebraic Geom.

[Og] A. Ogus, *A p-adic Analogue of the Chowla–Selberg Formula.* p-adic Analysis (F. Baldassarri, S. Bosch and B. Dwork editors), pp. 319–341. Lecture Notes in Math. 1454; Springer-Verlag 1990.

[Se] J-P. Serre, *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques.* Motives (U. Jansen, S. Kleiman, J.-P. Serre editors), pp. 377–400. Proc. Sympos. Pure Math. 55, Part 1. Amer. Math. Soc. 1994.

[ST] J-P. Serre, J. Tate, *Good reduction of abelian varieties.* Ann. of Math. 88 (1968), 492–517.

[Wi] J.-P. Wintenberger, *Torseur entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline; le cas abélien.* Duke Math. J. 62 (1991), 511–526.

Rutger Noot
I. R. M. A. R.
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France
courrier électronique : `noot@univ-rennes1.fr`