Loi des logarithmes itérés bornée pour des martingales multi-dimensionnelles

Davide Giraudo

Ruhr-Universität Bochum

Brest, 6 juin 2019

Loi des logarithmes itérés pour les suites i.i.d.

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. centrée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Si $\mathbb{E}\left[|X_1|^p\right]$ est finie pour un certain $p \in [1,2[$, alors $S_n/n^{1/p} \to 0$ presque sûrement, où $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
- Si $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$ est finie, alors $\left(S_n/\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$.
- Si $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$ est finie, alors la loi des logarithmes itérés a lieu :

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln \ln n}} S_n = -\sqrt{2\mathbb{E}\left[X_1^2\right]} \text{ p.s. et}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln \ln n}} S_n = \sqrt{2\mathbb{E}\left[X_1^2\right]} \text{ p.s.}$$

Loi des logarithmes itérés bornée pour les suites i.i.d.

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. centrée telle que $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$ soit finie. Alors la variable aléatoire

$$M := \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{nLL(n)}} |S_n|$$

est presque sûrement finie, où $L(x) = \max\{1, \ln x\}$ et $LL(x) = L(L(x))$.

Il est également possible (Pisier, 1976) de contrôler les moments de M : pour tout $p \in [1, 2[$,

$$\|M\|_p \leqslant C_p \|X_1\|_2 ,$$

où C_p ne dépend que de p.

Martingales à accroissement stationnaires

Définition

On dit que $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite strictement stationnaires d'accroissement d'une martingale si :

- la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est strictement stationnaire, au sens où $(X_1,\ldots,X_n)$ a la mmême loi que $(X_{1+k},\ldots,X_{n+k})$ pour tous $k,n\geqslant 1$ et
- il existe une suite croissante $(\mathcal{F}_i)_{i\geqslant 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que X_i est $\mathcal{F}_i$-mesurable pour tout $i\geqslant 1$ et $\mathbb{E}\left[X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]=0$.

Théorème (Cuny, 2015)

Si $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale alors pour tout $1<p<2$,

$$\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{nLL(n)}}\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\right\|_p\leqslant C_p\left\|X_1\right\|_2,$$

où C_p ne dépend que de p.

Champs i.i.d.

Soit $d \geqslant 2$ un entier et $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ i.i.d. centré. On définit un ordre partiel sur $\mathbb{Z}^d$ par

$$\boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{j} \Leftrightarrow i_q \leqslant j_q \text{ pour tout } q \in \{1, \dots, d\} .$$

Les sommes partielles sur les rectangles sont définies par

$$S_{\boldsymbol{n}} := \sum_{\boldsymbol{1} \preccurlyeq \boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}}.$$

Théorème (Wichura, 1973)

Si $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}}^2 \left(L\left(\left|X_{\boldsymbol{0}}\right|\right)\right)^{d-1} / LL\left(\left|X_{\boldsymbol{0}}\right|\right)\right] < +\infty$, *alors*

$$\limsup_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} S_{\boldsymbol{n}} = \left\|X_{\boldsymbol{0}}\right\|_2 \sqrt{d} = - \liminf_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, L\left(L\left(|\boldsymbol{n}|\right)\right)}} S_{\boldsymbol{n}},$$

où $|\boldsymbol{n}| = \prod_{q=1}^{d} n_q$.

Objectif principal

Définition

Soit $d \geqslant 1$. Un champ aléatoire $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est dit strictement stationnaire si pour tout entier k, tous $\boldsymbol{i_1}, \dots, \boldsymbol{i_k}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$, les vecteurs $(X_{\boldsymbol{i_1}}, \dots, X_{\boldsymbol{i_k}})$ et $\left(X_{\boldsymbol{i_1}+\boldsymbol{j}}, \dots, X_{\boldsymbol{i_k}+\boldsymbol{j}}\right)$ ont la même loi.

Objectif : établir la finitude et contrôler les moments de la variable aléatoire

$$M := \sup_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}| \, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left|S_{\boldsymbol{n}}\right|, \quad S_{\boldsymbol{n}} := \sum_{\boldsymbol{1} \preccurlyeq \boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}}, |\boldsymbol{n}| = \prod_{q=1}^{d} n_q,$$

si possible, ou bien avec une autre normalisation

$$M := \sup_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}| \, a_{\boldsymbol{n}}}} \left|S_{\boldsymbol{n}}\right|.$$

Martingales pour l'ordre lexicographique

On munit $\mathbb{Z}^d$ de l'ordre lexicographique : $\boldsymbol{i} \leqslant_{\text{lex}} \boldsymbol{j}$ si $i_d = j_d$ ou bien $i_d < j_d$ et il existe un $q \in \{0, \ldots, d-1\}$ tel que $i_p = j_p$ pour $q + 1 \leqslant p \leqslant d$ et $i_q < j_q$.

Définition

On dit que $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ d'accroissements d'une martingale pour l'ordre lexicographique s'il existe une collection de tribus $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ telle que

- si $\boldsymbol{i} \leqslant_{\text{lex}} \boldsymbol{j}$, alors $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} \subset \mathcal{F}_{\boldsymbol{j}}$ et
- pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$, $X_{\boldsymbol{i}}$ est $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}$-mesurable et si $\boldsymbol{i} \leqslant_{\text{lex}} \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i} \neq j$, alors $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{j}} \mid \mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}\right] = 0$.

Loi des logarithmes itérés pour les martingales pour l'ordre lexicographique

Théorème (G., 2019+)

Soit $(X_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale pour l'ordre lexicographique. Alors pour tout $p \in]1,2[$,

$$\left\| \sup_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|\, LL\left(|\mathbf{n}|\right)}} \left|S_{\mathbf{n}}\right| \right\|_p \leqslant C_{p,d} \left\|X_{\mathbf{0}}\right\|_{2,d-1},$$

où $C_{p,d}$ ne dépend que de p et de d et $\|\cdot\|_{2,q}$ désigne la norme d'Orlicz associée à la fonction $x \mapsto x^2\left(\ln\left(1+x\right)\right)^q$.

- **Avantage :** on retrouve (au terme en $LL(|X_{\mathbf{0}}|)$ près) une condition similaire au cas i.i.d pour la LLI classique, et le même résultat que pour les martingales en dimension un.
- **Inconvénient :** l'approximation par ce type de martingale n'est pas aisé.

Question : existe-t-il d'autre type de martingales multidimensionnelles vérifiant les contraintes suivantes :

- l'approximation par ces martingales est aisée ;
- il est possible d'établir une loi des logarithmes itérés avec des conditions raisonnables sur les moments.

Orthomartingales : définition (1)

Idée globale : on souhaite exploiter une propriété de martingale en sommant sur des rectangles. On aimerait utiliser les arguments connus en dimension quelque soit la coordonnée suivant laquelle on somme.

Idée en dimension deux. Soit

$$S_{n_1,n_2} := \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} X_{i,j}.$$

Il faut définir une filtration ayant deux indices $\left(\mathcal{F}_{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$. On veut que

- pour n_1 fixé, $\left(S_{n_1,n_2}\right)_{n_2\geqslant 1}$ soit une martingale ;
- pour n_2 fixé, $\left(S_{n_1,n_2}\right)_{n_1\geqslant 1}$ soit une martingale.

On doit donc avoir pour tous i et j,

$$\mathbb{E}\left[X_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i,j-1}\right] = \mathbb{E}\left[X_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i-1,j}\right] = 0.$$

Orthomartingales : définition (2)

On aimerait utiliser des arguments de troncature comme en dimension un : si $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite d'accroissements d'une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_i)_{i\geqslant 0}$, alors pour tout R, $(X_i')_{i\geqslant 1}$ et $(X_i'')_{i\geqslant 1}$ sont aussi des suites d'accroissements d'une martingale, avec

$$X_i' := X_i \mathbf{1}\left\{|X_i| \leqslant R\right\} - \mathbb{E}\left[X_i \mathbf{1}\left\{|X_i| \leqslant R\right\} \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$

$$X_i'' := X_i \mathbf{1}\left\{|X_i| > R\right\} - \mathbb{E}\left[X_i \mathbf{1}\left\{|X_i| > R\right\} \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]$$

et $X_i = X_i' + X_i''$. On veut utiliser la même idée en dimension deux :

$$\begin{aligned} X_{i,j}' := {} & X_{i,j} \mathbf{1}\left\{|X_{i,j}| \leqslant R\right\} - \mathbb{E}\left[X_{i,j} \mathbf{1}\left\{|X_{i,j}| \leqslant R\right\} \mid \mathcal{F}_{i,j-1}\right] \\ & - \mathbb{E}\left[X_{i,j} \mathbf{1}\left\{|X_{i,j}| \leqslant R\right\} \mid \mathcal{F}_{i-1,j}\right] + \mathbb{E}\left[X_{i,j} \mathbf{1}\left\{|X_{i,j}| \leqslant R\right\} \mid \mathcal{F}_{i-1,j-1}\right] \end{aligned}$$

mais pour que $\left(X_{i,j}'\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ soit une suite d'accroissements d'une martingale, il faut que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{i,j-1}\right] \mid \mathcal{F}_{i-1,j}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{i-1,j}\right] \mid \mathcal{F}_{i,j-1}\right].$$

Orthomartingales : contrainte sur la filtration

Définition

On dit que $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est une filtration si $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} \subset \mathcal{F}_{\boldsymbol{j}}$ a lieu pour tous $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ tels que $\boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{j}$.

On note $P_{\boldsymbol{i}} \colon \mathbb{L}^1 \to \mathbb{L}^1$ l'opérateur défini par $P_{\boldsymbol{i}}(Y) := \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}]$.

Définition

La filtration $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est commutante si pour tous $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$,

$$P_{\boldsymbol{i}} \circ P_{\boldsymbol{j}} = P_{\boldsymbol{j}} \circ P_{\boldsymbol{i}} = P_{\min\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}}.$$

Exemples de filtrations commutantes

1. Soit $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ i.i.d. et $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} := \sigma\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{j}}, \boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i}\right\}$. Alors $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est commutante.
2. Soient $\left(\varepsilon_i^q\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ des copies indépendantes de la suite i.i.d. $(\varepsilon_u)_{u\in\mathbb{Z}}$. Soit $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} := \sigma\left\{\varepsilon_{j_q}^q, j_q \leqslant i_q, 1 \leqslant q \leqslant d\right\}$. Alors $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est commutante.

Définition des orthomartingales

Définition

Soit $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ une filtration commutante. On dit que le champ aléatoire $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de type accroissements d'une orthomartingale si pour chaque $\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d$, $X_{\boldsymbol{i}}$ est $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}$-mesurable et pour tout $q\in\{1,\dots,d\}$, $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}}\mid\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{e_q}}\right]=0$, où $\boldsymbol{e_q}$ est le q-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Exemples

1. Un champ i.i.d. centré est un champ de type accroissements d'une orthomartingale.
2. Soient $\left(\varepsilon_i^q\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ des copies indépendantes de la suite i.i.d. centrée $(\varepsilon_u)_{u\in\mathbb{Z}}$. Soit $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}:=\sigma\left\{\varepsilon_{j_q}^q, j_q\leqslant i_q, 1\leqslant q\leqslant d\right\}$. Posons $X_{\boldsymbol{i}}=\prod_{q=1}^d\varepsilon_{i_q}^q$. Alors $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de type accroissements d'une orthomartingale.

Propriétés des orthomartingales (1)

En dimension un : si $(D_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite d'accroissement d'une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_j)_{j\geqslant 0}$, alors pour tout $x>0$,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>x\right\}\leqslant\int_1^{+\infty}\mathbb{P}\left\{|S_n|>xu/2\right\}\mathrm{d}u.$$

Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire de type accroissements d'une orthomartingale et $S_{\boldsymbol{n}}:=\sum_{\boldsymbol{1}\preccurlyeq\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{n}}X_{\boldsymbol{i}}$. Alors

$$\mathbb{P}\left\{\max_{\boldsymbol{1}\preccurlyeq\boldsymbol{n}\preccurlyeq\boldsymbol{N}}|S_{\boldsymbol{n}}|>x\right\}\leqslant\int_1^{+\infty}\mathbb{P}\left\{|S_{\boldsymbol{N}}|>xu2^{-d}\right\}(1+\log u)^{d-1}\,\mathrm{d}u.$$

En particulier, pour $p>1$,

$$\mathbb{E}\left[\max_{\boldsymbol{1}\preccurlyeq\boldsymbol{n}\preccurlyeq\boldsymbol{N}}|S_{\boldsymbol{n}}|^p\right]\leqslant C_{p,d}\mathbb{E}\left[|S_{\boldsymbol{N}}|^p\right].$$

Propriétés des orthomartingales (2)

En dimension un : si $(D_j)_{j \geqslant 1}$ est une suite d'accroissement d'une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_j)_{j \geqslant 0}$, alors pour tout $p \geqslant 2$,

$$\|S_n\|_p^2 \leqslant (p-1) \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_p^2 .$$

Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire de type accroissements d'une orthomartingale et $S_{\boldsymbol{n}} := \sum_{\boldsymbol{1} \preccurlyeq \boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}}$. Alors

$$\|S_{\boldsymbol{n}}\|_p^2 \leqslant (p-1)^d \sum_{\boldsymbol{1} \preccurlyeq \boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{n}} \|X_{\boldsymbol{i}}\|_p^2 .$$

Orthomartingale, normalisation

Soient $\left(\varepsilon_i^q\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ des copies indépendantes de la suite i.i.d. centrée $(\varepsilon_u)_{u\in\mathbb{Z}}$, $q=1,2$. Soit $X_{i,j} := \varepsilon_i^1\varepsilon_j^2$, où ε_1^1 est bornée. Pour tous n_1, n_2,

$$\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 L(L(n_1 n_2))}}\left|S_{n_1,n_2}\right| = \frac{1}{\sqrt{n_1 L(L(n_1 n_2))}}\left|\sum_{i=1}^{n_1}\varepsilon_i^1\right|\frac{1}{\sqrt{n_2}}\left|\sum_{j=1}^{n_2}\varepsilon_j^2\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n_1 L(L(n_1))}}\left|\sum_{i=1}^{n_1}\varepsilon_i^1\right| \cdot \frac{\sqrt{L(L(n_1 n_2))}}{\sqrt{L(L(n_1))}}\frac{1}{\sqrt{n_2}}\left|\sum_{j=1}^{n_2}\varepsilon_j^2\right|$$

donc

$$\limsup_{n_1\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 L(L(n_1 n_2))}}\left|S_{n_1,n_2}\right| \geqslant \sqrt{2}\left\|\varepsilon_0^1\right\|_2\frac{1}{\sqrt{n_2}}\left|\sum_{j=1}^{n_2}\varepsilon_j^2\right|.$$

Orthomartingales : résultat

La variable aléatoire

$$\sup_{n_1,n_2\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n_1 n_2 L\left(L\left(n_1 n_2\right)\right)}}\left|S_{n_1,n_2}\right|$$

est presque sûrement infinie. On choisit donc

$$M := \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{\left|S_{\boldsymbol{n}}\right|}{\left|\boldsymbol{n}\right|^{1/2}\prod_{i=1}^{d} L\left(L\left(n_i\right)\right)^{1/2}}.$$

Théorème (G., (2019+))

Soit $\left(X_{\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire de type accroissement d'orthomartingale. Pour tout $p\in]1,2[$,

$$\left\|M\right\|_p \leqslant C_{p,d}\left\|X_{\mathbf{0}}\right\|_{2,2(d-1)}.$$

Grandes lignes de la démonstration

Étapes :

1. Utiliser des arguments similaires à ceux de l'inégalité maximale de Doob pour restreindre le supremum sur $\mathbb{N}^d$ à celui sur les éléments de $\mathbb{N}^d$ dont toutes les coordonnées sont dyadiques.

2. Utiliser une inégalité de Fan, Grama et Liu (Statistics 51, 2017) :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} d_j\right| > x\right\} \cap \left\{\sum_{j=1}^{n} d_j^2 \leqslant y\right\}\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right). \qquad (*)$$

   - **Ordre lexicographique :** application de (*) en réécrivant la somme sur un rectangle à coordonnées dyadiques comme une somme d'une martingale unidimensionnelle + théorème ergodique maximal.
   - **Orthomartingales :** on traite la somme des carrés à l'aide du théorème ergodique maximal et on se ramène au cas de la dimension inférieure.

Questions étudiées

1. Cas des fonctions de champs i.i.d. : application aux champs linéaires et de Volterra.
2. Approximation par orthomartingales : conditions portant sur les variables aléatoires $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right]$.
3. Loi des logarithmes itérés classique pour les orthomartingales lorsqu'un opérateur de décalage est ergodique.

Questions restantes

1. Examiner l'optimalité dans le résultat pour les orthomartingales.
2. Traiter le cas de la dimension infinie (espace de Banach). Cela semble possible pour la loi des logarithmes itérés via une étape de troncature et une inégalité de Pinelis.
3. Contrôler la queue de la variable aléatoire maximale M à l'aide d'une fonctionnelle de la queue de $|X_{\mathbf{0}}|$. En particulier, on peut chercher à obtenir le meilleur résultat d'intégrabilité possible lorsque $X_{\mathbf{0}}$ a des moments d'ordre $p > 2$, des moments exponentiels ou est bornée.