Vitesse de convergence dans le théorème limite central pour des sommes pondérées de champs aléatoires

Davide Giraudo

Ruhr-Universität Bochum

Mulhouse, 14 mars 2019

Sommes de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\left(X_j\right)_{j \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. Ses sommes partielles sont définies par $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ et on s'intéresse à leur comportement asymptotique.

Le cas le plus favorable est celui où la suite $\left(X_j\right)_{j \geqslant 1}$ est indépendante, *i. e.*, pour tout entier n et tous boréliens $B_1, \ldots, B_n$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n \left\{\omega \in \Omega \mid X_j(\omega) \in B_j\right\}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}\left(\left\{X_j \in B_j\right\}\right),$$

et la suite $\left(X_j\right)_{j \geqslant 1}$ est identiquement distribuée, *i. e.*, pour tout entier j et tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left\{X_j \in B\right\} = \mathbb{P}\left\{X_1 \in B\right\}$.

Même dans ce cas, la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ ne converge pas (sauf si $X_j = 0$).

Loi des grands nombres

Lorsque X_1 a une espérance finie, *i. e.*,

$$\mathbb{E}\left[|X_1|\right] = \int_{\mathbb{R}} |x| \, d\mathbb{P}_{X_1}(x)$$

où $\mathbb{P}_{X_1}(B) = \mathbb{P}\{X_1 \in B\}$, alors il existe $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega'$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} S_n(\omega) = \mathbb{E}[X_1] =: \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_{X_1}(x).$$

Théorème limite central

Soit $\left(X_j\right)_{j\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendante et identiquement distribuée. On suppose que $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$ et que $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 0$. Alors pour toute fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(N\right)\right],$$

ou, de manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \mathbb{P}\left\{N \leqslant x\right\},$$

où N est de loi normale centrée réduite, *i.e.*,

$$\mathbb{P}\left\{N \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Mesure de la vitesse de convergence

Il s'avère que sous les conditions précédentes, lorsque $\sigma \neq 0$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$:

$$\delta_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant x \right\} - \mathbb{P}\left\{ \sigma N \leqslant x \right\} \right| \to 0.$$

Question : à quelle vitesse la suite $(\delta_n)_{n \geqslant 1}$ tend-elle vers 0 ?

Berry-Esseen (1941-1942) : si $\mathbb{E}\left[|X_1|^3 \right]$ est finie et $\mathbb{E}\left[X_1^2 \right] = 1$, alors

$$\delta_n \leqslant C \mathbb{E}\left[|X_1|^3 \right] \frac{1}{\sqrt{n}},$$

où C est une constante numérique.

Peut-on améliorer le $n^{-1/2}$?

Soit $(X_j)_{j \geqslant 1}$ i.i.d. telle que $\mathbb{P}\left\{X_j = 1\right\} = \mathbb{P}\left\{X_j = -1\right\} = 1/2$. Notons $F_n(x) := \mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\}$. Par symétrie,

$$F_{2n}(0) = \frac{1}{2}(1 + \mathbb{P}(S_{2n} = 0))$$

donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{2n}(x) - \mathbb{P}\left\{N \leqslant x\right\}| \geqslant |F_{2n}(0) - \mathbb{P}\left\{N \leqslant 0\right\}| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \binom{2n}{n} 2^{-2n}.$$

et par la formule de Stirling, le dernier terme se comporte comme du $n^{-1/2}$.

Objectifs

Nous allons étudier la vitesse de convergence dans le théorème limite central dans le contexte suivant :

$$S_n = \frac{1}{\left\| b_{n,\cdot} \right\|_2} \sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} b_{n,\boldsymbol{i}} X_{\boldsymbol{i}},$$

où $b_{n,\cdot} \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$, $d \geqslant 1$ et $\left(X_{\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est une collection de variables aléatoires.

Objectifs :

1. trouver une condition portant sur la famille des poids $\left(b_{n,\boldsymbol{i}}\right)_{n \geqslant 1, \boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$, sur la dépendence et les moments de $\left(X_{\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ qui doit :
   1. être facilement vériable ;
   2. garantir la convergence de S_n vers une loi normale centrée réduite.
2. Donner une estimation de la vitesse de convergence.

Motivation des sommes pondérées

Modèle de régression.

On considère le modèle de régression

$$Y_{\boldsymbol{i}} := g\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{i}\right) + X_{\boldsymbol{i}}, \quad \boldsymbol{i} \in \{1, \dots, n\}^d =: \Lambda_n,$$

où $g\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ inconnue $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ une collection de variables aléatoires.

On estime la fonction g à l'aide de l'estimateur à noyau

$$g_n(x) := \frac{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} Y_{\boldsymbol{i}} K\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}/n}{h_n}\right)}{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} K\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}/n}{h_n}\right)}, \quad \boldsymbol{x} \in [0,1]^d,$$

où $K\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est un noyau et $h_n \to 0$, $nh_n \to +\infty$ et $nh_n^{d+1} \to 0$.

Définition

Définition

Un champ aléatoire est une famille de variables aléatoires indexée par $\mathbb{Z}^d$.

Un champ aléatoire $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est dit strictement stationnaire si pour tout N et tous $\boldsymbol{i_1}, \ldots, \boldsymbol{i_N}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$, les vecteurs $\left(X_{\boldsymbol{i_1}}, \ldots, X_{\boldsymbol{i_N}}\right)$ et $\left(X_{\boldsymbol{i_1}+\boldsymbol{j}}, \ldots, X_{\boldsymbol{i_N}+\boldsymbol{j}}\right)$ ont la meme loi.

Exemple : si $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendant et identiquement distribué alors $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est strictement stationnaire.

Exemples

1. Processus linéaire : soient $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire i.i.d. centré tel que $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{\boldsymbol{0}}^2\right] < +\infty$ et $(a_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$. On définit

$$X_{\boldsymbol{j}} := \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d, \|i\|_\infty \leqslant N} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}.$$

2. Champs de Volterra : soient $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire i.i.d. centré tel que $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{\boldsymbol{0}}^2\right] < +\infty$ et $\left(a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i'}}\right)_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i'}\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\right)$ tels que $a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}} = 0$ pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$. On définit

$$X_{\boldsymbol{j}} := \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i'}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i'}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i'}} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i'}\in\mathbb{Z}^d, \|\boldsymbol{i}\|_\infty, \|\boldsymbol{i'}\|_\infty \leqslant N} a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i'}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i'}}.$$

Mesure de dépendence

Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire strictement stationnaire de la forme

$$X_{\boldsymbol{i}} = f\left(\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}}\right)_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}\right), \tag{CB}$$

où $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ est mesurable et $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est i.i.d.. Soit $\mathcal{F}_m$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$, $\|\boldsymbol{k}\|_\infty \leqslant m$. Si $\mathbb{E}\left[|X_{\boldsymbol{0}}|^p\right]$ est finie, on définit

$$\delta_{m,p} := \left\|\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \mathcal{F}_m\right] - \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \mathcal{F}_{m-1}\right]\right\|_p . \quad m \geqslant 1, p \geqslant 2.$$

Remarque

Par le théorème de convergence des martingales, $\left\|\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \mathcal{F}_m\right] - X_{\boldsymbol{0}}\right\|_p \to 0$ donc $\lim_{m\to+\infty} \delta_{m,p} = 0$ pour tout champ aléatoire de la forme (CB).

Processus linéaire

On considère le champ linéaire

$$X_{\boldsymbol{j}} := \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}.$$

On rappelle que

$$\delta_{m,p} := \left\|\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \mathcal{F}_m\right] - \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \mathcal{F}_{m-1}\right]\right\|_p . \quad m \geqslant 1, p \geqslant 2.$$

où $\mathcal{F}_m$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$, $\|\boldsymbol{k}\|_\infty \leqslant m$.
Alors

$$\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \mathcal{F}_m\right] = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d, \|\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant m} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{-\boldsymbol{i}}$$

donc

$$\delta_{m,p} = \left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d, \|\boldsymbol{i}\|_\infty = m} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{-\boldsymbol{i}}\right\|_p .$$

Inégalité de Rosenthal

Rosenthal (1962) : soit $p \geqslant 2$ et $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendante et centrée.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\|_p \leqslant c_p \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \|Y_i\|_2^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \|Y_i\|_p^p\right)^{1/p}\right),$$

où $\|Y\|_p := \left(\mathbb{E}\left[|Y|^p\right]\right)^{1/p}$ et c_p ne dépend que de p.

Johnson, Schechtman, Zinn (1985) : $c_p = \frac{14.5p}{\log p}$ convient.

On obtient

$$\delta_{m,p} \leqslant 2c_p \|\varepsilon_{\mathbf{0}}\|_p \left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d, \|\boldsymbol{i}\|_\infty = m} a_{\boldsymbol{i}}^2\right)^{1/2}.$$

Cas m-dépendant

Pour une variable aléatoire Z, on définit

$$\delta(Z) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\{Z \leqslant t\} - \mathbb{P}\{N \leqslant t\} \right| .$$

On dit que le champ $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est m-dépendant si pour tous sous-ensembles A et B de $\mathbb{Z}^d$ tels que $\inf \{\|a - b\|_\infty, a \in A, b \in B\} \geqslant m$, les collections $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in A}$ et $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in B}$ sont indépendantes.

Chen, Shao (2004) : si $I \subset \mathbb{Z}^d$ est fini, $(Y_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in I}$ est un champ aléatoire m-dépendant tel que $\mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{i}}|^p\right] < +\infty$, $p \in (2, 3]$ et $\operatorname{Var}\left(\sum_{\boldsymbol{i} \in I} Y_{\boldsymbol{i}}\right) = 1$, alors

$$\delta\left(\sum_{\boldsymbol{i} \in I} Y_{\boldsymbol{i}}\right) \leqslant 75 (10m + 1)^{(p-1)d} \sum_{\boldsymbol{i} \in I} \mathbb{E}\left[|Y_{\boldsymbol{i}}|\right]^p .$$

Idée globales

$$\delta(Z) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\{Z \leqslant t\} - \mathbb{P}\{N \leqslant t\} \right|.$$

El Machkouri, Ouchti (2007) : pour toutes variables aléatoires Z et Z' et tout $p \geqslant 1$,

$$\delta(Z + Z') \leqslant 2\delta(Z) + \left\| Z' \right\|_p^{\frac{p}{p+1}}.$$

1. On applique le résultat du cas m-dépendant à $\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} b_{n,\boldsymbol{i}} X_{\boldsymbol{i},m}$ où $X_{\boldsymbol{i},m} = \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d, \|\boldsymbol{i} - \boldsymbol{u}\| \leqslant m\right)\right]$.
2. On controle la contribution de $\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d} b_{n,\boldsymbol{i}} \left(X_{\boldsymbol{i}} - X_{\boldsymbol{i},m}\right)$ à l'aide d'une inégalité de moments.
3. On choisit m adéquatement.

Inégalité de moments pour les sommes pondérées

Théorème (G., 2018)

Soit $\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d\right\}$ *un champ i.i.d. et* $X_{\boldsymbol{j}} := f\left(\left(\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right)$ *où* $\mathbb{E}\left[\left|X_{\boldsymbol{0}}\right|^p\right]$ *est finie,* $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}}\right] = 0$ *et* $\left(a_{\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$, $p \geqslant 2$,

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}} X_{\boldsymbol{i}}\right\|_p \leqslant \frac{14.5p}{\log p}\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}^2\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{+\infty} (4j+4)^{d/2}\,\delta_{j,2}$$
$$+\frac{14.5p}{\log p}\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \left|a_{\boldsymbol{i}}\right|^p\right)^{1/p} \sum_{j=0}^{+\infty} (4j+4)^{d(1-1/p)}\,\delta_{j,p},$$

où pour $j \geqslant 1$,

$$\delta_{j,p} = \left\|\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \sigma\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty \leqslant j\right\}\right] - \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \sigma\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty \leqslant j-1\right\}\right]\right\|_p$$

et $\delta_{0,p} = \left\|\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}} \mid \sigma\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{0}}\right\}\right]\right\|_p$.

Vitesse de convergence, modèle de regression

Modèle :

$$Y_{\boldsymbol{i}} = g\left(\frac{\boldsymbol{i}}{n}\right) + X_{\boldsymbol{i}}, \quad \boldsymbol{i} \in \Lambda_n := \{1, \dots, n\}^d,$$

où $g\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue de classe C^∞, $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ aléatoire centré s'exprimant comme une fonctionnelle d'un champ i.i.d.

On utilise l'estimateur g_n défini par

$$g_n(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} Y_{\boldsymbol{i}} K\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}/n}{h_n}\right)}{\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} K\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}/n}{h_n}\right)}, \quad x \in [0,1]^d,$$

où $K\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est un noyau et $(h_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergent vers 0 et vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} nh_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} nh_n^{d+1} = 0.$$

Hypothèses sur K

- $\int_{\mathbb{R}^d} K(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = 1$;
- K est symétrique, $K(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ pour tout $\boldsymbol{x}$;
- le support de K est $[-1, 1]^d$;
- il existe des constantes r, c et C telles que pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in [-1, 1]^d$, $|K(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{y})| \leqslant r \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty$ et $c \leqslant K(\boldsymbol{x}) \leqslant C$.

On mesure la vitesse de convergence en loi de $\left((nh_n)^{d/2}\left(g_n(\boldsymbol{x}) - \mathbb{E}\left[g_n(\boldsymbol{x})\right]\right)\right)_{n\geqslant 1}$ vers une loi normale par la quantité suivante :

$$\Delta_n := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left\{(nh_n)^{d/2}\left(g_n(\boldsymbol{x}) - \mathbb{E}\left[g_n(\boldsymbol{x})\right]\right) \leqslant t\right\} - \Phi\left(\frac{t}{\sigma \left\|K\right\|_2}\right)\right|,$$

où $\Phi(t) = \mathbb{P}\left\{N \leqslant t\right\}$, N de loi normale centrée réduite.
Afin d'exprimer g_n sous la forme de sommes $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} b_{n,\boldsymbol{i}} X_{\boldsymbol{i}} / \left\|b_{n,\cdot}\right\|_2$, nous aurons besoin de définir

$$A_n := (nh_n)^{d/2}\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} K^2\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}/n}{h_n}\right)\right)^{1/2} \left\|K\right\|_2^{-1} \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\Lambda_n} K\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{i}/n}{h_n}\right)\right)^{-1/2}$$

Sous les hypothèses mentionnées sur K, $A_n \to 1$.

Nous aurons également besoin de contrôler

$$\varepsilon_n := \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} \left| \mathbb{E}\left[X_{\mathbf{0}} X_{\boldsymbol{j}} \right] \right| \left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \Lambda_n \cap (\Lambda_n - \boldsymbol{j})} \frac{K\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}/n}{h_n}\right) K\left(\frac{\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})/n}{h_n}\right)}{\sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda_n} K^2\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}/n}{h_n}\right)} - 1 \right).$$

Pour chaque j fixé,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{\boldsymbol{i} \in \Lambda_n \cap (\Lambda_n - \boldsymbol{j})} \frac{K\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}/n}{h_n}\right) K\left(\frac{\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})/n}{h_n}\right)}{\sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda_n} K^2\left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}/n}{h_n}\right)} = 1,$$

donc la finitude de $\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d} \left| \mathbb{E}\left[X_{\mathbf{0}} X_{\boldsymbol{j}} \right] \right|$ garantit la convergence de $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ vers 0.

Théorème (G., 2018)

Soit $p > 2$, $p' := \min\{p, 3\}$ et $\left(X_{\boldsymbol{j}}\right)_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} = \left(f\left(\left(\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right)\right)_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire centré, s'exprimant comme une fonctionelle d'i.i.d.. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que les quantités suivantes soient finies

$$C_2(\alpha) := \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)^{d/2+\alpha} \delta_{j,2} \text{ et } C_p(\beta) := \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)^{d(1-1/p)+\beta} \delta_{j,p}.$$

Supposons que $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} \left|\operatorname{Cov}\left(X_{\boldsymbol{0}}, X_{\boldsymbol{i}}\right)\right| < +\infty$ et que $\sigma^2 := \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} \operatorname{Cov}\left(X_{\boldsymbol{0}}, X_{\boldsymbol{j}}\right) > 0$.
Pour tout $\gamma > 0$, il existe n_0 et une constante κ tels que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\Delta_n \leqslant \kappa \left|A_n - 1\right|^{\frac{p}{p+1}} + \left|\varepsilon_n\right| + \kappa \left(nh_n\right)^{\frac{d}{2}(\gamma(p'-1)d-p'+2)} + \left(nh_n\right)^{-\frac{d}{2}\gamma\alpha\frac{p}{p+1}} + \left(nh_n\right)^{\frac{2d-p(\gamma\beta+1)}{2(p+1)}}.$$

Perspectives

1. Autre mesure de la vitesse de convergence.
2. Bornes non uniformes : on chercher à contrôler

$$\left|\mathbb{P}\left\{\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} b_{n,\boldsymbol{i}}X_{\boldsymbol{i}}/\left\|b_n\right\|_2 \leqslant x\right\} - \mathbb{P}\left\{N \leqslant x\right\}\right|(1+|x|)^p .$$