Loi des logarithmes itérés bornée pour des champs aléatoires bernoulliens

Davide Giraudo

Ruhr-Universität Bochum
Financé par le Grant SFB 823

Amiens, 28 avril 2020

Théorème ergodique maximal

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $T : \Omega \to \Omega$ une application mesurable et préservant la mesure. Alors pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ intégrable,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i \to \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{I}\right],$$

où $\mathcal{I} = \left\{A \in \mathcal{F} \mid T^{-1}A = A\right\}$ et la convergence a lieu presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$x\mathbb{P}\left\{\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i \right| > x \right\} \leqslant \mathbb{E}\left[|f| \, \mathbf{1}\left\{|f| > x/2\right\}\right].$$

En général, on ne peut pas prendre une normalisation autre que n. Mais dans certains cas ($\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, T opérateur de décalage, $\mathbb{P}$ mesure produit) et sous certaines conditions, d'autres normalisations peuvent être considérées.

Loi des logarithmes itérés pour les suites i.i.d.

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. centrée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- Si $\mathbb{E}\left[|X_1|^p\right]$ est finie pour un certain $p \in [1, 2[$, alors $S_n/n^{1/p} \to 0$ presque sûrement, où $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- Si $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$ est finie, alors $\left(S_n/\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$.

- Si $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$ est finie, alors la loi des logarithmes itérés a lieu :

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln\ln n}} S_n = -\sqrt{2\mathbb{E}\left[X_1^2\right]} \text{ p.s. et}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln\ln n}} S_n = \sqrt{2\mathbb{E}\left[X_1^2\right]} \text{ p.s.}$$

Pourquoi $\ln\ln(n)$?

On cherche une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ divergent vers l'infini le plus lentement possible et telle que la variable aléatoire $\sup_{n\geqslant 1}|S_n|/\sqrt{na_n}$ soit presque sûrement finie.
Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. où X_1 est de loi normale centrée réduite et $Y_n := \left|\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} X_i\right| / \sqrt{2^n a_{2^{n+1}}}$.

La finitude de $\sup_{n\geqslant 1}|S_n|/\sqrt{na_n}$ implique celle de $\sup_{n\geqslant 1} Y_n$.
Puisque $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ est indépendante, par le lemme de Borel-Cantelli, il existe un $M > 0$ tel que la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}\{Y_n > M\}$ converge. Puisque

$$\mathbb{P}\{Y_n > M\} = \mathbb{P}\{|X_1| > M\sqrt{a_{2^{n+1}}}\},$$

la vitesse de convergence des queues d'une loi normale suggère le choix $a_{2^n} = \ln(n)$.

Loi des logarithmes itérés bornée pour les suites i.i.d.

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. centrée telle que $\mathbb{E}\left[X_1^2\right]$ soit finie. Alors la variable aléatoire

$$M := \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{nLL(n)}} |S_n|$$

est presque sûrement finie, où $L(x) = \max\{1, \ln x\}$ et $LL(x) = L(L(x))$.

Il est également possible (Pisier, 1976) de contrôler les moments de M : pour tout $p \in [1, 2[$,

$$\|M\|_p \leqslant C_p \|X_1\|_2 ,$$

où C_p ne dépend que de p.

Loi des logarithmes itérés pour un champ i.i.d.

Soit $d \geqslant 2$ un entier et $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ i.i.d. centré. On définit un ordre partiel sur $\mathbb{Z}^d$ par

$$\boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{j} \Leftrightarrow i_q \leqslant j_q \text{ pour tout } q \in \{1, \ldots, d\}.$$

Les sommes partielles sur les rectangles sont définies par

$$S_{\boldsymbol{n}} := \sum_{\boldsymbol{1} \preccurlyeq \boldsymbol{i} \preccurlyeq \boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}}.$$

Théorème (Wichura, 1973)

Si $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}}^2 \left(L\left(|X_{\boldsymbol{0}}|\right)\right)^{d-1} / LL\left(|X_{\boldsymbol{0}}|\right)\right] < +\infty$, *alors*

$$\limsup_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} S_{\boldsymbol{n}} = \|X_{\boldsymbol{0}}\|_2 \sqrt{d} = -\liminf_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} S_{\boldsymbol{n}},$$

où $|\boldsymbol{n}| = \prod_{q=1}^{d} n_q$ *et* $\limsup_{\boldsymbol{n} \to +\infty} a_{\boldsymbol{n}} = \lim_{N \to +\infty} \sup_{n_1, \ldots, n_d \geqslant N} a_{\boldsymbol{n}}$.

Objectif

Étant donné un champ aléatoire strictement stationnaire $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ (*i.e.*, $(X_{\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{k}},\ldots,X_{\boldsymbol{i}_N+\boldsymbol{k}})$ a la même loi que $(X_{\boldsymbol{i}_1},\ldots,X_{\boldsymbol{i}_N})$ pour tous $\boldsymbol{i}_1,\ldots,\boldsymbol{i}_N$ et tout $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d$), soit

$$S_{\boldsymbol{n}} := \sum_{\boldsymbol{1}\preccurlyeq\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}}$$

avec

$$\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{j} \Leftrightarrow i_q \leqslant j_q \text{ pour tout } q\in\{1,\ldots,d\}\,.$$

On cherche à contrôler les moments de

$$\sup_{\boldsymbol{n}\succcurlyeq\boldsymbol{1}} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\,LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}}\,|S_{\boldsymbol{n}}|$$

où $|\boldsymbol{n}| = \prod_{q=1}^{d} n_q$.

Champs bernoulliens : définition et exemples

Definition

On dit que le champ aléatoire $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est bernoullien s'il existe un champ i.i.d. $(\varepsilon_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ et une fonction $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$ telle que $X_{\boldsymbol{i}} = f\left((\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\right)$.

En termes de systèmes dynamiques,

- $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la tribu produit ;
- $\mathbb{P}$ est la mesure produit de la loi de $\varepsilon_{\mathbf{0}}$;
- pour chaque $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$ et chaque $(\omega_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}} \in \Omega$, $T^{\boldsymbol{j}}\left((\omega_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}}\right) = (\omega_{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}}$.

Champs bernoulliens : exemples (1)

Soit $(\varepsilon_{\boldsymbol{j}})_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ i.i.d. centré tel que $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{\boldsymbol{0}}^2\right] < +\infty$.

- Champs linéaires. Soit $(a_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ telle que $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}^2 < +\infty$:

$$X_{\boldsymbol{j}} := \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{\substack{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d \\ \|\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant N}} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}.$$

- Processus de Volterra : soit $(a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'})_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'\in\mathbb{Z}^d}$ telle que $a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}} = 0$ pour tout $\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$ et $\sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'}^2 < +\infty$:

$$X_{\boldsymbol{j}} = \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}'}.$$

Champs bernoulliens : exemples (2)

Soit $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire i.i.d. où $\varepsilon_{\boldsymbol{0}}$ est de loi normale centrée réduite. On définit

$$Y_{\boldsymbol{j}} := f\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}}\right),$$

où $a_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^d$, est une famille de réels telle que $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}^2 = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pour chaque $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$, $Y_{\boldsymbol{j}}$ a la même loi que $f(N)$, où N est de loi normale centrée réduite.

Mesure de dépendence

Soit $X_{\boldsymbol{i}} = f\left(\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}\right)_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\right)$ où $\left(\varepsilon_{\boldsymbol{j}}\right)_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ est i.i.d. Pour $j \geqslant 1$, on note

$$X_{\boldsymbol{i},j} := \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j\right)\right] - \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j-1\right)\right].$$

On note par $\|\cdot\|_{r,q}$ ($r \geqslant 1$, $q \geqslant 0$ la norme d'Orlicz associée à la fonction $\varphi_{r,q} \colon x \mapsto x^r \left(\ln\left(1+x\right)\right)^q$, *i.e.*,

$$\|X\|_{r,q} = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \mathbb{E}\left[\varphi_{r,q}\left(\frac{|X|}{\lambda}\right)\right] \leqslant 1\right\}$$

et $\mathbb{L}_{r,q}$ l'espace des variables aléatoires X telles que $\|X\|_{r,q} < +\infty$.

1. Si $\|X_{\boldsymbol{0}}\|_{2,q} < +\infty$, alors $\lim_{j\to+\infty} \|X_{\boldsymbol{0},j}\|_{2,q} = 0$.

2. Pour tout $j \geqslant 1$, fixé, $X_{\boldsymbol{i},j}$ peut s'exprimer comme une fonction des variables aléatoires $\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j$.

Résultat principal

Théorème (G., 2020)

Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *un champ aléatoire centré tel qu'il existe une famille i.i.d. de variables aléatoires* $\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}\in\mathbb{Z}^d\right\}$ *et une fonction mesurable* $f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\to\mathbb{R}$ *tels que* $X_{\boldsymbol{i}} = f\left(\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}\right)_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\right)$. *Pour tout* $1<p<2$, *l'inégalité suivante a lieu :*

$$\left\|\sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\,LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}}\left|\sum_{\boldsymbol{1}\preccurlyeq\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{n}}X_{\boldsymbol{i}}\right|\right\|_p \leqslant c_{p,d}\sum_{j\geqslant 0}(j+1)^{d/2}\left\|X_{\boldsymbol{0},j}\right\|_{2,d-1},$$

où $c_{p,d}$ *ne dépend que de* p *et de* d *et*

$$X_{\boldsymbol{0},j} = \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}}\mid\sigma\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty\leqslant j\right\}\right]-\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}}\mid\sigma\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty\leqslant j-1\right\}\right],\quad j\geqslant 1;$$

$$X_{\boldsymbol{0},0} := \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{0}}\mid\sigma\left\{\varepsilon_{\boldsymbol{0}}\right\}\right].$$

Application aux fonctions de champs linéaires

Corollaire

Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *un champ aléatoire linéaire défini par*

$$X_{\boldsymbol{j}} = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}},$$

où $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *est i.i.d.. Soit* $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction höldérienne d'exposant* $\gamma\in]0,1]$. *On suppose que* $\varepsilon_{\boldsymbol{0}}\in\mathbb{L}_{2/\gamma,d-1}$ $\mathbb{E}\left[g\left(X_{\boldsymbol{0}}\right)\right]=0$. *Alors pour* $1<p<2$,

$$\left\|\sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d}\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\,LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}}\left|\sum_{\boldsymbol{1}\preccurlyeq\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{n}} g\left(X_{\boldsymbol{i}}\right)\right|\right\|_p$$
$$\leqslant c_{p,d,\gamma}\sum_{j=0}^{+\infty}(j+1)^{d/2}\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d,\|\boldsymbol{i}\|_\infty=j}|a_{\boldsymbol{i}}|^{2\gamma}\right)^{1/2}\|\varepsilon_{\boldsymbol{0}}\|_{2/\gamma,d-1},$$

où $c_{p,d,\gamma,g}$ *ne dépend que de* p, d, g *et* γ.

Processus de Volterra

Corollaire

Soit $(X_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *un champs aléatoire de Volterra défini par*

$$X_{\boldsymbol{j}} := \sum_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{s}_1}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{s}_2},$$

où $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *est i.i.d. centré et* $\varepsilon_{\boldsymbol{0}} \in \mathbb{L}_{2,d-1}$. *Alors pour tout* $1 < p < 2$, *l'inégalité suivante a lieu :*

$$\left\| \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left| \sum_{\boldsymbol{1}\preccurlyeq \boldsymbol{i}\preccurlyeq \boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i}} \right| \right\|_p$$

$$\leqslant c_{p,d} \sum_{j\geqslant 0} (j+1)^{d/2} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}_1\|_\infty = j} \sum_{\|\boldsymbol{s}_2\|_\infty \leqslant j} \left(a^2_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2} + a^2_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1} \right) \right)^{1/2} \|\varepsilon_{\boldsymbol{0}}\|^2_{2,d-1},$$

où $c_{p,d}$ *ne dépend que de* p *et* d.

Fonctions de processus linéaires gaussiens

Corollaire

Soit $(\varepsilon_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *un champ i.i.d.,* $\varepsilon_{\mathbf{0}} \sim N(0,1)$,

$$Y_{\boldsymbol{j}} := \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}\varepsilon_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}},$$

où $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d} a_{\boldsymbol{i}}^2 = 1$. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $\mathbb{E}\left[f\left(Y_{\mathbf{0}}\right)\right] = 0$ *et*

$$C\left(f\right) := \sum_{q=1}^{+\infty} \sqrt{q!}\, q^{d-\frac{1}{2}} \left|c_q\left(f\right)\right| < +\infty, c_q\left(f\right) = \frac{1}{q!}\mathbb{E}\left[f\left(Y_{\mathbf{0}}\right) H_q\left(Y_{\mathbf{0}}\right)\right],$$

où H_q *est le* q^e *polynôme d'Hermite. Pour tout* $1 < p < 2$,

$$\left\| \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left| \sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{n}} f\left(Y_{\boldsymbol{i}}\right) \right| \right\|_p$$

$$\leqslant c_{p,d} \sum_{j\geqslant 0} (j+1)^{d/2} \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d, \|\boldsymbol{i}\|_\infty = j} a_{\boldsymbol{i}}^2 \right)^{1/2} C\left(f\right).$$

Idée de démonstration (1)

Étape 1 : réduction à une fonction d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes.

Soit $X_{\boldsymbol{i}} = f\left(\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}\right)_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}\right)$ où $\left(\varepsilon_{\boldsymbol{j}}\right)_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ est i.i.d. Pour $j \geqslant 1$, on note

$$X_{\boldsymbol{i},j} := \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j\right)\right] - \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j-1\right)\right],$$

$$X_{\boldsymbol{i},0} := \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{i}}\right)\right].$$

Soit

$$M\left(\left(Y_{\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right) := \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left|\sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{n}} Y_{\boldsymbol{i}}\right|$$

Alors

$$\left\|M\left(\left(X_{\boldsymbol{i}}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right)\right\|_p \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \left\|M\left(\left(X_{\boldsymbol{i},j}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right)\right\|_p + \left\|M\left(\left(X_{\boldsymbol{i},0}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right)\right\|_p$$

et $X_{\boldsymbol{i},j}$ peut s'exprimer comme une fonction des variables aléatoires $\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j$.

Idée de démonstration (2)

Étape 2 : réduction à un champ i.i.d.

$$X_{\boldsymbol{i},j} := \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j\right)\right] - \mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \sigma\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}, \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{i}\|_\infty \leqslant j-1\right)\right].$$

On doit contrôler la norme p de

$$M\left(\left(X_{\boldsymbol{i},j}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right) := \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left|\sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq\boldsymbol{i}\preccurlyeq\boldsymbol{n}} X_{\boldsymbol{i},j}\right|$$

En séparant les indices suivant le reste de leurs coordonnées par la division euclidienne par $4j$, on obtient

$$\left\|M\left(\left(X_{\boldsymbol{i},j}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right)\right\|_p \leqslant (4j+1)^{d/2} \left\|M\left(\left(X'_{\boldsymbol{i},j}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}\right)\right\|_p$$

où $\left(X'_{\boldsymbol{i},j}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est i.i.d. et $X'_{\mathbf{0},j}$ a la même loi que $X_{\mathbf{0},j}$.

Idée de démonstration (3)

On est donc réduit au cas i.i.d. Étape 3 : réduction à un supremum sur les dyadiques. Soit

$$M^k := \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_k} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left| \sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq \boldsymbol{i}\preccurlyeq \boldsymbol{n}} \varepsilon_{\boldsymbol{i}} \right|,$$

où $\mathbb{N}_k \subset \mathbb{Z}^d$, $0 \leqslant k \leqslant d$ est l'ensemble des d-uplet d'entiers dont les coordonnées $k+1, \ldots, d$ sont des puissances de 2 et $\mathbb{N}_{d+1} = \mathbb{N}^d$.
En utilisant des arguments de sous-martingales, on peut démontrer que $\left\|M^k\right\|_p \leqslant c_{p,d} \left\|M^{k-1}\right\|_p$.
Donc il suffit de contrôler

$$\left\| \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left| \sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq \boldsymbol{i}\preccurlyeq \boldsymbol{n}} \varepsilon_{\boldsymbol{i}} \right| \right\|_p$$

(toutes les coordonnées de $\boldsymbol{n}$ sont des puissances de 2).

Idée de démonstration (4)

Étape 4 : utilisation d'une inégalité de déviation. Contrôle de

$$\left\| \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{n}|\, LL\left(|\boldsymbol{n}|\right)}} \left| \sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq \boldsymbol{i}\preccurlyeq \boldsymbol{n}} \varepsilon_{\boldsymbol{i}} \right| \right\|_p .$$

Si $(d_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite i.i.d.,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} d_j\right| > x\right\} \cap \left\{\sum_{j=1}^{n} d_j^2 \leqslant y\right\}\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{x^2}{2\left(y+V^2\right)}\right),$$

avec $V^2 = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[d_j^2\right]$.

Contrôle des queues de $\sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} \sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq \boldsymbol{i}\preccurlyeq \boldsymbol{n}} \varepsilon_{\boldsymbol{i}}^2$ à l'aide d'une version du théorème ergodique maximal pour les actions de $\mathbb{Z}^d$: pour un champ aléatoire strictement stationnaire $(Y_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$, $Y_{\boldsymbol{i}} \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} \sum_{\mathbf{1}\preccurlyeq \boldsymbol{i}\preccurlyeq \boldsymbol{n}} Y_{\boldsymbol{i}} > y\right\} \leqslant \int_1^{+\infty} \mathbb{P}\left\{Y_{\mathbf{1}} > yu2^{-d}\right\} (\log u)^{d-1}\, \mathrm{d}u.$$

Autre type de questions traitées

Espaces probabilisés avec une action T de $\mathbb{Z}^d$ préservant la mesure $\mathbb{P}$, muni d'une filtration $\left(\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}} := T^{-\boldsymbol{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right)_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^d}$ telle que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}\right] \mid \mathcal{F}_{\boldsymbol{j}}\right] = \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_{\min\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}}\right].$$

Fonction maximale : normalisation en $\prod_{q=1}^{d}\sqrt{n_q LL\left(n_q\right)}$.

1. Traitement des orthomartingales : $X_{\boldsymbol{i}}$ est $\mathcal{F}_{\boldsymbol{i}}$ et $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \mathcal{F}_{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{e_q}}\right] = 0$ pour tout $1 \leqslant q \leqslant d$. Une condition suffisante pour le contrôle des normes $\mathbb{L}^p$ de la fonction maximale est

$$\mathbb{E}\left[X_{\mathbf{0}}^2\left(\log\left(1+|X_{\mathbf{0}}|\right)\right)^{2d-2}\right] < +\infty.$$

2. Approximation par orthomartingales $\rightarrow$ conditions sur $\mathbb{E}\left[X_{\boldsymbol{i}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right]$.

Perspectives

1. Étude des moments d'ordre $p \geqslant 2$ ou exponentiels de la fonction maximale.
2. Loi des logarithmes itérés classique : déterminer les limites supérieures et inférieures de la fonction maximale. On peut conjecturer que la limite supérieure est donnée par

$$\sqrt{d \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} \operatorname{Cov}(X_{\boldsymbol{0}}, X_{\boldsymbol{k}})}.$$