Invariants asymptotiques de flots

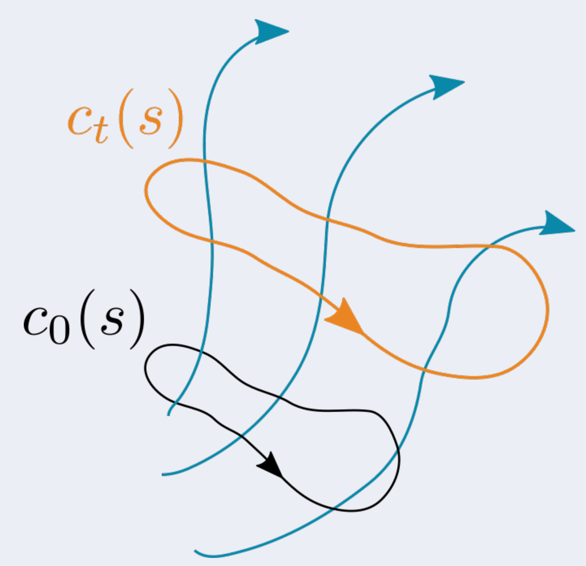
Marianne Rydzek, sous la direction d'**Ana Rechtman**
marianne.rydzek@math.unistra.fr

1. Introduction

On considère l'équation d'Euler pour le champ de vitesses d'un fluide parfait (incompressible et non visqueux) :

$$\begin{cases} \nabla \cdot v_t &= 0 \\ \frac{\partial v_t}{\partial t} + (v_t \cdot \nabla) v_t + \nabla p &= \vec{0} \end{cases}$$

- la circulation de v_t le long d'une courbe fermée transportée par le flot est constante.
- le rotationnel du champ $w_t = \nabla \times v_t$ est transporté par le flot
- w_t préserve le volume.



Toute propriété de w_t invariante par difféomorphisme préservant le volume (d.p.v) livre des informations sur le système dynamique initial.

Question : Construire des invariants par d.p.v d'un champ X préservant une mesure μ sur $\mathbb{S}^3$ (ou $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$).

2. Hélicité

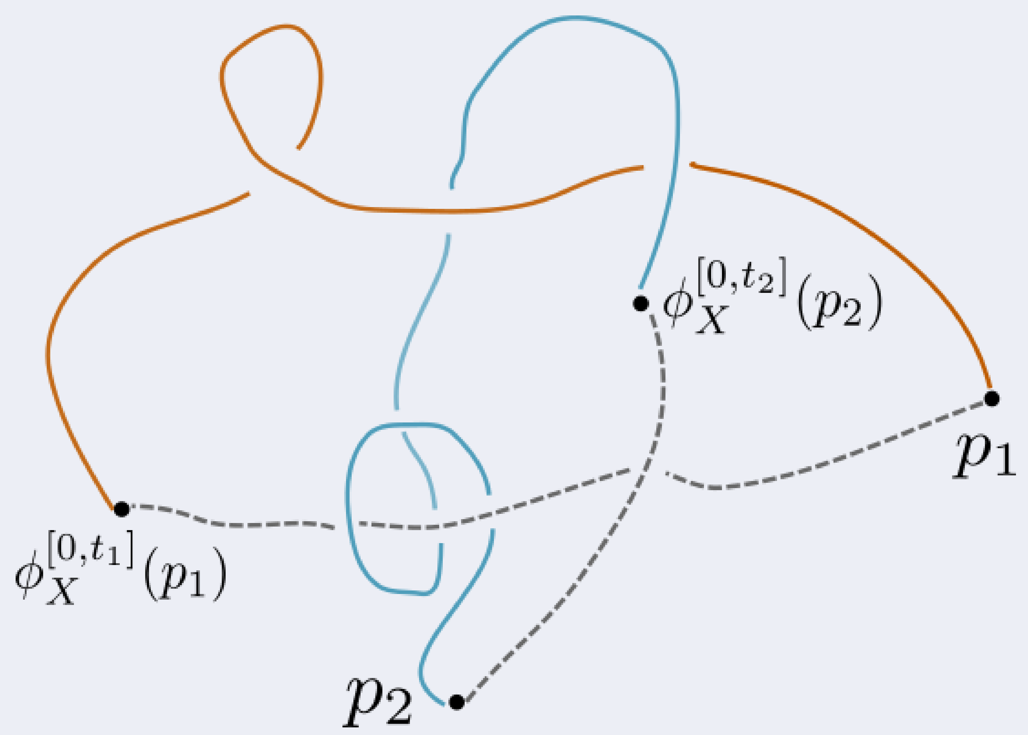
Soit X un champ de vecteurs préservant un volume μ sur $\mathbb{S}^3$.
X induit une 2-forme $\beta = i_X \mu$ qui est fermée, donc exacte. Soit α_X une 1-forme telle que $d\alpha_X = \beta$.

Définition 1 *$Hel(X, \mu) = \int_{\mathbb{S}^3} \alpha_X \wedge d\alpha_X$ est l'hélicité de X. Elle ne dépend pas du choix de la forme potentielle α_X.*

Proposition 2 *L'hélicité est invariante par difféomorphisme qui préserve μ.*

3. Linking number et hélicité

Proposition 3 *Pour μ-presque tout point p et pour presque tout temps t, le nœud $k_X(p,t)$ formé par l'arc $\phi_X^{[0,t]}(p)$ et un segment de géodésique reliant p à $\phi_X^t(p)$ est bien défini.*



Théorème 4 *On suppose que X préserve une mesure μ qui n'est concentrée sur aucune orbite périodique. Alors pour μ-presque toute paire de points (p_1, p_2), la limite suivante existe:*

$$Lk_X(p_1,p_2) := \lim_{t_1,t_2 \to \infty} \frac{1}{t_1 t_2} Link(k_X(p_1,t_1), k_X(p_2,t_2))$$

De plus la moyenne de $Lk_X(p_1,p_2)$ est égale à $\frac{1}{\mu(\mathbb{S}^3)} Hel(X,\mu)$.

4. Premiers résultats : bridge d'un flot

Définition 5 *Soit k un nœud et h une fonction hauteur dont la restriction $h_{|k}$ est de Morse.*

$$Bridge(k) = \min_{h \text{ fonction hauteur}} \sharp\{ \text{max de } h_{|k} \}$$

Et pour un champ de vecteurs X préservant une mesure μ sur $\mathbb{S}^3$?

Ici une fonction hauteur est obtenue en précomposant $h_0(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ par un difféomorphisme.

Définition 6 (Asymptotique, travail en cours) *En exploitant la relation bridge-courbure établie par Milnor [3], la limite suivante existe pour tout $x \in \mathbb{S}^3$:*

$$b(x) := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} Bridge(k_X(x,T))$$

On pose ensuite $b_1(X,\mu) = \int_{\mathbb{S}^3} b(x) d\mu$.

Définition 7 (Généralisation de Déf.5) *Le bridge de (X,μ) est*

$$b_2(X,\mu) = \inf_{h \text{ fonction hauteur}} \frac{1}{2} \int_0^1 \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mu\left(\phi_X^{[0,\epsilon]} \left(T_X \left(h^{-1}(t) \right) \right) \right) dt$$

$b_1(X,\mu)$ et $b_2(X,\mu)$ sont invariants par difféomorphisme qui préserve μ.

Théorème 8 (Travail en cours) *Le bridge b_2 est une fonctionnelle continue sur l'espace des courants normaux.*

Une fois ce théorème acquis, on aura l'important corollaire :

Corollaire 9 *Soit (X_n, μ_n) une suite de champs de vecteurs préservant une mesure, telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un champ X en topologie C^0 et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ faiblement. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} b_2(X_n,\mu_n) = b_2(X,\mu)$$

Conséquence : les deux définitions du bridge des flots b_1 et b_2 coïncident.

Références

[1] V.I. Arnold and B.A. Khesin. *Topological Methods in Hydrodynamics*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1999.

[2] P. Dehornoy and A. Rechtman. The trunkenness of a volume-preserving vector field, 2016.

[3] J. W. Milnor. On the total curvature of knots. *Annals of Mathematics*, 52(2):248–257, 1950.

[4] J. Schultens. Bridge numbers of torus knots, 2005.

[5] T. Vogel. On the asymptotic linking number. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131(7):2289–2297, 2002.

5. Indépendance et exemple

Question : Le bridge des flots est-il indépendant de l'hélicité ?

Oui, si la déf. 5 (asymptotique) et le théorème 6 fonctionnent, car le trunk est le double du bridge pour les nœuds toriques.

À montrer : Le bridge des flots est-il indépendant du trunk des flots Tks ?

Flot de Seifert de paramètres $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\phi_{\alpha,\beta}^t(z_1,z_2) = (e^{2i\pi\alpha t} z_1, e^{2i\pi\beta t} z_2)$$

- $\mathrm{Hel}(X, Vol) = \alpha\beta$
- $\mathrm{Tks}(X, Vol) = 2\min\{\alpha,\beta\}$
- $b_1(X, Vol) = \min\{\alpha,\beta\}$