INTERPRÉTATION TOPOLOGIQUE DES RELATIONS DE MÉLANGE ENTRE POLYLOGARITHMES MULTIPLES

Université de Strasbourg

SOUS LA DIRECTION DE ENRIQUEZ BENJAMIN

YADDADEN KHALEF

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

INSTITUT DE RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES AVANCÉES

cnrs

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée

RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE POLYLOGARITHMES MULTIPLES

On fixe N un entier strictement positif, μ_N le groupe des racines N-ièmes de l'unité et $\tilde{\mu}_N = \mu_N \cup \{0\}$.
On appelle *valeur polylogarithme multiple aux racines de l'unité* (MPV) la série convergente

$$L_{(k_1,\dots,k_l)}(\zeta_1,\dots,\zeta_l) = \sum_{0<m_1<\dots<m_l} \frac{\zeta_1^{m_1}\dots\zeta_l^{m_l}}{m_1^{k_1}\dots m_l^{k_l}} \tag{1}$$

où $l \in \mathbb{N}^*$, $k_1,\dots,k_l \in \mathbb{N}^*$, $\zeta_1,\dots,\zeta_l \in \mu_N$ et $(k_l,\zeta_l) \neq (1,1)$.
Généralisant les *valeurs multi zéta* (MZV)

$$\zeta(k_1,\dots,k_l) = \sum_{0<m_1<\dots<m_l} \frac{1}{m_1^{k_1}\dots m_l^{k_l}}, \tag{2}$$

ces séries possèdent une représentation en termes d'intégrales itérées donnée par [Rac] comme suit : on pose pour $\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_r \in \tilde{\mu}_N$,

$$I(\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_r) := \int_0^1 \Omega_{\tilde{\zeta}_1}\dots\Omega_{\tilde{\zeta}_r} \tag{3}$$

où $\Omega_0 = \frac{ds}{s}$ et $\Omega_\zeta = \frac{ds}{\zeta^{-1}-s}$ pour $\zeta \in \mu_N$. On obtient alors

$$L_{(k_1,\dots,k_l)}(\zeta_1,\dots,\zeta_l) = I(\underbrace{0,\dots,0}_{k_l-1},\zeta_1\cdots\zeta_l,\dots,\underbrace{0,\dots,0}_{k_1-1},\zeta_1). \tag{4}$$

L'expression (1), d'une part, et l'expression (4), de l'autre, permettent d'écrire de façons différentes un produit de MPV comme combinaisons linéaires d'autres MPV. En reliant ces expressions, nous pouvons trouver des relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre ces valeurs, appelées *relations de double mélange*.
Il est possible de décrire de telles relations par un formalisme algébrique, en introduisant une algèbre non commutative de polynômes $\mathbb{Q}\langle x_0,(x_\zeta)_{\zeta\in\mu_N}\rangle$ puis en la munissant de deux nouveau produits décrivant les relations de mélange (voir [IKZ] dans le cas des MZV).

OBJECTIF

Interpréter géométriquement les relations de double mélange entre MPV en suivant une approche similaire à celle utilisée dans [EF1] dans le cadre des MZV.
A long terme, établir le fait que les relations "associateurs", énoncées dans [Enr] en terme de la série génératrice Ψ_{KZ} impliquent les relations de double mélange pour les MPV, résultat que l'on retrouve dans [EF2] pour les MZV.

FORMALISME DES RELATIONS ENTRE MPV

S'inspirant de [EF1], on considère $\mathbf{k}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre, $\mathfrak{f}_{N+1}$ la $\mathbf{k}$-algèbre de Lie graduée avec générateurs $e_0, e_\zeta (\zeta \in \mu_N)$ de degré 1 et

$$\mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}} := U(\mathfrak{f}_{N+1})$$

son algèbre enveloppante. Notons $\Delta_N^{\mathcal{V},\mathrm{DR}}$ son coproduit d'algèbre enveloppante.
Posons

$$\mathcal{W}_N^{\mathrm{DR}} := \mathbf{k} \oplus \bigoplus_{\zeta\in\mu_N} \mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}} e_\zeta$$

c'est une sous-algèbre graduée de $\mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}}$ librement engendrée par les $z_{n,\zeta} := e_0^{n-1}e_\zeta$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta \in \mu_N$. On pose aussi $z_{0,\zeta} = \begin{cases} 1 \text{ si } \zeta = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On peut alors définir un *coproduit de De Rham* $\Delta_N^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}$ sur $\mathcal{W}_N^{\mathrm{DR}}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_N^{\mathrm{DR}} &\to \mathcal{W}_N^{\mathrm{DR}} \otimes \mathcal{W}_N^{\mathrm{DR}} \\ z_{n,\zeta} &\mapsto \sum_{k+l=n,\kappa\lambda=\zeta} z_{k,\kappa} \otimes z_{l,\lambda} \end{aligned}$$

Le $\mathbf{k}$-module quotient

$$\mathcal{M}_N^{\mathrm{DR}} := \mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}} / \mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}} e_0.$$

est gradué. C'est un $\mathcal{W}_N^{\mathrm{DR}}$-module à gauche libre de rang 1 engendré par $1_{\mathrm{DR}} \in \mathcal{M}_N^{\mathrm{DR}}$. Puis, le coproduit de De Rham sur $\mathcal{M}_N^{\mathrm{DR}}$, $\Delta_N^{\mathcal{M},\mathrm{DR}} : \mathcal{M}_N^{\mathrm{DR}} \to \mathcal{M}_N^{\mathrm{DR}} \otimes \mathcal{M}_N^{\mathrm{DR}}$ est défini par

$$w \cdot 1_{DR} \mapsto \Delta_N^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}(w) \cdot (1_{DR} \otimes 1_{DR}),$$

où $w \in \mathcal{W}_N^{\mathrm{DR}}$. Puis, on considère les complétions de ces algèbres graduées $(\hat{\mathcal{V}}_N^{\mathrm{DR}}, \hat{\Delta}_N^{\mathcal{V},\mathrm{DR}}), (\hat{\mathcal{W}}_N^{\mathrm{DR}}, \hat{\Delta}_N^{\mathcal{W},\mathrm{DR}})$ et $(\hat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{DR}}, \hat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{DR}})$. A l'aide de ce formalisme et de la série génératrice appartenant à $\hat{\mathcal{V}}^{\mathrm{DR}}$,

$$\Psi_{\mathrm{KZ}} := 1 + \sum_{\substack{r\in N^* \\ (\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_r)\in\tilde{\mu}_N^r \\ \tilde{\zeta}_1\neq 1, \tilde{\zeta}_r \neq 0}} (-1)^{m_r} I(\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_r) w(\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_r)$$

où $m_r := \mathrm{Card}\{i \in [\![1,r]\!] \,|\, \tilde{\zeta}_i \neq 0)\}$ et $w(\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_r)$ est un élément explicite de $e_{\tilde{\zeta}_r}\cdots e_{\tilde{\zeta}_1} + e_1\mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}}(\mathbb{C}) + \mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}}(\mathbb{C})e_0$ [Enr]. Les relations de mélange entre MPV peut être formulées ainsi [Rac]

1. Ψ_{KZ} est un élément diagonal pour $\hat{\Delta}_N^{\mathcal{V},\mathrm{DR}}$.
2. $\left(\exp\left(\sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{m-1}}{m}(\Psi_{\mathrm{KZ}}|e_0^{m-1}e_1)e_1^m\right) \cdot \Psi_{\mathrm{KZ}}\right) \cdot 1_{\mathrm{DR}} \in \hat{\mathcal{M}}_N^{\mathrm{DR}}$ est diagonal pour $\hat{\Delta}_N^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DANS LE CAS $N = 1$

Pour $n \geq 4$ un entier, on considère $\mathfrak{p}_n$ la $\mathbf{k}$-algèbre de Lie des tresses infinitésimales de Hurwitz. Elle est engendrée par les $e^{ij}, i \neq j \in [\![1,n]\!]$ qui satisfont les relations $e^{ij} = e^{ji}$, $[e^{ij}, e^{kl}] = 0$ pour tous $i,j,k,l \in [\![1,n]\!]$ deux à deux distincts et $\sum_{j=1}^n e^{ij} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
En remarquant que $\mathfrak{f}_2 \simeq \mathfrak{p}_4$, on a alors

$$\mathcal{V}^{\mathrm{DR}} = \mathcal{V}_1^{\mathrm{DR}} = U(\mathfrak{f}_2) \simeq U(\mathfrak{p}_4). \tag{5}$$

Pour $i = 1,2,5$, on construit les morphismes d'algèbres de Lie $\mathrm{pr}_i : \mathfrak{p}_5 \to \mathfrak{p}_4$ tels que pour $j \neq i$, $e^{ij} \mapsto 0$, $e^{j5} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } i = 5 \\ e^{ij} & \text{sinon} \end{cases}$ et $e^{jk} \mapsto e^{jk}$ avec $k \neq i,j$. Ils donnent lieu aux morphismes d'algèbres $\mathrm{pr}_{12} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{p}_5 & \to & \mathfrak{p}_4 \oplus \mathfrak{p}_4 \\ x & \mapsto & (pr_1(x), pr_2(x)) \end{array}$ et $\ell : \mathfrak{p}_4 \to \mathfrak{p}_5$ tel que $\mathrm{pr}_5 \circ \ell = \mathrm{id}_{\mathfrak{p}_4}$. On peut alors déduire les morphismes $U(\mathrm{pr}_i) : U(\mathfrak{p}_5) \to \mathcal{V}^{\mathrm{DR}}$, $U(\mathrm{pr}_{12}) : U(\mathfrak{p}_5) \to \mathcal{V}^{\mathrm{DR}\otimes 2}$ et $U(\ell) : \mathcal{V}^{\mathrm{DR}} \to U(\mathfrak{p}_5)$. Ces morphismes reliant $\mathcal{V}^{\mathrm{DR}}$ aux tresses permettent de construire les morphismes (1), (2) des diagrammes ci-dessous ([EF1], suivant [DT] dans le cas du premier diagramme), puis, d'interpréter $\Delta^{\mathcal{W},\mathrm{DR}} = \Delta_1^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}$ et $\Delta^{\mathcal{M},\mathrm{DR}} = \Delta_1^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}$ en termes de tresses infinitésimales via les diagrammes ([EF1])

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}^{\mathrm{DR}} \arrow[r, "(1)"] \arrow[d] & \mathcal{M}_3(\mathcal{V}^{\mathrm{DR}\otimes 2}) \arrow[r, "(2)"] & \mathcal{V}^{\mathrm{DR}}\left[\frac{1}{e_1}\right]^{\otimes 2}_{\geq 0} \\ (\mathcal{V}^{\mathrm{DR}}, \cdot_{e_1}) \arrow[d] & & \\ \mathcal{W}_+^{\mathrm{DR}} \arrow[rr, "\Delta^{\mathcal{W},\mathrm{DR}}"] & & \mathcal{W}^{\mathrm{DR}} \otimes \mathcal{W}^{\mathrm{DR}} \arrow[uu, hook] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}^{\mathrm{DR}} \arrow[rr, "(1)"] \arrow[d] & & \mathcal{M}_3(\mathcal{V}^{\mathrm{DR}\otimes 2}) \arrow[d] \\ \mathcal{M}^{\mathrm{DR}} \arrow[r, "\Delta^{\mathcal{M},\mathrm{DR}}"] & \mathcal{M}^{\mathrm{DR}} \otimes \mathcal{M}^{\mathrm{DR}} \arrow[r, hook] & \mathcal{M}^{\mathrm{DR}}\left[\frac{1}{e_1}\right]^{\otimes 2}_{\geq -1} \end{tikzcd}$$

RECHERCHE ACTUELLE

Dans un premier temps, on travaille sur l'algèbre de Lie des tresses infinitésimales $\mathfrak{t}_{n,N}$ définie dans [Enr] pour $n \geq 2$ un entier et $N \in \mathbb{N}^*$, par les générateurs $t_1^{0i}, i \in [\![1,n]\!]$ et $t_\zeta^{ij}, i \neq j \in [\![1,n]\!], \zeta \in \mu_N$ et les relations
1. $t_\zeta^{ij} = t_{\zeta^{-1}}^{ji}$; 2. $[t_\zeta^{ij}, t_\lambda^{jk} + t_{\zeta\lambda}^{ik}] = 0$; 3. $[t_1^{0i} + t_1^{0j} + \sum_{\lambda\in\mu_N} t_\lambda^{ij}, t_\zeta^{ij}] = 0$; 4. $[t_1^{0i}, t_1^{0j} + \sum_{\lambda\in\mu_N} t_\lambda^{ij}] = 0$; 5. $[t_1^{0i}, t_\zeta^{jk}] = 0$; 6. $[t_\zeta^{ij}, t_\lambda^{kl}] = 0$. où $i,j,k,l \in [\![1,n]\!]$ deux à deux distincts et $\zeta, \lambda \in \mu_N$. Nous sommes encouragé dans cette démarche par le fait que

$$\mathfrak{f}_{N+1} \simeq \mathfrak{t}_{2,N}/Z(\mathfrak{t}_{2,N}). \tag{6}$$

Notre premier objectif est d'apporter une généralisation aux diagrammes précédents. Pour ce faire, nous envisageons de travailler en trois étapes

Étape 1 Construction d'un morphisme d'algèbres $\mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}} \to \mathcal{M}_{2N+1}(\mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}\otimes 2})$. Le noyau de $\mathfrak{t}_{3,N}/Z(\mathfrak{t}_{3,N}) \to \mathfrak{t}_{2,N}/Z(\mathfrak{t}_{2,N})$ (analogue de pr_5) est engendré par $2N+1$ éléments. Un lemme algébrique nous permet alors de construire un morphisme d'algèbres $U(\mathfrak{t}_{3,N}/Z(\mathfrak{t}_{3,N})) \to \mathcal{M}_{2N+1}(U(\mathfrak{t}_{3,N}/Z(\mathfrak{t}_{3,N})))$ qui nous permet de construire le morphisme d'algèbres ci-dessus.

Étape 2 On considère l'algèbre $\mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}^{\mu_N}}$ munie de la nouvelle loi d'algèbre suivante

$$(v_\zeta)_\zeta * (w_\zeta)_\zeta = \left(\sum_{\lambda\in\mu_N} v_\lambda e_\lambda w_\zeta\right)_\zeta$$

puis, on construit les flèches

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{N,+}^{\mathrm{DR}} &\to (\mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}^{\mu_N}}, *) \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}^{\mu_N}} \\ &\to \mathcal{M}_{2N+1}(\mathcal{V}^{\mathrm{DR}\otimes 2}) \to \mathcal{V}_N^{\mathrm{DR}\otimes 2} \end{aligned} \tag{7}$$

le clé ici étant de trouver les matrices lignes et colonnes appropriées.

Étape 3 Enfin, via (7), on construit un analogue du premier diagramme et on déduit un analogue du second diagramme. Pour cela, il faudra sans doute de nouvelles matrices colonnes.

REFERENCES

[DT] P. Deligne and T. Terasoma. Harmonic shuffle relation for associators. Preprint, 2005.

[EF1] B. Enriquez and H. Furusho. The Betti side of the double shuffle theory. I. The harmonic coproduct. .

[EF2] B. Enriquez and H. Furusho. The Betti side of the double shuffle theory. III. Double shuffle relations for associators, 2019.

[Enr] B. Enriquez. Quasi-reflection algebras and cyclotomic associators. *Selecta Mathematica*, 13, Feb 2008.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier. Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values. *Compositio Mathematica*, 142:307–338, Mar 2006.

[Rac] G. Racinet. Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 95:185–231, Jul 2002.